☆☆☆　宇宙の夜明け　☆☆☆

藤田　丈久

（よろず物理研究所）

はじめに

この本を書くにあたり，最初は一般的な解説書を書くつもりで準備をしていた．物理学を特に深くは学んでいない人達もその読者として想定して書き始めたのである．しかしながら，その途中でそれよりもはるかに重要なことに思い至り，方針を変更した．それは現在，現代物理学自体が「激動期」にあるため，既存の教科書で物理を学ぼうとしている有能な若手諸君が途方に暮れていると言う現実がある．近年出版されたほとんどの場の理論の教科書はその理論が物理的に間違っていてもそれを平然と解説している．従って，その教科書で物理を学ぼうとしている院生や若手研究者は，その内容の検証能力が高ければ高い程，混乱状態に陥っている．実際，場の理論の教科書の著者達は，一般相対論が物理的に無意味な理論であるとは考えてみもしないであろうし，また場の理論の基礎は繰り込み理論であると思い込み，それを疑うことなど決してしないものであろう．これが，普通の時代ならば問題なく教科書の著者として生き延びたことであろう．しかし激動期にはその著者が余程しっかりした批判精神を持ち合わせていない限り，教科書を書く事は到底，できないし許されることではない．実際,「一般相対論」や場の理論の基礎と考えられてきた「繰り込み理論」,「自発的対称性の破れ」,「アノマリー」などの理論模型においては，その基礎自体が崩壊状態にある．

このような事態はこれまでの科学史でも経験したことがなく，若い人達は当然，著者も含めて古手の研究者もその事を知らないのである．その際，読者にとって大切な事は，正しい理論体系がわかり易く解説された本が身近にある事であろう．従ってこの本では，新しい重力理論をきちんと解説するとともに物理学の方向

性を示すような解説書を書こうとして最大限の努力をしている．その場合，読者として想定しているのは物理学科の学部４年次以上の物理の力を持っていることである．そして読者がこの本を理解して，さらに自分独自のピクチャーを作ることができれば，必ず，物理学の将来の方向を見据える事ができるものと確信している．幸いにして新しい理論体系は単純明快である．しかしながら式の導出や計算結果の検証は必ず必要となり，それを実行するためには参考文献 [3] を読み進んで頂きたい．

ここで現代物理学を学ぼうとしている若手研究者に一つだけ助言をしておきたい．それはこの本の内容もそうであるが，物理を単に知識として受け入れる事はできるだけ避けてほしいと言うことである．実は，理論物理の研究者のうち「知識偏重」タイプが意外と多いため，彼らの主張を聞いたりその解説を読んでもそれが易しいのか難しいのかなかなか判断できなく，その内容を理解することがそう簡単ではないのが現状である．「知識」だけからでは，そこに到達する道程を読み取る事は容易ではない．実際，どの理論模型でも自分で検証すると，実は非常に難しいものである．従ってその理論を習得するためにはどうしても時間が掛かってしまうし，掛かるのが当然なのである．しかしながら職人的な技術習得をしないと，模型計算の対象が変わると自分では計算できなくなってしまう．近年の理論屋は少なからず，知識偏重になっていて職人的な技術習得を怠ってきたが，これが現代物理が混迷している一つの原因でもあろう．これから物理学を学ぼうとしている若手研究者は，職人的な技術をしっかり学び，研究対象が変わってもきちんと対応できるような物理屋になって欲しいと切に願うものである．

[備考:]　最近の研究により、一般相対論は『物理的には無意味』である事が厳密に証明されている。これは小ノート『何故、一般相対論は無意味か？』にその証明が解説されている。
http://allphysics.sakura.ne.jp/indexGRelaNS.html
その意味では、この本における一般相対論関連の記述はあまり意味をなさない事になっているが、しかしここではその記述はそのままにしてある。何かの参考になればと考えている。

なお、特殊相対性理論における『時間の遅れ』に関しても小ノートを加筆している。これは観測量に直接関係しているわけでは無いが、考え方としては重要なので参考にして欲しい。

[付記:　２０２５年１月記す]

目 次

第１章　あらすじと略解説 1

1.1 天動説学派と自然論学派 1

1.1.1 天動説学派と自然論学派とは？ 2

1.1.2 宇宙のシナリオの解説 3

1.1.3 自然界の対称性の解説 3

1.1.4 天動説学派の学説と歴史 4

1.2 宇宙と夢 6

1.2.1 新しい夢 6

1.2.2 地球外天体の生命体（E. O. U.） 6

1.3 進化論と一般相対論 8

1.3.1 共通点 8

1.3.2 相違点 9

1.4 特殊と一般の相対性理論：言葉の解説 10

1.4.1 相対性原理 10

1.4.2 相対性理論 10

1.4.3 特殊相対性理論 11

1.4.4 一般相対論の未知関数 12

1.4.5 計量テンソル 13

1.4.6 一般相対論と重力場 14

1.4.7 Maxwell 方程式 と Einstein 方程式 15

1.5 繰り込み理論 17

1.5.1 何故，繰り込み理論か？ 17

1.5.2 自己エネルギーの発散：電子 18

1.5.3 自己エネルギーの発散：フォトン 19

1.5.4 繰り込みは必要か？ 21

1.5.5 西島先生のコメント 22

1.5.6 重力の繰り込み問題 23

第２章　天文学と宇宙論 **25**
2.1 天文学 25
2.1.1 これまでに観測された天体現象 26
2.1.2 地球の半径の測定 27
2.1.3 天体に働く力は重力 27
2.1.4 アンドロメダと天の川 (我々の) 銀河の衝突 28
2.2 宇宙論の概観 31
2.2.1 １９世紀までの宇宙論 31
2.2.2 宇宙における階層構造 32
2.3 一般相対論に基づいた宇宙論 33
2.3.1 ビッグバン模型 33
2.3.2 ハッブルの法則 34
2.3.3 ブラックホール 34
2.4 新しい宇宙論 36
2.4.1 陽子と電子は安定 36
2.4.2 ハッブルの法則と宇宙の膨張 37
2.4.3 宇宙論の基礎理論 37
2.4.4 無限宇宙 38

第３章　物理学とその表現法 **40**
3.1 表現言語 40
3.1.1 チョムスキーの「無意味な例文」 41
3.1.2 物理学における表現言語 41
3.1.3 正しい数学は必要条件 42
3.2 物理的な無意味文の例題 43
3.2.1 一般相対論 43
3.2.2 ブラックホール 44
3.2.3 カイラルアノマリー 44
3.2.4 自発的対称性の破れ 45
3.3 物理の表現空間 47
3.3.1 固有関数による表現 47
3.3.2 群論による表現 48

第４章　対称性とその物理 **49**
4.1 変換と不変性 49

4.1.1 Lagrangian 49
4.1.2 Lagrangian 密度 50
4.1.3 変換と対称性 – 古典力学 50
4.1.4 変換と対称性 – 場の理論 51
4.2 相対性原理 52
4.2.1 相対性理論 52
4.2.2 ローレンツ不変な Lagrangian 密度 52
4.3 Curie の原理 53
4.3.1 圧電効果と逆圧電効果 53
4.3.2 場の理論における Curie の原理 53
4.4 場の理論の対称性 54
4.4.1 対称性と保存則 54
4.4.2 グローバルゲージ対称性 55
4.4.3 対称性とその破れ 55
4.5 カイラル・アノマリー方程式 57
4.6 Higgs 粒子の問題点 58
4.6.1 Higgs ポテンシャル 58
4.6.2 Higgs 機構 58
4.7 弱い相互作用の理論 60
4.7.1 ４点相互作用 60
4.7.2 パリティ非保存の相互作用 60
4.7.3 CVC 理論 61
4.7.4 Weinberg-Salam 模型 61
4.8 非対称性の物理 63
4.8.1 ゼーマン効果 63
4.8.2 電気双極子の物理 63
4.8.3 シュタルク効果 64
4.8.4 スピン－軌道相互作用 64
4.8.5 圧電効果 64
4.9 繰り込み理論と対称性 65
4.9.1 局所的ゲージ対称性 65
4.9.2 電子の自己エネルギーの発散 65
4.9.3 電子の磁気能率補正 66
4.9.4 フォトンの自己エネルギーの発散 66
4.9.5 観測量の計算における発散の原因は？ 67

4.9.6 Dirac の主張が何故，無視されたのか？ 68
4.9.7 繰り込み理論迷走の原因 69
4.9.8 今後の方向 69

第５章 一般相対論 70
5.1 Einstein 方程式とは何か？ 71
5.1.1 計量テンソル 71
5.1.2 Minkowski の計量テンソル 71
5.1.3 計量テンソルの拡張 73
5.1.4 定数スケールの不在 73
5.2 Einstein 方程式 73
5.2.1 Ricci テンソル 74
5.2.2 重力場の Poisson 型方程式 74
5.2.3 一般相対論と重力理論の関係 74
5.2.4 等価原理 75
5.2.5 Einstein 方程式の定数スケール 76
5.3 Einstein 方程式の解 78
5.3.1 Schwarzschild の解 79
5.3.2 Friedmann 宇宙 79
5.4 一般相対論の予言 81
5.4.1 一般相対論による付加ポテンシャル 81
5.4.2 重力崩壊 82
5.4.3 水星軌道の進み 83
5.4.4 これまでの理論計算の予言 84
5.4.5 非可積分な付加ポテンシャル 85
5.4.6 一般相対論の今後への影響 85
5.5 現代物理学から見た一般相対論 86
5.5.1 一般相対論は何故，生き延びたか？ 86
5.5.2 理論模型の否定・肯定は常に困難 87
5.5.3 新しい重力理論 87

第６章 新しい重力理論 88
6.1 Dirac 方程式とポテンシャル 89
6.2 重力問題の方向性 90
6.2.1 Dirac 方程式と重力ポテンシャル 90

6.2.2 スカラー場によるポテンシャル 91
6.3 新しい重力理論 92
6.3.1 重力を含む Lagrangian 密度 93
6.3.2 重力場の方程式 94
6.3.3 重力場中の Dirac 方程式 94
6.3.4 重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限 95
6.4 新しい重力理論の予言 97
6.4.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ 97
6.4.2 地球公転周期のズレ（うるう秒） 98
6.4.3 水星の近日点移動 99
6.4.4 月の後退 99

第 7 章 宇宙論 101
7.1 これまでの宇宙論 101
7.1.1 天地創造とビッグバン模型 102
7.1.2 一般相対論による宇宙論 103
7.1.3 宇宙の膨張 104
7.1.4 一般相対論と重力理論の関係 105
7.1.5 今後の重力理論 106
7.2 新しい宇宙論 107
7.2.1 安定な素粒子と無限の過去 107
7.2.2 有限宇宙の大きさと力学方程式 108
7.3 無限宇宙の模型 109
7.3.1 有限宇宙の爆発 (宇宙ファイアボール) 109
7.3.2 前有限宇宙の残骸 110
7.3.3 銀河の融合と有限宇宙の爆発 110
7.3.4 無限の過去・未来と無限の空間 111
7.3.5 新しい宇宙像 111
7.3.6 宇宙の無限性と背景輻射 112
7.3.7 無限宇宙 (Mugen Universe) 113
7.3.8 無限個の銀河の宇宙 113
7.4 隣の有限宇宙 β の観測は可能か？ 115
7.4.1 光の Red shifts はない？ 115
7.4.2 強い Blue shifts の光は？ 115

第８章　今後の物理学 **116**
8.1 最近までの物理学：理論 116
8.1.1 何故，方向が間違ったか？ 116
8.1.2 現代物理は単純明解 117
8.2 最近までの物理学：実験 117
8.2.1 加速器の物理学 117
8.2.2 重力波の物理学 118
8.3 今後の物理学の方向 121
8.3.1 溶液の物理 121
8.3.2 量子生物 122

付録 A　物理用語の解説 **123**
A.1 運動学と動力学 123
A.1.1 運動学 (キネマティクス) 123
A.1.2 動力学 (ダイナミックス) 124
A.1.3 一般相対論はどちらか？ 124
A.2 古典力学 125
A.2.1 Kepler 問題 125
A.2.2 Newton 力学 125
A.2.3 慣性系と相対性理論 126
A.2.4 相対論的な力学の方程式 129
A.2.5 古典力学から量子力学の導出は不可能 129
A.2.6 Ehrenfest の定理 130
A.3 電磁気学 131
A.3.1 Gauss の法則 131
A.3.2 Gauss の法則の積分形 131
A.3.3 単極子が存在しない 132
A.3.4 Faraday の法則 132
A.3.5 Ampere の法則 132
A.3.6 電気双極子と磁気双極子 132
A.3.7 ベクトルポテンシャル (ゲージ場) 133
A.3.8 電磁波：直感的な記述 133
A.3.9 電磁波の発振機構 134
A.3.10 電磁場の量子化 135
A.3.11 偏極ベクトルの物理 136

A.3.12 フォトンの状態関数 137
A.3.13 フォトンの偏光 137
A.4 量子力学 138
A.4.1 状態関数 138
A.4.2 存在確率 (分布関数) 138
A.4.3 粒子性と波動性 139
A.4.4 Pauli 原理 140
A.4.5 水素型原子 141
A.4.6 クーロン力 141
A.5 相対論的場の理論 143
A.5.1 量子電磁力学 (QED) 144
A.5.2 強い相互作用 148
A.5.3 弱い相互作用 152
A.6 重力理論 154
A.6.1 重力相互作用 154
A.6.2 フェルミオンと重力の相互作用 155
A.6.3 重力場の量子化 156
A.7 素粒子と複合系 158
A.7.1 フェルミオン 158
A.7.2 ボソン 159
A.7.3 原子 160
A.7.4 分子 160
A.7.5 原子核 161
A.8 統計物理学 163
A.8.1 分布関数 163
A.8.2 エントロピー 164
A.8.3 スピンと統計 165
A.8.4 複合粒子のスピンと統計 166

付録 B 素粒子論の流行模型 167
B.1 大統一理論 167
B.1.1 統一理論 168
B.1.2 大統一理論模型 168
B.1.3 超新星爆発のニュートリノ 168
B.2 ゲージ理論 169

B.2.1 繰り込み群 169
B.2.2 Wilson の繰り込み群 169
B.2.3 漸近的自由 170
B.2.4 次元正則化 (Dimensional Regularization) 170
B.2.5 格子ゲージ理論 171
B.2.6 Wilson ループ 171
B.3 自然界の対称性 172
B.3.1 自発的対称性の破れ 172
B.3.2 ヒッグス機構 172
B.3.3 カイラル・アノマリー 173
B.3.4 超対称性 173
B.3.5 超弦理論 173
B.4 重力波 174

付録 C 一般相対論と重力理論 175
C.1 一般相対論は重力理論と無関係 175
C.2 無関係性の一般的証明 176
C.2.1 右辺の計量は誰が決めたか？ 176
C.2.2 右辺の $T^{\mu\nu}$ はどう計算されたか？ 176
C.3 一般相対論は物理で応用されていない！ 177
C.3.1 重力波の問題 177

付録 D Non-integrable Potential 178
D.1 Non-integrable Potential 178
D.1.1 Effects of Non-integrable Potential on Solution 179
D.1.2 Discontinuity of Orbit 179
D.2 Perturbative Treatment of Non-integrable Potential . 181
D.2.1 Integrable Expression 181
D.2.2 Higher Order Effect of Perturbation 182
D.3 Period Corrections from
General Relativity 183
D.3.1 Earth Revolution Period 184
D.4 Gravitational Wave 184
D.5 Predictions of New Gravity Model 186
D.5.1 Period Shifts in Additional Potential 186

D.5.2 Period Shifts of Earth Revolution (Leap Second) 187

付録 E Planet Effects on Mercury Perihelion 189
E.1 Planet Effects on Mercury Perihelion 189
E.1.1 The Same Plane of Planet Motions 190
E.1.2 The Motion of Mercury 190
E.2 Approximate Estimation of Planet Effects 192
E.2.1 Legendre Expansion 192
E.2.2 Iteration Method 193
E.2.3 Particular Solution 193
E.3 Effects of Other Planets on Mercury Perihelion 194
E.3.1 Numerical Evaluations 194
E.3.2 Average over One Period of Planet Motion . . 195
E.3.3 Numerical Results 196
E.3.4 Comparison with Experiments 196

付録 F New Derivation of Dirac Equation 198
F.1 Derivation of Lagrangian Density of Dirac Field . . . 198
F.1.1 Lagrangian Density for Maxwell Equation . . . 198
F.1.2 Four Component Spinor 199
F.2 Shape of Lagrangian Density 200
F.2.1 Mass Term 201
F.2.2 First Quantization 201
F.3 Two Component Spinor 201

付録 G 何故、一般相対論は無意味か？ 203
G.1 相対性理論 203
G.1.1 Lorentz 変換 203
G.1.2 Lorentz 不変量 204
G.1.3 Minkowski 空間 204
G.2 一般化の危険性 205
G.2.1 $(ds)^2$ の不変性 205
G.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味 205
G.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味 205
G.3 一般相対性理論 206
G.4 負の遺産 206

付録 H　運動系の時間刻みは遅れるか？ **207**
H.1　Lorentz 変換 207
H.2　間違いの思考実験 207
H.2.1　地上の系からみた電車の系の時間刻み 208
H.2.2　電車の系からみた地上の系の時間刻み 208
H.3　時間刻みの矛盾 209
H.3.1　思考実験の何処が間違いか？ 209
H.3.2　高速運動の慣性系の時計が遅れる事はない！ 209
H.4　時間に関する直感的な理解 210

第１章　あらすじと略解説

最初に，この本のあらすじを書いておこう．ただでさえ場の理論や一般相対論を理解することは相当大変だと思う．その上，ここでは新・旧２つの学説の論争模様を解説しているので，話は複雑で難しくなっている．まず，旧学説である一般相対論に対して，新学説の新しい重力理論が真っ向から対立している．この両者は互いに相いれないものである．また，旧学説である対称性の破れ・繰り込み・アノマリーなどの発散を含む理論模型に対して，新学説の理論は発散のない繰り込み不要の理論模型であり，この両者が対立している．

1.1　天動説学派と自然論学派

この２つの学説を主導する学派を「天動説学派 (旧学説)」と「自然論学派 (新学説)」と呼び，これら学派の理論論争という形にしてこの本のストーリーを語って行こう．前者は最近まで (あるいは現在も) 信じられてきた一般相対論を主軸とした「純粋理論派」で，理論至上主義の学説を掲げているものである．一方，後者は実験・観測を中心に理論模型を組み立てる「現象論派」で，自然の理解を最優先する学説が根幹となっている．

この本では両派の主張の解説を出来る限り平明にしかし丁寧に行うよう細心の注意を払っている．読者にはこの解説を読んで自分独自の理解をして頂くことが最も重要である．その結果として，この現代物理のお話を少しでも楽しんで貰えれば，この本の目的の大半は達成されるものとなっている．

学問上，様々な自然現象はシンプルな場の理論の言葉で基本的には正確に理解されることがわかっている．しかしながら，最近まで (あるいは現在も) 一般相対論の理論予測による様々な不可解な現象が物理的に取りざたされ議論されている．しかしビッグバン模型もブラックホールも一般相対論関係の現象は観測事実と照らし合わせると全ては幻想であった．そしてその代わりに，正統的で非常にわかり易い重力の理論が発見され，この理論により重力関係の観測量は悉く再現されそして理解されている．

一方，自然界における対称性の問題に関しても，自発的対称性の破れに端を発した理論模型の主張がこれまで長い間，物理の専門家を納得させてきた．しかしながら実験と照らし合わせるとこの自発的対称性の破れの模型は自然界を記述する理論とはなっていないことが示されている．さらに，この理論計算で用いられた近似法の検証がお座成りにされ，模型の枠内での整合性が乏しいことも知られている．その代わり，伝統的で古いがしかし正統的な場の理論により自然界が正確に記述されそして理解されることがわかっている．

1.1.1　天動説学派と自然論学派とは？

ここで「天動説学派」と「自然論学派」について簡単に解説しておこう．それ程，深い意味はないが，しかし前者は基本的に「思考実験」をベースに純粋に理論を構築することを主眼としている．このため，ともすると自然界とは遊離した理論構造になっている．一方，後者は自然界の記述を最大の目的としているため，自然界に起こっている現象を理解する現象論的な理論を構築している．この後者の理論体系は現在までのところほとんどの観測・実験事実を矛盾なく再現している．残念ながらこの二つの学説が共存することはあり得ないが，読者はその両派の主張をじっくりと吟味して，将来の科学の方向性を見出して頂きたいと思う．著者は後者に属する者ではあるが，しかし常に正確にそしてフェアに解説するよう最大限の努力をしている．

この本における天動説学派と自然論学派の定義を下記に書いておこう．これはあくまでも象徴的に使っているものであり，その言葉がその物理と深く関係しているというわけではない．

- 天動説学派：
一般相対論を信頼し宇宙は点から創生され，空間は膨張していると主張する．空間を実体と捉えていて，星が天空とともに動く天動説のように，光も物質もその軌跡は空間にくっ付いて運動すると考えている．

- 自然論学派：
自然現象を理解することが基本的な目的であり，その理論体系は実験・観測から構築される．相対性原理と対称性の保存 (Curie の原理) を理論の根幹としている．

1.1.2 宇宙のシナリオの解説

次に，宇宙のシナリオについても両派の主張について簡単な解説をしておこう．宇宙論は物理の中でもある意味でユニークな位置づけを持っている．宇宙論は宇宙全体というマクロスケールの問題を扱っているのであるが，しかしそのためには，星や銀河を形成する基本的な構成要素 (陽子，電子，原子核そしてフォトン) の間の相互作用を正確に理解していることが必須条件である．これはミクロスケールの物理であり場の理論がそれに対応する理論体系である．

- 宇宙のシナリオ

(1) 天動説学派 ：
ビッグバン模型により宇宙は点から創生されたとして，その後，宇宙空間は膨張し，物質もその空間にくっ付いて膨張するとしている．この基礎理論は一般相対論であるが，これは数学的な美しさを主に構築されたもので，自然界の記述と関係づけることは難しい理論体系となっている．またこの我々の宇宙が唯一の宇宙空間であるとしている．

(2) 自然論学派 ：
宇宙は無限に遠い過去から存在していて，空間的な広がりも果てしなく無限に大きいとする．それらの基礎理論は新しい重力理論であり，これは Dirac 方程式に組み入れられて構築されている．この重力場を入れた Dirac 方程式から得られたニュートン方程式は重力付加ポテンシャルを持ち，この力が自然界の様々な天体現象を正確に記述している．そして宇宙論はこの正統的な場の理論を基礎にして展開し構築されている．

1.1.3 自然界の対称性の解説

自然界の対称性についても両派の主張について簡単な解説をしておこう．物理学においては対称性が非常に重要な役割を果たしている．対称性の言葉を使うと自然界の理解が一段と深まるものである．一般的には，理論模型の対称性を利用することにより，模型をより深く理解する一助になっている．しかし自発的対称性の破れの概念は，その考え方が他の模型計算に利用されているため，対称性が自発的に破れていること自体が模型の本質になっている．このた

め対称性が自発的には破れていない場合，その考え方を利用して作られた模型は無意味なものとなる危険性をはらんでいる．

● 自然界の対称性

(1) 天動説学派　：
自発的対称性の破れの理論を仮定してヒッグス機構を取り入れ，弱い相互作用の理論模型を構築している．この理論が予言したベクトルボソンが発見されたため，標準理論と見なされている．従ってヒッグス粒子の発見が本質的であるが，しかしながら３０年以上に及ぶ探索実験にもかかわらず，いまだ未発見である．

(2) 自然論学派　：
自然界に自発的対称性の破れはなく，Curie の原理と矛盾する理論は採用していない．弱い相互作用の理論模型では最初からベクトルボソンの存在を仮定した現象論的な理論を構築する．この場合，弱い相互作用の基礎理論である CVC 理論をうまく再現している．さらにこの理論には物理的な観測量に発散はないことが証明されている．このためこの理論においては，繰り込みが不要であることが示されている．

1.1.4　天動説学派の学説と歴史

一般相対論が何故，ここまで信じられてきたのかその理由は良くわからない．一般相対論は古典力学的で決定論的な描像を基本としているので，確率論的な量子論とは互いに相容れないことは良く知られている．

● 量子力学論争 (ソルベイ会議)：　実際，アインシュタインは量子論に関するボーアとの有名な量子力学論争 (１９３０年ソルベイ会議) において，ある思考実験を考案して確率的な振る舞いの問題点を指摘したのである．これは彼が決定論的世界観を守ろうとしたことが主な理由であろう．しかし歴史的に言ってもこの論争はボーアの勝利で幕を閉じているし，またその後の無数の量子論の実験によってもこの決定論的描像は完全に否定されている．さらにこの事は「思考実験」から積み上げられた理論体系には限界があることを示している．しかし，現実には一般相対論の評価が下落することはなかったのである．

● 自発的対称性の破れ：　これと似た現象は場の理論でも起こっている．それは「自発的対称性の破れ」という奇妙な概念と関係している．対称性が自然に破れたら物理的におかしいと人々は思っていたし，これが Curie の原理に反することも知られていた．しかし何故かこの描像が専門家に受け入れられてしまったのである．この「自発的対称性の破れ」の理論は物理の一般常識に反していたし，実際の問題として，専門家による理論模型の解説が常に不明瞭であった．このため，論文で使われた近似法が誤った結論を導き出した最も重大な原因にもかかわらず，その間違いの事実を検証することなく，さらに近似法の問題が完全に無視されてしまったのである．結局，この学説においては，予言する結果の面白さが強調されすぎてしまい，自然界を理解することがおろそかにされてしまったのであろう．その上，この理論の考え方が他の理論模型に応用されてしまい，従ってこの自発的対称性の破れ概念を用いた理論模型は悉く間違いだらけの模型となってしまった．このため，この概念はその後の物理学の発展に負の遺産を残してしまったのである．

● 謎解き：　これらの奇妙な学説が数十年間も生き延びた事実は現代物理の謎である．様々な偶然が重なった結果であるとは思うが，同時に非常に不思議なことでもある．恐らくは，この両者に共通している「独創性」という表現が曲者であろう．アインシュタインも南部達もそのアイデアが「全く新しい概念」であることをことある毎に強調している．しかし「独創的」でも自然界と無関係では理論としては無意味なのだが，本人達がそのことに少しでも思い至ったという証左はない．しかしそれにもかかわらず，このような理論模型が生き延びたことはやはり大きな謎であり，この謎解きもこの本の副主題となっている．

1.2　宇宙と夢

これまでブラックホールやビッグバン模型と言った摩訶不思議な天体用語に対して，若い人ならずとも多くの人達がある種の「夢」を抱いていたと思う．新入生の面談でしばしば「私はブラックホールの研究をしたい」という夢を語る学生がよく見られたものである．しかしながら，このブラックホールの存在が今や完全に否定されている．

1.2.1　新しい夢

これらブラックホールなどに代わる新しい夢はあるのだろうか？その答えは Yes であり，その新しい夢についても解説する必要があると思う．それでは新しい夢とは何か？であるが，これは宇宙の広がりが本当の意味で無限であることと関係している．宇宙は果てしなく広がっていて，銀河もその数に限りはない．従って宇宙に無数の星達が存在していることは，もはや紛れもない事実である．その場合，地球のような生命体を持つ天体も限りなく多くあり，従って無限の宇宙全体では人類のような生命体もごくありふれた存在なのであろう．

幼い頃はほんの小さな地域が遊ぶ場所であった．それから幼年時代は町の大きさになり，大学では日本が活動場所になった．そしてその後，行動する世界が地球全体になって行った．その地球は太陽系の中にあり，太陽系は銀河のやや外側を周回しているがこの銀河には数千億個の星がある．我々の銀河はこの宇宙の中にあるが，最も近い隣の銀河は約２４０万光年の距離にあるアンドロメダ星雲である．これらの銀河が数千億個ほど集まって我々の宇宙を形成している．ところが，この我々のような宇宙が限りなく多く存在していることがわかっている．わかってもどうにも観測しようがないのだが，宇宙は (銀河は) 確かに果てしなく広がっている．限りのない宇宙における時間も空間も人間の理解を超えているが，それを別にして，地球からほとんど無限の距離および無限に遠い過去・未来に一気に外に飛んでみたら，あるいは仲間のような生命体の存在がきっとうろちょろしているのだろう ･････

1.2.2　地球外天体の生命体 (E. O. U.)

昔，E.T. (Extra-Terrestrial) が流行ったことがあるが，この E.T. について知りたいと思うのは一つの夢である．地球外天体に生命体が存在するか？という問題である．今の場合はむしろ E. O. U. (Extra-Our-Universe) とで

も言うべき存在である．時間・空間を考えれば，E.T. を「現実的な対象」と捉えることは難しい．すなわち，E.T. が地球に現れるかどうかという問題は科学の対象にはならない．

しかし E. O. U. を想像することは，始めから時間・空間を超えて想像する必要があり，その意味で，どのような形で存在しているのか，どういう環境ならばどのような生物が存在するのかなどの問題を検討することは，かなり現実的な科学的な問題といえる．この果てしない宇宙において，多彩な生命体がどのような形で生存しているのかという問題をいずれは量子生物 (電子の言葉) によって理解することは，限りなく興味深いものである．勿論，何かがわかったからと言って，何かが変わるということはないのだが ·····

● 生命体存在の条件：　それではどのような生命体が地球外で存在しているのであろうか？少なくとも現在わかっている範囲での生命体の存在の物理的な必須条件は水と一定以上の大きさの重力であろう．これは互いに関連していて，ある程度強い重力がないと星の表面で水が存在できないからである．そのある程度以上強い重力を持つ惑星では，一定以上の水が存在すれば海ができて，生物の存在の基本条件が整う．生命の起源を考える上で，海底火山の影響が最も重要と考えられているが，この火山活動のエネルギーは ^{238}U 原子核が一定以上あれば十分可能である．その後，葉緑体ができれば生物のエネルギー源は太陽の光になるため，安定した供給が受けられるものとなる．

しかしながら，これらの細かい条件等は残念ながら，この本で答えられる問題ではない．恐らくは，量子生物の理論体系が成熟して行けば，ある程度の回答は得られるものと期待はしている．

● 連星系の衛星の生命体：　この我々の銀河系を見ても，我々の太陽のように１個の恒星により太陽系を形成している場合よりも，連星系の方が実際に多いものと考えられている．確かに，木星の質量が今より数百倍あったとしたら，この太陽系は連星系になっていたことであろう．その場合，すなわち２個の太陽の下にある地球型天体にはどのような生命体が誕生するのであろうか？昼と夜が等分にある地球とは異なり，昼が多い状態の地球型天体では，恐らくは生命活動はより活発になっているのであろう．

1.3　進化論と一般相対論

ここでダーウィンの進化論とアインシュタインの一般相対論という２つの学説の方法論的な違いを述べておこう．この問題はこの本のあらすじとは直接は関係していないが，本の流れを理解するための一助になるものと思う．両者の学説がこれまでに様々な分野において人々に与えた影響は甚大であるが，しかしその形は全く異なっている．進化論は現代における物の考え方そのものに大きな影響を及ぼしているのに対して，一般相対論は天下り的な知識だけが一般に広まったものである．実際，ビッグバン模型やブラックホールについてその中身を質問しても，どの専門家もほとんど答えられていなかったのである．その意味で，ここで解説しているストーリーが理解できたとしたら，それはこの上なく楽しいものとなるであろう．それは知識だけではなく，考え方そのものにも関係している事柄と言えるからである．

1.3.1　共通点

この２つの学説には，歴史的に人々に大きな影響を及ぼしたという点で共通点がある．ともにそれまで存在していた古い学説と大きく異なった，全く新しい側面をもっていた．以下に具体的に見て行こう．

- 進化論：　進化論の場合は，当時の人々の常識的な通念とは矛盾する面が多く見られたため，その学説は識者には徐々に受け入れられて行った反面，様々な反論が多方面からなされた．また進化論は考え方そのものが非常に革新的であったことは確かであり，逆にあまりにも斬新過ぎて，専門家さえもその学説を受け入れることはそれ程容易ではなかったと言えよう．しかし進化論は様々な現象を積み重ねた上での理論模型であるため，個々の事象で問題点があったとしても，全体の理論自身が揺らぐ事はなかったと考えられる．

- 一般相対論：　一方，一般相対論の場合は古典力学を相対論化したという期待が込められていたため，それほど大きな反発は専門家から受けることはなかったであろう．確かに，一般相対論もそれまでにはなかった全く新しい描像を提案したことは間違いないが，ただ，その革新的な理論体系は自然界における自然現象から派生したものではない．このため，この新しい考え方はどの自然現象を理解しようとしたのかが明確ではないためこの理論を「受け入れるか受け入れないか」という二者択一の問題になってしまった．従ってこの理論の物理学上の検証が遅れてしまい，現在に至ったといえよう．

1.3.2 相違点

この２つの学説の本質的な相違点は科学に対する方法論そのものにあると言えよう．以下に具体的に見て行こう．

● 進化論： ダーウィンの進化論は彼が生物種を大量にそして緻密に調査することから生まれた学説であり，基本的には観測結果を集大成しようと試みた理論体系である．これは物理学で言ったら電磁気学の Maxwell 方程式に対応するものと考えて良い．

さらに，ダーウィンの進化論は確率的な様相を持ち，これは当時の西洋社会思想の基本でもあった決定論的な描像とは相容れない面が見られた．このため科学的には受け入れられても，社会的には多くの困難を伴っていた．進化論の方が確率的な側面を持ち，量子論に近いという点で興味を引くが，しかしこのことは，生物自体の基本構造が量子論的であることを考えれば，今となっては不思議なことではない．

● 一般相対論： 一方，アインシュタインの一般相対論はその出発点として「Gedanken Experiment (思考実験)」を選んでいる．これは科学としては非常に危険な手法であり，自然界の複雑さを考えれば，思考実験そのものが間違えている可能性が非常に大きいものである．

さらにこの理論体系は当時の理論としてはかなり斬新なものではあるが，しかし基礎になる考え方が「決定論的」であった．すなわち，一般相対論で計算可能な量である空間計量は時間の関数として決定されるとしている．これは量子論的な確率的概念とは方向性を異にしている．このため当時の社会的な思想と衝突することはなかったが，しかしながら決定論的描像は量子力学とは相容れない物理的な考え方であり，従って一般相対論は物理学の基礎理論とはなりえないものであった．

1.4　特殊と一般の相対性理論：言葉の解説

アインシュタインが特殊相対性理論という言葉とともに一般相対論という表現を用いたため，物理屋以外の人には多少の混乱を招いたことであろう．実際，この両者は同類だと考えている人達が予想以上に多いものである．ここでは，相対性原理，特殊相対性理論そして一般相対論について簡単な解説をしよう．但し，特殊とか一般という呼称は本当は適切な表現ではない．実際，特殊相対性理論は最も重要で一般的な変換式であり，特殊ではない．一方，一般相対論は系の変換とは関係なく，実は相対性理論ではない．ここでは，この辺の物理事情をきちんと説明しておくことにしよう．

1.4.1　相対性原理

物理学においてすべての出発点は相対性原理にある．この相対性原理は「どの慣性系でも物理的観測量は同じである」とする要請である．ここで慣性系の説明を簡単にしょう．それは例えば地球が止まっていると仮定して，地上の系を静止系としたとき，これが慣性系になっている．この地上で等速直線運動をしている電車の系もやはり慣性系をなしている．この場合，この二つの慣性系では，物理法則が同じになっていると要請している．実際，それが実験的にも成り立っていることは良く知られている事実である．

1.4.2　相対性理論

二つの慣性系では，物理法則が同じであるとしたが，その場合，どのような変換則を考えたらよいのであろうか？実は，この変換則の理論を定式化したのが相対性理論である．

● Galilei 変換：　ここで静止系の座標を $R(t,x,y,z)$ と書き，電車の系の座標を $S(t',x',y',z')$ と表記しよう．但し，電車は光速 c と比べて十分ゆっくり動いているとしている．具体的にはリニアモーターカーのスピードが約 140 [m/s] 程度なのに光速は $c=3\times10^8$ [m/s] であるから，この条件は十分充たされている．今，電車の系が $x-$ 軸方向に動いているとしよう，この時２つの座標系には次の関係式がある．

$$x = x' + vt', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t' \tag{1.1}$$

これを Galilei 変換という．これはニュートン方程式を不変に保つ変換式になっている．しかしながら，この変換式は Maxwell 方程式の形を不変に保つ事ができなかった．このため，相対性理論の変換式としては，Galilei 変換が一般的であるとはいえないことがわかる．

1.4.3 特殊相対性理論

S− 系の速度 v が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている．今度の場合，R− 系の座標を $R(t,x,y,z)$ とした時，S− 系の座標は $S(t',x',y',z')$ となり，時間は別のものになる．それは，どの系でも観測者が定義されているので，その観測者が固有の時間を持つことは当然である．相対性理論の本質はここにあり，慣性系では観測者がその系に存在できることが，相対性理論の最も重要なポイントである．そしてどの慣性系でも観測者が物理的な観測量を測定したならば，それらは必ず同じ量になっている．

● ローレンツ変換： この場合 S− 系が $x-$ 軸方向に動いているとして，ローレンツ変換は

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{1.2}$$

であり，$\boxed{\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$ と定義されている．この式は Maxwell 方程式が S− 系でも R− 系でも同じ形の微分方程式になるべきであるという要請を充たすことにより導出されている．この式を見てもわかるように，この変換式は $v<<c$ の時には，Galilei 変換に帰着される．従って，これは「特殊」ではない．むしろ，相対性理論としては Galilei 変換を含むという点では一般的な変換式となっている．

● ４次元空間： 相対性理論ではよく４次元空間という言い方をしている．これは空間座標の x,y,z と時間 t を一緒にして４次元空間を形成していると考えているからである．ローレンツ変換では確かに時間と空間を一緒にして，あたかも４次元の空間での変換のように書いているし，それなりに意味があることである．それは ローレンツ変換を考える時の数学的な空間は，そのベースとして４次元空間を考える事により，うまく記述できるからである．しかしながら，この４次元空間とはあくまでも数学的な空間であり，実際の空間とは直接の関係はない．例えば，よくベクトル空間を定義して，何次元空間という

言い方が良く使われるが，これも実際の空間とは無関係である．その意味で，相対性理論で使われる４次元空間という表現は，必ずしも物理の本質からすると正しい表現とはなっていない．時間は空間座標とは本質的に異なっている．

● $3 \oplus 1$ 次元空間：　実際，ダイナミックスを考えると，時間は空間とは全く異なった役割を担っている．ある物理量が時間によるかどうかと言う問題は，物理の中では本質的に重要である．ある物理量 (例えば角運動量) が時間に依らなければ，それは保存量となっている．また，場の量子化においては「場の量」が時間によるか依らないかが場の量子化の一つの条件となっている．それは場の量子化によって，それに対応する粒子が生成されたり消滅されたりする (時間に依っている) からである．

このため，物理学においては空間が３次元であり時間が１次元であることをはっきり示すために $\boxed{3 \oplus 1 \text{ 次元空間}}$ という書き方をよくするが，これが最も適した表現法である．相対性理論はキネマティックスなので，時間と空間を一緒にしても特に問題が生じることはないため，この４次元空間という言い方が定着してしまったのである．

1.4.4　一般相対論の未知関数

相対性理論は運動学であり，自然界を記述する物理法則とは直接は関係していない．もう少し正確にいうと「物理の基本方程式は相対論的な変換に対して不変である」ことが必要であり，相対性理論は運動方程式が満たすべき条件となっている．これに対して一般相対論はこれとはまったく異なっている．アインシュタインは時空を測るために計量テンソルを導入して，この計量テンソルに対する方程式を構築している．そしてこの方程式に関連する物理を一般相対論と呼んだのである．彼が何故「相対性理論 (Relativity)」という言葉にこだわったのかは良くわからない．一般相対論の方程式は計量テンソルに対する方程式であるため，慣性系における相対性の現象はどこにも現れていない．これらのことからみても明らかなように，一般相対論はある系ともう一つの慣性系との関係を扱う相対性理論とはまったく無関係である．従って，一般相対論という言葉の導入はどう見ても不適切としか言いようがないものである．

1.4.5 計量テンソル

それでは一般相対論の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とは何であろうか？これは最初は Minkowski 空間の定義から出発したのであろう．Minkowski は４次元空間の微小距離の２乗 $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$ を定義したが，これは $(ds)^2$ がローレンツ変換に対して不変なためである．ここでこれをより一般的に書くために，$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz)$ を導入して $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ として計量テンソルを定義しよう．この場合，$g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり，これは Minkowski の計量である．

● 計量テンソルの拡張： 一般相対論の方程式ではこの計量テンソルを拡張して，これが座標の関数であるとして $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(t, x, y, z)$ と書いている．この場合，一般相対論の方程式は簡単な式であり，それを言葉で書くと

$$\boxed{g^{\mu\nu} \text{ で書かれたテンソル量} \ = \ \text{星の質量などから作られたテンソル量}}$$

というテンソル (行列) 方程式となっている．左辺は Ricci テンソルという微分幾何による量が入っているが，それら全ては計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれているので左辺は計量テンソルだと考えて十分である．従って，この方程式は星があると計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が影響されるとしている式である．しかしこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の変化分がわかったとして，それは物理的に何を意味するのであろうか？計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が Minkowski の計量からずれたら，それが物理的にどういう効果があるのか，良くわからない．この一般相対論では，こういう基本的な問いかけが欠如している．

● 計量テンソルの座標： それではこの計量テンソルにでてくる座標 (t, x, y, z) はどの座標系のものなのであろうか？これはやはり慣性系を定義したときの座標系なのであろう．物理学にとって座標系は物理現象の表現空間であり，それをきちんと定義しておく必要がある．自然現象の記述はこの座標系を表現空間としており，その表現空間をいじったら物理法則自体もゆがんでしまい，もはや収拾がつかなくなることは自明の理である．

● エネルギー・運動量テンソルの座標：　一般相対論の方程式において左辺は前述したとおり，計量テンソルから成り立っているテンソル量である．一方，右辺はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる量で本当は古典力学で定義するには無理がある量である．しかし一般相対論ではそれも特に気にすることはなく，エネルギー・運動量テンソルは星の質量分布関数を用いて書かれている．

● 質量分布記述の座標系：　ここで深刻な問題 (矛盾点) にぶつかることになる。方程式の右辺にある質量分布の座標系はどの座標系なのであろうか？質量分布があると座標系の計量が変化を受けると一般相対論の方程式は主張しているが、この場合、元々存在していた質量分布の座標系はどうなるのかを考える必要がある。特に質量分布が形成される座標系と変更を受けた座標系の因果関係も含めて物理的な矛盾がないように検証する事が重要である。

1.4.6　一般相対論と重力場

一般相対論は重力の理論だと一般的には考えられているが，これはアインシュタインがそのように主張したからであろう．しかし以下に見るように，一般相対論を重力の理論と関係つけることは不可能である．重力場 ϕ_g に対する Poisson 型方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi_g = 4\pi G_0\rho$$

である。この方程式は

$$g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g$$

とおくと確かにアインシュタイン方程式から得られる事がわかっている。このように、重力場 ϕ_g に対する Poisson 型方程式が得られたことから一般相対論が重力場と関係しているという主張がこれまでまかり通っていたのであろう。そして，弱い重力場ではこのように置くことができると仮定して一般相対論は重力理論であると考えられてきた．

しかし，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は方程式の未知関数であり，何故，それが重力場 ϕ_g と関係つけられてこのようにおけるのかという議論はなされていなく，またその理論的な根拠を見つけることはできていない．さらに進んで，$g^{00} \simeq 1-2\phi_g$ とおくと重力場が斥力になってしまうことがわかる．この不定性からみても「一般相対論は重力理論である」という主張を理論的に正当化することは不可能であることがわかる．

1.4.7 Maxwell 方程式 と Einstein 方程式

Einstein 方程式の問題点を物理的により深く理解するためには、Maxwell 方程式と比較し、検討して見る事が大切である。まずは両者の方程式を書いておこう。Maxwell 方程式と Einstein 方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = ej^\nu \qquad (\textbf{Maxwell 方程式}) \tag{1.3}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \qquad (\textbf{Einstein 方程式}) \tag{1.4}$$

と書かれている。Maxwell 方程式の左辺はベクトルポテンシャル A^μ で書かれていて、これが未知変数である。一方、Einstein 方程式の左辺は Ricci テンソル ($R^{\mu\nu}$) とよばれる量で書かれているが，この Ricci テンソルは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の２回微分で書かれている．従って、左辺はすべて計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれていて、これが未知変数である。問題は右辺に現われている物理量 (j^μ と $T^{\mu\nu}$) がどのように計算され、求められているかと言う事である。

● Maxwell 方程式の右辺はカレント j^μ ：
まず、Maxwell 方程式の場合を考えてみよう。この場合、右辺は電流密度 j^μ で書かれている。従ってこの方程式の物理的な意味は「電流密度があるとベクトルポテンシャルの形が決まる」と言う事であり、未知変数は勿論、ベクトルポテンシャル A^μ である。

それではこの場合、その電流密度 j^μ はどのように決定されるのであろうか？これは自然界を理解するためには最も重要なポイントであるが、この電流密度の求め方はきちんとわかっている。電流密度 j^μ を生み出すのは多体の電子の運動である。この運動を記述するのは Dirac 方程式であり、従ってこの Dirac 方程式を解けば、基本的には電流密度が決定されることになっている。現実問題としては、電子の運動は大方、非相対論的なので、この場合 Dirac 方程式は Schrödinger 方程式に帰着されている。よってこの Schrödinger 方程式を解けば電流密度 j^μ が求まることになっている。但し、この電子の多体系は散乱問題を含んでいて、非常に複雑な多体問題であり、勿論、簡単に解くことができるわけではない。しかしながら、この問題において、概念的な問題点は何処にも見当たらない。

● **Einstein 方程式の右辺はエネルギー・運動量テンソル：**

一方、Einstein 方程式の場合、右辺は星の分布関数により求められたエネルギー・運動量テンソルで書かれている。従って星の分布関数が求められると計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が決まることになっていて、この $g^{\mu\nu}$ が未知変数である。この場合、右辺は力学変数で書かれているのに、左辺は座標系を表す量になっている。従って、この等号が成り立つと言う物理的な意味は不明である。これは、Einstein 方程式の深刻な問題点の一つでもある

● **星の分布関数を決める方程式：**

しかしここではこの Einstein 方程式の等号を認めたとして話を進めて行こう。ここで問題となるのは、星の分布関数を決める方程式は何であるかと言う事である。これは明らかで、重力ポテンシャルが入っている Dirac 方程式が対応する基礎方程式となっている。現実的には、これを非相対論に近似して、さらに古典論近似をして求められた力学の方程式 (重力ポテンシャルを含む) が星の分布関数を決める多体の方程式として充分よいものである。すなわち、Einstein 方程式の右辺のエネルギー・運動量テンソルを決めるためにはどうしても重力場がある場合の古典力学の運動方程式を解く必要があると言う事である。

● **計量テンソルは重力場とは無関係：**

この事から明らかなように、計量テンソルが重力場と関係すると言う事はそもそもあり得ないことである。右辺の分布関数を決めるためにどうしても重力場がある場合の古典力学の運動方程式を解く必要がある。そしてその結果として右辺が決まり、Einstein 方程式の解として計量テンソルが決定されている。従って計量テンソルを重力場と関係づけることは不可能である。この事は Einstein 方程式が因果律を破っている問題と密接に関係している。

1.5 繰り込み理論

現代物理学を解説しようとすると，一般相対論よりもはるかに重要な理論体系が一つあり，その説明を避けては通れないものとなっている．それは繰り込み理論と呼ばれている理論形式であり，同時にこれは専門家にとっても，最も難しく且つわかりにくい理論体系として良く知られている．勿論，ここでこの繰り込み理論をその基本から解説することは不可能であり，またこの本が目指している方向でもない．しかしながら，繰り込み理論を少しでもわかり易く解説できたとしたら，それは物理に関する読者の知識を確実にふやし，またその理解を深めることにもなろう．さらに，繰り込み理論について直感的にそれが大雑把にどういうものなのかがわかれば，それだけでもこの本を理解するためにかなりプラスとなることは間違いない．ここでは繰り込み理論が物理学上どのような役割を果たして来たかをストーリー形式で語って行こう．著者にとって，この繰り込み理論は天動説学派の主張と自然論学派の考えとの間に位置していて，しかし自然論学派により近いという，そのような理論形式であると考えている．しかしながら，ここの解説はどうしても専門的な用語が氾濫しているので，大半の読者にはこれは読み飛ばしても良いところであろう．

1.5.1 何故，繰り込み理論か？

現代の物理学はすべて，場の理論の言葉で書かれている．この場合，観測量の計算手法としては摂動論という近似方法しか計算のやりようがないことがわかっている．これはどの模型も厳密に解くことはできないからであるが，このことは４つの力 (量子電磁力学，量子色力学，弱い相互作用，重力) の全てに当てはまることでもある．これまで最もよく研究されている理論体系が量子電磁力学 (QED) である．この QED で繰り込み理論を展開した人達が朝永やファインマン達で彼らはその功績によりノーベル賞を受賞している．

- 無限大： この QED において摂動計算を実行すると，ある種の物理的観測量が無限大になってしまう．この時，この無限大に対して，その原因を理論形式の中の問題として捉えるか，それとも理論形式は問わないでむしろその無限大をうまく処理する方法を考えるかで大きく道はわかれている．朝永達は後者を選び，その無限大をうまく処理して波動関数の中に押し込めてしまう手法を確立して，実際に観測量を計算できることを示した．これが繰り込み理論であり，電子の磁気能率補正の計算結果は実験と良く合っている．

1.5.2　自己エネルギーの発散：電子

場の理論において電子やフォトンの自己エネルギーを計算するとそれは無限大になっている．しかし，実は古典電磁場においても電子が作る自己電場のエネルギーを計算すると，これが無限大になることは電磁気学の教科書でも良く知られている．この電子自身が作る電場のエネルギーが発散して無限大になっていても，これが観測量ではないことからそれを特に問題視することはない．ところが，場の理論の教科書において人々はこの自己エネルギーの発散を常に問題視していて，これを何とか処理しようとする試みが教科書では紹介され，解説されている．

● 質量の繰り込み：　特に，質量の繰り込みという物理的には意味がないと考えられる問題も議論されている．尤も，今，繰り込み理論を勉強している物理の院生からしたら「質量の繰り込みのどこがいけないのですか？」と質問されそうである．これに答えるには，まず,「電子の自己エネルギーはある物理過程を計算した結果」であることを説明することになるだろう．電子がフォトンを放出して直ちにその同じフォトンを吸収するという過程である．その後，人々はこの自己エネルギー計算の結果をまた元の Lagrangian 密度に足す作業をしている．しかしある物理過程として計算した自己エネルギーを Lagrangian 密度に足し算するとは，物理的にどう言う意味があるのだろか？実際，計算結果を Lagrangian 密度に何故，付け加えてよいのかという物理的な理由を述べることは誰もできていない．人々は２次の摂動計算ででてきた無限大を打ち消すために，カウンター項として導入すると説明するが，自己エネルギーが無限大になっても誰も困らないのである．しかし人々はそれが繰り込みの手法であると主張しているが，しかしこれは古典電磁場における自己電場のエネルギーの場合を考えて見れば，かなり無理な計算過程であると言えよう．このことを理解すれば繰り込みの処方箋自体がそのトリックとして数学的には良いのかも知れないが，物理的には正当化できない作業を重ねていることがわかる．

● 電子の磁気能率補正：　実際には，この自己エネルギーは観測量ではないので，全く気にする必要はないし，放って置いても問題になることはない．しかしながら，電子の磁気能率補正を QED の３次の摂動計算で実行すると，この補正計算は Log 発散して無限大になってしまうのである．これは観測量なので発散したら問題であり，この発散を処理するため繰り込み理論が考案されたのである．その詳しい手法をここで解説はしないが，直感的には磁気能率補正の計算で出てきた無限大が電子の自己エネルギーと同じ形であることを利用して，この無限大を電子の波動関数に押し込めて (繰り込んで) しまう方法が

工夫された．しかし無限大は残っており繰り込み理論は「禁じ手」でもある．

● Dirac の主張： この繰り込み理論は一見，問題なさそうに見える．しかしながらこの計算を何度も検証して見るとその手法があまりにも人工的すぎてやはりどこかがおかしいと感じるものである．Dirac はこの繰り込み理論に対して，観測量に発散が出てきたらこれはその定式化のどこかに誤りがあるはずであるという主張を繰り返していた．１９８１年に出版された AIP 会議報告書 (恐らくは彼の最後の論文) の中で，彼はかなり厳しい口調で繰り込み理論の問題点を指摘している．しかし，現実には人々はこの繰り込み理論を受け入れてきたのである．その理由の第一として，この手法の技術的な取り扱いの簡単さがあげられるであろう．さらにそれに加えて，この理論計算が電子の磁気能率補正の実験値を良く再現していることも人々が納得して受け入れた大きな理由でもあろう．

1.5.3 自己エネルギーの発散：フォトン

同様に，フォトンの自己エネルギーも発散しているが，この場合の発散は電子の場合とは全く異なっている．電子の自己エネルギーの場合 Log 発散であったが，フォトンの場合は２次発散の形で無限大になっている．このため繰り込みの理論形式の観点からすれば，この発散は波動関数に繰り込むことができない形式になっていた．

● ゲージ条件： ここで人々はこれを何とか繰り込み理論の形式に取り込もうとしたため，物理的に非常に無理がある「ゲージ条件」をフォトンの自己エネルギーの計算式に課したのである．常識的に考えて見れば，自己エネルギーが発散しても別に困ることはないし，また自己エネルギーの計算結果を Lagrangian 密度に付け加えるには物理的に無理があるので，このような条件を考える理由はどこにもない．その上，このゲージ条件は物理的にも数学的にも間違いであることがわかっているが，どういうわけか，この強引な繰り込み手法が人々に受け入れられたのである．

● 繰り込み理論の迷走： 現実には，このあたりから繰り込み理論の迷走が始まって行く．そして，一度受け入れられた概念はそれが勝手に一人歩きしてしまい，それを是正するためには膨大な努力が必要であった．その是正とは「摂動計算においては物理的な観測量にのみ意味がある」という基本事項をきちんと認識することである．この場合「真空偏極に関係する物理的観測量とは何であろうか？」という問い掛けこそが最も重要である．現実には，これまでこの

問題はほとんど議論されなかったのである．しかし最近になってこの問題が議論され始め，真空偏極に関係する物理的観測量である三角形図の計算が再検証されたのである．これらの計算は非常に面倒ではあるが，しかしそれ程難しくはなく，その結果は明解であった．以下にその解説を簡単に記しておこう．

● 三角形図：　フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，特に気にする必要はないということは前述した通りである．しかしながら，自己エネルギーに関連した観測量の計算 (真空偏極を含むもの) が発散していたら，これは繰り込みを考える必要がある．この物理的な過程は三角形図と呼ばれていて，１９６０年代後半には計算が行われていた．最初に三角形図に関する正確な計算を実行したのが西島先生であり，実際，π^0 中間子が 2 個のフォトンに崩壊する崩壊幅が計算されていた．そしてこの計算結果は有限値で求まっていて，さらに実験値を正確に再現していることが示されていた．これは理論的には最も見事な計算の一つであった．

● カイラル・アノマリー：　ところが，その直後に Adler 達は三角形図の計算で重大な計算ミスを犯した論文をアメリカの有力雑誌 (Physical Review) に発表したのである．しかしながら当時，その計算ミスが問題視されることもなく，どういうわけかこれが人々に受け入れられてしまった．その後はむしろ Adler 達の仕事の方が評価されてきたが，これは彼らが非常に目新しい概念を発表したからであろう．彼らの計算では１次発散の無限大が見かけ上あらわれているのだが，それを正則化することによりカイラル・アノマリーという方程式を「発見」してしまったのである．これは「通常成り立っている保存則が正則化によって壊れた」と主張した方程式であるが，このようなことが容認されれば，それは物理の理論がその信用を失うことになるだけのことであった．実際，このためこの分野には大変な混乱が生じてしまい，例えば経路積分によるアノマリーの計算などという物理的に意味不明の論文さえも発表されてきたのである．その上，あるいはそれ故，西島先生の論文はそれ以降，完全に無視されてしまって今日に至っている．いずれこのアノマリーの主唱者達は何らかの責任を取るべきことになるであろう．

● 真空偏極の観測量は有限：　実際には，三角形図の計算を正確に実行すると，すべての三角形図は有限で求まり，1 次発散も Log 発散もなく，無限大はどこにも現れないことが証明されている．従って，このフォトンの自己エネルギーに関連した真空偏極を含む物理過程はその観測量がすべて有限であるため，繰り込みは不要であった．これはこの理論形式が極めて健全であることを示している．そしてこのことは Dirac の主張そのものでもあった．

1.5.4 繰り込みは必要か？

これらのことより，フォトンの真空偏極に関する物理的な観測量はすべて有限で求まることがわかった．従って，フォトンの自己エネルギーに対して繰り込み理論を考える必要性は全くないことが明らかになった．今の場合，物理的な観測量で，その計算結果が無限大になるのは電子の磁気能率補正のみである．従って，この問題を検証することは極めて重要ではあるが，ここでは簡単に解説するのみとしよう．

● 電子の磁気能率へのフォトンによる補正： 電子の磁気能率への補正の計算に関しては，まず QED の範囲内での計算を考えることになる．この計算はフォトンによる３次の摂動論に従っていて，この計算を実行すると無限大が出てきてしまう．しかしこれは観測量なのでこの無限大を何とか処理する必要がある．このため，この発散を波動関数に押し込めてしまう繰り込み理論が提案されたのである．実際，この手法により有限の磁気能率が求められ，またその結果は実験値を良く再現している．しかしながら，繰り込みにより発散をうまく取り除くことはできたが，しかし補正計算自体は Log 発散しているという事実は残っており，この点をしっかり認識することが重要である．

● 電子の磁気能率への重いベクトルボソンによる補正： この QED 計算に加えて，弱い相互作用まで入れた場合を考えると，重いベクトルボソン (Z^0 ボソン) による３次の摂動計算も必要となってくる．実際，この重いベクトルボソンによる電子の磁気能率への補正を計算すると，驚いたことに無限大はどこにもでてこなくて，計算結果は有限なのである．しかも，この計算値は非常に小さいものであり，電子の磁気能率補正の実験値とは矛盾しない値となっている．従ってこの補正計算の場合には繰り込みは不要である．これはこの理論形式の健全さを意味している．

● 無限大はフォトンによる磁気能率補正のみ： これはどういうことであろうか？無限大があるから繰り込みが必要であるとこれまで人々は考えてきたのであるが，物理的な観測量ではフォトンによる電子の磁気能率補正にのみ Log 発散の無限大がでている．この重いベクトルボソンによる３次の摂動論の計算手法はフォトンの場合とほとんど同じであるが，それにもかかわらず，重いベクトルボソンによる補正計算の結果は有限であることが示されたのである．

● 発散はフォトンの伝播関数のせい？： この場合，フォトンによる補正計算にのみ Log 発散があるとしたら，最初に疑うべきものは何であろうか？この計算を自分でやっている人にはすぐにわかることであるが，フォトンと重いベ

クトルボソンの大きな違いはその伝播関数にある．従って，やはりフォトンの伝播関数が本当に正しいのかどうかという極めて初歩的な問題を疑わざるを得ないのである．実際，通常の教科書に書いてあるフォトンの伝播関数はファインマンの伝播関数と言われるものであるが，このファインマンの伝播関数が問題を含んでいることはすでに１９６０年代には良く知られていたことである．実際，幾つかの場の理論の古い教科書では，この問題をかなりしっかり議論し検証している．しかしながらこれらの問題はまだ完全に結着されたとは言い難いものも含んでおり，また若手研究者に取って最先端の研究課題でもある事から，ここではこれ以上の議論は行わないことにしよう．

1.5.5　西島先生のコメント

昔，新しい重力理論を発展させせようとして壁にぶつかった時，西島先生に議論して頂いたことがある．この時，先生から「重力における繰り込みの問題を考えなさい」というコメントを頂いた．このため，繰り込み理論の関係論文をくまなく調べてそれらを検証したものである．まずは１９３０年代の論文からチェックを始めたのであるが，特にハイゼンベルグ達の論文は非常に面白く，示唆に富んでいて教育的でもあった．ところが，１９６０年代のある論文を読んでいた時，どうしてもこの論文が理解できなかった．内容も何を言っているのかがわからなく，完全にお手上げの状態であった．

- 非可換ゲージ理論の繰り込み可能性？：　それはロシアのグループの１９６７年の論文であった．これは非可換ゲージ理論での繰り込み可能性を証明したと主張している論文である．ところが，どのようにチェックしても理解できなく，これでは困ると思い西島先生にそのことを質問したのである．所が先生は「自分もあの論文はわからない」と答えられたので仰天したものである．西島先生は当時すでに場の理論を最も深く理解している物理学者として，その名は内外でよく知られていたのである．これは非常に深刻な問題であった．それは，この論文の主張が正しいと人々は信じていたので，非可換ゲージ理論による弱い相互作用模型の繰り込み可能性を検証する必要がないと思い込んでいたのである．実際，ほとんど誰も全く議論することなしに，非可換ゲージ理論の繰り込み可能性は問題ないと信じきっていたのである．

- 非可換ゲージ理論は摂動論が不可能：　その後，詳しく検討して見たところ，非可換ゲージ理論では繰り込みどころか，そもそも摂動論が定式化できないことが証明されていたのである．それは非可換ゲージ理論が持っている固有

の性質と関係している．非可換ゲージ理論ではその構成要素である粒子のカラー電荷がゲージ依存であるため，それらの粒子が観測量にはなっていないということであった．このため，摂動論を展開しようとしても，そのベースである自由場が存在しないため，摂動計算が全くできないということであった．場の理論で摂動計算ができないということは，事実上，観測量も計算できないということを意味している．最初に述べたように，場の理論は厳密に解くことができないため，どうしても摂動論に頼らざるを得なかったのである．しかしこの摂動論が使えない状況では，無限大が出てくる場所もなく，繰り込み以前の問題であることがわかったのである．

● 非可換ゲージ理論の粒子は観測不能： 実は，強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) は非可換ゲージ理論である．このためその構成粒子であるクォークとグルオンは観測量ではなく，実験的にも発見されていない．一方，弱い相互作用である Weinberg-Salam 理論もやはり非可換ゲージ理論である．従って，この理論模型の基本粒子であるベクトルボソン ($W^{\pm},\ Z^0$) は観測量ではない．このため，これではどう計算したらよいかわからないはずであった．実際問題としては，彼らは非可換ゲージ理論模型におけるゲージ対称性を Higgs 機構と言う名の下に勝手に手で破って，ゲージ理論ではない模型にしている．そして最終的には非可換ゲージ理論とは全く関係ない理論形式を求めている．これは「厳密に解いたらベクトルボソンは観測量ではないが，近似をしたためにうまく観測量になった」と主張している事に対応している．「厳密に解いたら観測量なのだが，近似をしたために観測量ではなくなった」と言う事は，勿論，起こり得るが，その逆はありえない論理である．

1.5.6 重力の繰り込み問題

新しい重力理論は質量のないスカラー場で書けている．このスカラー場による重力理論は，恐らくこれまでにも多くの人達が研究してきたものであろう．ここでこの新しい重力理論を詳細に解説はしないが，何故，この理論が成功したかを簡単に説明しよう．それは繰り込み理論と密接に関連している．

● 繰り込み可能性： 長い間，物理屋は場の理論模型における繰り込み可能性を非常に気にしてきたといえる．それは，QED における繰り込み理論の成功に大きく依っていよう．従って，何か新しい模型を作ろうとする時，常にその模型の繰り込み可能性をまず第一に検証する必要があると考えていた．さらに，QED がゲージ理論であり，ゲージ条件という非常に奇妙な拘束条件を

課したことで繰り込みが可能になったと人々は思い込んでいた．現実には，前述したように観測量において奇妙は発散が見られたのはゲージ理論のみであった．いずれにしても繰り込み理論はその観測量をどのように再現するかという問題であり，繰り込みが先にあるわけではない．従って，場を量子化しなければ，繰り込みの問題はそもそも発生しないのである．

● ゲージ理論以外の模型：　これまで，重力理論もゲージ理論であるべきであるという一種の強迫観念が大半の物理屋にあったと思われる．ところが，ゲージ理論で常に引力をだすような模型は存在しないことはよくしられていた．このため，重力理論の構築 (発見) が遅れたのであろう．しかし力が常に引力である場の理論模型としては，その最もシンプルな模型がスカラー場であるのは周知の事実でもあった．

● 場の量子化が不要：　量子場の理論では場を量子化せざるを得ない現象があり，このため例えば，電磁場の量子化を行ったのである．弱い相互作用で重要な役割をする重いベクトルボソンの場もやはり量子化しない限り，自然現象を理解する事はできない．しかしそれではすべての場を量子化するべきかというと，それは必ずしもそうではない．場を量子化するべきかどうかの判断は実験からの要請を除いてはそれ程単純ではなく，自然界の要請がある場合に限って場の量子化を実行している．但し，電子や陽子などのフェルミオン場については，常にその場を量子化する必要がある．これはフェルミオンに関して「パウリ原理」が成り立つことが必要であり，この原理はフェルミオン場の量子化で保証されているからである．

● スカラー場の模型：　重力場の場合，それが常に引力であるという実験事実を再現することが最も重要である．その場合，場の理論模型としてはスカラー場でなければならない．さらに，重力が長距離力であることから，そのスカラー場の質量はゼロであることが条件である．これ以外には実験的な要請がなく，従って場の量子化は理論的にもその必要性はどこにもなく，むしろ古典場のままの方が理論内の整合性が取れている．従って，重力場をクーロン場と全く同じように取り扱えばよく，理論的には極めてシンプルである．さらにスカラー場であることから Dirac 方程式にポテンシャルとしてどのように入れたらよいのかという長年の問題も解決されている．さらに重力ポテンシャルの強さは相互作用する両者の質量に比例しているという実験事実は，スカラー場ならば場の理論の質量項そのものであり，非常に自然な形で定式化されている．これが新しい重力理論であり，現在までに知られている重力関係のすべての観測事実を非常にうまく再現している．

第２章　天文学と宇宙論

現代物理学がこれまでどう発展し，これからどのように進展しようとしているのかを理解するためには，科学を歴史的に見ることから始めるのが一番の近道であろう．人間の知恵の一つが科学という形で結実しているが，それはしかし長い年月を経て少しずつ進歩してきたことでもある．

ルネッサンス以前における科学は主に天文学であった．古来，太陽と月の運動は最も重要なものであったが，それは農作物を作るためには必須の知識として積み重ねられてきたものである．これは特にメソポタミヤ・エジプトの古代史にその劇的な進展が刻まれている．

現代物理の基本構造は１８世紀になって具体的に作られ始めたが，この基礎となったのは天文学における様々な観測事実である．そしてそれらの天文現象がニュートン力学という理論体系によって簡単明瞭に記述されることが明らかにされたのである．

2.1　天文学

科学の歴史は天文学から始まったと言えよう．実際，紀元前３０００年頃には太陽の運動 (現実には地球の自転・公転) をかなり正確に理解していた (太陽暦)．また，紀元前３世紀には地球の半径がギリシャ人のエラトステネスにより２割程度の誤差で測定されている．当時すでに，ギリシア人の間では地球がまるい球体であるという考えが一般的であったと言われている．

それからルネッサンスまでしばらくは，天文学の進展はあまり見られないで推移したが，ガリレオ・コペルニクスなどが地球の自転を明らかにし，さらにケプラーが地球の公転運動を説明する法則を発見するにおよび，天文学は一気に天体物理学へと進歩して行くことになる．そして「微分方程式によるニュートン力学」をニュートンが発見するにおよび，天体現象は力学の方程式を解くことにより，正確に理解されることになったのである．

2.1.1　これまでに観測された天体現象

これまでの観測で確実にわかっている天体現象を羅列的に書いて見よう．但し，そこに出ている数字は大雑把なものであり，それ程深い意味はない．

- 地球は球であり，その半径は約６４００ km である
- 地球は太陽の周りを公転していて，その平均距離は光速で約８分掛かる
- 月は地球の衛星で，その公転運動の平均距離は約３４万 km あまりである
- 太陽系は１０個近い惑星があり，それらはほぼ同じ平面上を周回している
- 太陽系は我々の銀河系中心からやや外側を周回している
- 我々の銀河系の直径は約１０万光年である
- 銀河系は数千億個の太陽系から成り立っている
- 最も近い銀河系はアンドロメダ銀河で，約２４０万光年の距離にある
- アンドロメダ銀河の直径は約１２万光年である
- アンドロメダと天の川銀河は３０億年程のちには衝突・融合する
- これら銀河系が千億個程ほど集まって我々の宇宙が形成されている
- 我々の宇宙の広がりは約１００億光年程度である
- この宇宙には背景輻射 (2.7 K) が大量に存在している
- 我々の宇宙膨張のエネルギー源は重力ポテンシャルエネルギーである

この他にも勿論，無数に多くの観測事実が報告されているが，これらが物理学の基礎に関係する天体現象であり，またある程度，確実にわかっていると考えられているものである．これらの情報を基にして，天文学から宇宙物理学を作ってゆくことになる．宇宙物理学を作るには，星の運動を記述できる法則が必要となる．Kepler の法則は地球の公転を正確に記述できてはいるが，それではその法則はどのように求められたのかと言う問題を解決する必要があり，それが次の課題となる．そしてその宿題はニュートンによって完全に解かれたのである．宇宙物理学を取り扱う場合，大半はニュートン力学による微分方程式をきちんと解く事により正確な情報を得ることができる．但し，星の生成や宇宙の成り立ちを議論する場合は場の理論における４個の相互作用とそれに関連する方程式を正確に理解していることが条件となっている．

2.1.2 地球の半径の測定

紀元前３世紀において地球の半径がギリシャ人によって測定されているが，その測定法を簡単に解説しておこう．これは当時エジプトの大都市であったアレクサンドリアにおいて毎年の夏至の日の正午に，人の影ができることを人々は知っていた．しかしそれから千キロ近い真南の都市では影が全くできないことに気がついたことが地球の半径の測定が可能になった原因である．これは真南の都市では太陽がその都市の真上にきていることに対応している．従って，地球が丸いことがわかっていればアレクサンドリアでの影の長さとそのもとの長さの比をとれば，地球の半径が大雑把にわかるというものである．ちょっとだけ式で書くと人の身長を d，影の長さを ϵ として，さらにアレクサンドリアと真南の都市の距離を ℓ とすれば地球の半径 R は大雑把に $\boxed{R \simeq \ell \frac{d}{\epsilon}}$ で与えられている．具体的な数値を見るために，地球の半径は $R = 6400\ \mathrm{km}$，真南の都市と アレクサンドリアの距離を $\ell = 1000\ \mathrm{km}$ としよう．この真南の都市で身長が $165\ \mathrm{cm}$ の人がその影を測ったとしたら $\epsilon = \frac{1000 \times 165}{6400} = 25.8\ \mathrm{cm}$ となっていたはずである．確かに $26\ \mathrm{cm}$ 程度ならば十分正確に測れたはずである．しかしこの測定が可能であったのは，当時のギリシア人が地球が丸いことを知っていたことが最も大きな理由と考えて良いであろう．少なくとも古代ギリシアの知識人は天体現象をかなり正確に理解していたのであろう．天動説はあくまでもキリスト教世界の考え方に過ぎなかったということである．

2.1.3 天体に働く力は重力

星と星の間に働く力は重力である．重力は極めて弱い力であるが，その力の強さがそれぞれの星の質量に比例するため，大きな星間の重力は巨大になる．この重力は常に引力であり，更に力が長距離まで届くため，結果的にかなり強い力となって銀河が作られ，そして我々の宇宙が形成されている．

● 宇宙の膨張と銀河の融合： 地球は太陽に束縛されていて，その太陽系は銀河系の中心核によって束縛されている．その銀河系は我々の宇宙が爆発した後，その爆発エネルギーにより沢山の銀河系が全体として膨張している．現在の我々の銀河系や隣のアンドロメダ星雲もその膨張段階にあると考えられている．しかしながら，この状態がしばらく続いた後のある段階で，その膨張よりも銀河間の重力による引き合いの方が強くなり，いずれは幾つかの銀河系が融合し始めることになる．そしてその融合が次第に大きなスケールにまで発展し

て行き，その後，全体が収縮して，最終的には再び爆発することになると考えられる．

● 星の内部：　一方，星の形成は大量の水素原子の集まりが重力により一つの塊となって行き，それが星の原型を形作る．そして星の内部ではその核になっている塊に物質が落下して衝突するため，次第に星の内部は熱せられて行く．このエネルギーは勿論重力エネルギーである．実際の星を見ると，その星の質量とその大きさにより星の中心温度は大雑把に決定されている．この中心温度が一定以上の高温になるとまず，pp チェインと呼ばれている原子核融合反応がおこる．この反応の細かいことは別にして，結果的には４個の陽子が１個の α 粒子と２個の陽電子と２個のニュートリノに変換されるのである．この時，膨大なエネルギーが放出されることになる．このエネルギーがさらに星の内部を高温にするとともに，生成された α 粒子は陽子より重いため，星の中心核を形成して行くことになる．この中心核にさらに多くの物質が落下して衝突することにより，その温度をますます高温にして行く．そしてその中心核の温度が一定以上になり，また一定以上の高密度になった場合，３個の α 粒子が融合して C 原子核になる核融合反応が起こることになっている．そしてこの後は，その星の大きさに応じて様々な原子核融合反応が進行することになっている．この核融合反応により生成されたエネルギーは放射により，星の表面から外部に徐々に放出されて行く．

2.1.4　アンドロメダと天の川 (我々の) 銀河の衝突

現在の観測事実から，いずれアンドロメダ銀河と天の川銀河の衝突が起こることが予想されている．直感的にも，銀河の大きさ (約１０万光年) と銀河間の距離 (約２５０万光年) を見て見れば，この２つの銀河がその大きさからすれば異常に近いことがわかり，これより２つが衝突することは自然なことと納得できるであろう．ちなみに恒星の場合，太陽から最も近い恒星は４光年先にあり，太陽の半径が１光秒に満たないことから，その半径より７桁以上離れているので，この場合，衝突はあり得ないものである．

● 銀河衝突の時期：　それではアンドロメダ銀河と天の川銀河はいつ頃衝突するのであろうか？これは重力場のもとで引き合っている２つの質点が衝突するという問題なので，物理学科の２年生の問題として理想的である．このため，ここでは簡単な式を使うことにして解説しよう．今の場合，ニュートン方

程式は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.1}$$

ここで G は重力定数であり，$M,\ m$ はそれぞれの銀河の質量である．$\boldsymbol{r}$ が２個の銀河間の相対距離を表している．右辺に $M+m$ が現れたのは，銀河の質量が同じ大きさである場合を考えて，換算質量を導入する必要がある事に依っている．また，今の場合，この２個の銀河は直線で衝突するので１次元の衝突問題に帰着される．従って，式 (2.1) はエネルギー積分を行うと

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{G(M+m)}{x} = \varepsilon \tag{2.2}$$

となる．ここで ε は積分定数である．この微分方程式は簡単に解く事ができる．今は，衝突するまでの時間 T に興味があり，それは

$$T = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon + \frac{2G(M+m)}{x}}} \tag{2.3}$$

と書けている．これは $x = \left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right)\sin^2\theta$ と置くと簡単に解けて

$$T = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}\left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right)\left\{(\theta_1-\theta_0) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_0)\right\} \tag{2.4}$$

となる．但し，ε が負である事に注意する必要がある．現在，アンドロメダ銀河は天の川銀河に 1.2×10^5 m/s の速さで近づいているので，初期条件として $t=0$ で $v_0 = 1.2\times10^5$ m/s を取っている．さらに銀河間の距離 L が $L \simeq 2.5\times10^6$ 光年であり，また銀河のサイズが約 1.2×10^5 光年なので

$$\begin{aligned}\sqrt{-2\varepsilon} &= 1.4\,v_0 \\ \left(-\frac{G(M+m}{\varepsilon}\right) &= 3.8\times10^6 \text{ 光年}\end{aligned}$$

である．ここで銀河の質量として $M \simeq m \simeq 4\times10^{42}$ kg とした．これより

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.5\times10^6 \text{ 光年 (今の銀河間距離)} \Rightarrow \theta_0 = 0.94 \\ x_1 &= 1.2\times10^5 \text{ 光年 (銀河の大きさ)} \Rightarrow \theta_1 = 0.18 \end{aligned}$$

となっている．これらの値を式 (2.4) に代入すると $T \simeq$ ３０億年が求まる．この値は銀河の質量に依存しているので多少のバラつきはあるだろうが，大雑把

には，３０億年後に二つの銀河が衝突し，融合し始めることは確実である．

● 銀河間の重力圏突入：　また，２個の銀河が互いの重力圏に突入した時期を評価してみよう．ここでは銀河間の相対速度がゼロの時に「何か」が起こり，互いの重力圏に入り始めたと仮定しよう．その場合，「何か」が起こった時期の計算は上の計算と同じで初期条件のみ変えれば良い．その結果，今から 約６９億年前 に「何か」が起こった事がわかる．

**　残念ながら，この「何か」が何であるかは力学の方程式から知ることはできない．恐らくは，アンドロメダの近くにあった銀河がそのころに融合した事が原因であろうと考えられるが，これはあくまでも推測でありきちんとした根拠があるわけではない．**

2.2　宇宙論の概観

この宇宙の成り立ちを議論する理論が宇宙論である．これまで沢山の宇宙論が提案されてきているが，それらを科学史的に取り扱い議論することはこの本の目的ではないし，それ以上に著者の能力を超えていることである．従って，ここでは宇宙に対する基本的な歴史をごく簡単に解説して行き，これまで人々が宇宙に対してどのような描像を持ってきたかを議論してゆきたい．

2.2.1　１９世紀までの宇宙論

１９世紀までの宇宙論は基本的には階層構造による宇宙であった．しかしそれを観測する手段もなく，少ない観測量から宇宙全体を議論することは当然，非常に難しいことになっている．

● オルバースのパラドックス：　宇宙が無限に広くて，星が一様に無限に存在すると夜がなくなると主張した人々が何人かいて，その内の一人がオルバースである．現在，これは「オルバースのパラドックス」として良く知られていて，ある程度，宇宙の構造を考える時に一つの条件になっている．しかし，ここでは重要な点が見過ごされている．それは光の速さは有限であるということである．従って無限の彼方から光が届くためには無限の時間が掛かってしまうということである．さらに，無限の彼方から光が到達するためには，その途中で無限に多い物質と散乱される可能性があり，従って無限の彼方から光が地球上に到達する可能性は無限に小さいことになっている．

これまでのオルバースのパラドックスにおいては，光がその途中にある物質と散乱すると言う効果は無視されていた．この散乱の効果は恐らくは，単純な宇宙論でも非常に重要な役割を果たしていたことであろう．星が遠くであればあるほど，途中において散乱されるべき星が増大するわけであり，この点からしてもオルバースのパラドックスは不十分な模型であることが納得されるであろう．

さらに言えば，散乱や吸収が起こらないほど波長の長い光は，この宇宙に充満する可能性が十分あることになる．恐らくは，それが宇宙の背景輻射に相当する光であろう．この背景輻射の光を見たら，確かに夜は存在しないで常に昼となっていることに対応している．

2.2.2　宇宙における階層構造

宇宙の構造がどのようになっているのかと言う問題は常に人々の興味を引いてきたが基本的には階層構造であるという考え方が主流であった．

● 太陽系：　地球が太陽の回りを公転しているが，その他にも火星とか他の幾つかの惑星も太陽の回りを公転している．それを太陽系と呼んでいて，中心には太陽がある．そして太陽系全体の質量の 99 %以上が太陽に集中している．ちなみに最も大きな惑星である木星の質量が太陽の質量の約 0.1 % 程度である．地球の質量は太陽の約３０万分の１である．

● 銀河系：　その太陽系は我々の銀河の中にあり，銀河の中心からかなり離れた場所を公転している．その公転速度は地球の公転速度よりもさらに４倍ほど速いものと考えられている．

● 宇宙：　その我々の銀河のような銀河系が沢山集まって，我々の宇宙を形作っていると考えられている．ここまではどの宇宙論もほぼ同じシナリオに従って宇宙論を展開している．これは観測事実からみても自然な考え方であるといえる．しかし，その階層構造が無限に続くのか，それともどこか途中で切れるのかという問題に関しては，正確に答えることはできていない．

● 無限宇宙：　我々の宇宙は数千億個の銀河から成り立っていると考えられている．そしてビッグバン模型では，宇宙はここまでとしている．しかし，後で議論するように，この我々の宇宙だけだとすると矛盾が生じることがわかっている．この我々のような宇宙が無限個存在する仮定しないと，この宇宙の爆発の繰り返しの現象を矛盾なく理解することはできない．しかしながら，我々の宇宙のようなものが無限個あったとしても，空間が無限であるかぎり，それ程驚くことではないことも確かである．

2.3　一般相対論に基づいた宇宙論

一般相対論は計量に対する方程式であるが，物質があるときにその計量テンソルが変更を受けるという模型のため，宇宙論にも影響があると考えられてきた．実際，一般相対論には空間が膨張すると言う解が知られていて，これがビッグバン模型とうまく一致したと人々は考えてビッグバン模型が一般に受け入れられたのである．しかし空間の膨張と銀河などの膨張がどうして一体化されるのであろうか？銀河の膨張は，勿論，爆発があったとすれば当然，理解できるものである．しかし，それと空間の膨張とは，どのようにしたら結びつくのであろうか？この最も深刻な問題は，これまでほとんど議論されないで今日に至っている．

2.3.1　ビッグバン模型

最初にビッグバン模型を提唱したのはガモフである．この模型自体は単純で，しかし本質的な銀河の動きをうまく捉えていると考えられている．ある段階で，この宇宙 (銀河の集団) が爆発したという仮定は，現在の膨張している宇宙 (銀河の集団) を考えるかぎり，ごく自然な発想であり，事実に近いものであろう．この場合，爆発のエネルギー源は何であろうか？この問いかけをきちんとしていたならば，ビッグバン模型が暴走することはなかったであろう．このエネルギー源は今の銀河の膨張を考えて見れば明らかである．それは，この銀河の集団はいずれは重力ポテンシャルによって引きつけられることになっている．従って，ビッグバン模型の爆発エネルギーは銀河間の重力エネルギーがその源である．

● 天動説学派の主張：　一般相対論は空間自体が膨張するという理論であるが，実際には沢山の銀河が全体として膨張している．しかしこれがどのように空間の膨張と関係してくるのかどう頑張って考えて見ても全く理解できないのは，前述したとおりである．

一つの可能性として，空間の膨張に伴い，空間に張り付いたように銀河も膨張すると仮定すれば，空間の膨張と銀河の膨張が関係つけることはできるであろう．これは風船が膨張する時，風船の「しみ」が膨張とともに大きくなる現象に対応している．これは天動説で星が空間と一緒に回転しているイメージと同じである．さらにビッグバン模型の宇宙論では，存在しているのは我々の宇宙だけであるとしている．この宇宙は１００億年程前に突然，点から生成され

と考えている．その前の空間はどうなっていたかという質問に対して，この分野の専門家は勿論，答えることはしない．また，空間もその時に誕生したと考えるので，銀河が存在していない空間に関しては，全く考えてはいない．

2.3.2　ハッブルの法則

沢山の銀河系を観測した結果，ハッブルは銀河系全体が互いに離れて行く事実を観測により見つけ出している．これはハッブルの法則として知られており，正しい観測事実である．このことより，我々の宇宙はある時期にどこかで爆発したものと考えるのはそれ程不思議なことではない．但し，それが何時，何処で爆発したのかという問題はそれ程重要とは考えられないが，しかし爆発した事実は確かなことと考えてよい．

● 爆発のエネルギー源：　この宇宙の爆発のエネルギー源はどこにあるのだろうか？これは実は非常に簡単で，爆発のエネルギー源は重力のポテンシャルエネルギーである．従って，この宇宙膨張の観測事実が一般相対論と結びつかなければ，問題を起すことはなかったほど，爆発自体は自然なことである．問題は，銀河全体の膨張を空間の膨張と関係つけたため，一般相対論の宇宙論が物理学ではなくなったのである．

2.3.3　ブラックホール

一般相対論の解のうちで計量テンソルが特異点を持つ場合が知られている．この特異点とブラックホールは関係しているとしているが，数学的な特異点を自然現象と関係つけるためには，相当な努力が必要である．しかし，ブラックホールという概念はその面白さから話題になったものであり，実体が伴ったものではない．全ては理論的な考察のみであり，ブラックホールという名前を付けてもそれが観測量とどのような関係を持っているのかは不明である．

重力に対する一般相対論の高次項をポテンシャルで表した場合，このポテンシャルは，ある条件下において原点で強い引力を示している．この力の強さは角運動量による遠心力よりも強くなってしまうことがわかっている．その場合，この系はつぶれてしまい，重力崩壊が起こることになる．しかし，この現象をニュートン方程式を解くと言う立場からするとその解が存在しないことに対応している．これは自然界で起こらならない現象であり，従って，ブラックホールは存在しないことに対応している．実際，Dirac 方程式から求められ

た重力付加ポテンシャルは斥力になっていて，そのような崩壊は起こっていない．このことを見ても，一般相対論が自然現象と結びつく事ができる理論ではないことがよくわかるものである．

● 星の質量と重力の強さの関係：　ブラックホールは重力が一定以上に強い場合に起こる現象であるという主張がなされている．この理論自体が信用できないことはこれまで議論してきている通りではある．しかしながら，たとえその理論を採用したとしても，ブラックホールは起こらないことが原子核物理学の正確な知識により証明することができる．このためには，まず実際の星でどのようにしたら強い重力が生じるであろうかという問題を検証することである．これは簡単で強い重力を生むためには小さな領域に大量の質量が集中すれば良いことがわかる．しかしながら，核子ー核子ポテンシャルが正確に知られており，この情報を入れて計算すると，原子核の密度以上に核子が集中することは不可能であることがわかる．これは主として核子間には近距離で非常に強い斥力が働くからである．すなわち，核子は一定以上に近づくことは不可能である．こうして星を形成して見ると，結局，星の内部での重力は星の表面での重力の大きさよりもせいぜい 1.5 倍強くなっている程度のものである．さらに，星の半径は質量が増えるとそれに応じて増えてゆくため，いくら質量が増えてもその表面での重力がブラックホール形成の条件を満たすことは不可能であることが証明されるのである．

2.4　新しい宇宙論

宇宙論を物理学として考える場合，最も重要な部分は星や銀河を形成している構成要素の性質である．星を構成している基本粒子は水素原子などの原子核とフォトンである．フォトン (光) を星の構成要素とすることには異論もあるが，ある段階の星の生成に取って，輻射圧は非常に重要な役割を果たしている．これは光が星の重要な要素となっている証拠でもある．

しかし，原子核が星の基本的な構成要素であることは確かなことである．この場合，原子核は安定であるかということが問題になる．実際問題としては，原子核は一定以上の熱エネルギーを与えられた場合，安定な原子核は存在しない．最終的に安定な粒子は陽子と電子のみである．

● 自然論学派の主張：　このため，この宇宙の基本的な構成粒子は陽子と電子ということになる．それにフォトンが混じっている．フォトンも安定な粒子であるからである．実際には，これに加えて，中性子とニュートリノも含む必要がある．それは原子核の構成要素には中性子が入っているからであるし，また中性子が１５分で崩壊するとニュートリノ (これは安定な粒子) も生成されるからである．宇宙論を議論する上で最も重要な点はこれらの構成要素とその間の相互作用を正確に理解してそのダイナミックスをきちんと理解することである．この相互作用に関しては，現在までに場の理論の言葉で正確に理解されている．その基本的な物理学をもとにして宇宙論を議論することになる．まずは，陽子と電子とフォトンを宇宙の基本構成粒子として議論を進めてゆこう．

2.4.1　陽子と電子は安定

陽子の寿命について，様々な研究がなされてきたが，現在までに，陽子の寿命は無限大として全く矛盾がないことがわかっている．実際，陽子崩壊の実験では陽子の寿命が無限であることが示されている．一方，電子に関しては最初から電子の寿命を議論することはほとんどなかった．それは電子が最も軽い粒子であることによっている．電子が崩壊するにしても，その相手がいないからである．これらのことより，陽子と電子はともに安定であるとして扱うことが最も自然なことである．

● 宇宙は無限の過去から存在した：　陽子と電子が常に安定であることから，この宇宙は無限の過去から存在したと仮定することが最も自然なことである．もはや，宇宙がある時期に突然，生成されたという仮定は成り立たない．

● 宇宙生成の根拠は消滅した： 粒子・反粒子生成による宇宙論は実験的に否定されている．それは陽子が安定であることが第一の理由である．また，反宇宙が観測されていないことも理由の一つに挙げられている．しかしそれ以上に，粒子・反粒子の生成によってある宇宙が生成されたと主張する時，その生成するもとのエネルギー源が存在していない．これまで実験的に知られている４個の相互作用を考えて見ると，宇宙はもとから存在したこと以外にあり得ないのである．

2.4.2 ハッブルの法則と宇宙の膨張

ハッブルの法則は銀河系が地球からどれだけの速さで遠ざかっているかを観測してそれを法則としてまとめたものである．基本的には遠方の銀河に対して成り立つ法則と考えてよく，従って，すべて地球から遠ざかるものとなっている．この場合，銀河が遠ざかる速さを V として，その銀河までの距離を d とすると $\boxed{V = Hd}$ と書けている．ここで H をハッブル定数と呼び，現在測定さている値は $H \simeq 67\ \mathrm{km/s/Mpc}$ (但し, $\mathrm{Mpc} = 3.26 \times 10^6$ 光年) である．このことから，確かにこの宇宙は膨張していることがわかる．

● ハッブルの法則の物理： それでは，我々はこの法則から宇宙の構造についてどのようなことを学べるのあろうか？遠い銀河の方がそのスピードが速いと言うことは，何を意味しているのであろうか？幸いこれは単純であり，遠い銀河の速さとは，より過去の状態の速さを表しているということである．すなわち，爆発の初期の方が，銀河が膨張するスピードが速かったと言うことを示している．従って，時間が経つにつれてその膨張のスピードは弱まっていることを示している．膨張の速さにブレーキが掛かるのは，勿論，銀河全体の重力ポテンシャルに依っている．

2.4.3 宇宙論の基礎理論

宇宙論を議論するということは宇宙の成り立ちを検証することである．現在までに，宇宙を構成している星は陽子と電子がその主力となって形成されている．これらの運動を記述することができる理論が場の理論である．従って，正しい場の理論を理解しない限り宇宙論は議論できないことになっている．これが宇宙論の難しさである．逆に言えば，場の理論が正確にわかっていれば，かなりしっかりした宇宙論を展開することができることになる．

● 量子場の理論：　現代物理学は４つの相互作用からなっている量子場の理論により記述されている．繰り返し書く事になるが，それらは「量子電磁力学」「弱い相互作用」「強い相互作用」そして「重力」である．現在までにこれらの相互作用の性質は正確に理解されていて，完成されたものと考えてよい．この量子場の理論の言葉で宇宙論を展開することがこの本の目的の一つでもある．

　この場合，最も重要な相互作用が重力であることは明らかである．重力は有限質量を持っているフェルミオン (今の場合，陽子，中性子，電子である) に対して，必ず，引力として働く力である．そしてその力はフェルミオンの質量に比例している．ここでそのポテンシャルの形だけは数式で書いておこう．$\boxed{V(r) = -G\frac{mM}{r}}$ である．ここで G は重力定数であり，実験的にも測定は十分されている．$m,\ M$ は例えば m が地球の質量で M が太陽の質量となっていて，r はその地球と太陽の距離である．これは，陽子と原子の間にも成り立つし，また銀河間にも成り立つ式である．これがどの系に対しても成り立つ式であることは非常に重要であり，銀河の形成にしてもまた宇宙の形成にしても，すべてはこのポテンシャルによって考えて行くことになっている．

2.4.4　無限宇宙

　宇宙が無限に遠い過去から存在していたことは物理的に言って，実験的および観測的な事実である．宇宙に存在する星などを作っている物質はその構成要素 (電子と陽子) が安定であることが実証されている．

● 我々の宇宙：　我々の宇宙は約数千億個の銀河から成り立っていると考えられている．そしてその広がりは約１００億光年程度であろうといわれている．しかしながら，その広がりが大雑把にどの程度なのかということは意味がある設問であるが，細かい数字はほとんど意味がないものである．

　それでは星の集団の広がりはこの我々の宇宙だけであろうか？これは極めて重大な問い掛けではあるが，しかし勿論，観測可能な問題ではないので，どこまで科学になり得るかはそれ程明確ではない．

● 宇宙爆発の繰り返し：　無限の過去からこの宇宙が存在していた事から，宇宙は収縮と爆発を繰り返してきたことは間違いない．現在の宇宙は膨張の段階であるが，いずれ収縮し始めて，最終的には爆発に至ることは確実である．しかし，この場合，この爆発により膨大なエネルギーをフォトンにより宇宙の外に放出している．そしてこの収縮と爆発が無限回繰り返してきた事実を考える

と明らかな矛盾が生じてしまうのである．すなわち，１回の爆発で一定量のエネルギーが光により放出されている事実は，これを無限回繰り返したら，この宇宙のエネルギーは遥か昔に無くなっている筈である．この矛盾をどう解決したら良いのであろうか？

● 宇宙空間のフォトン：　これに対する唯一の解決法は，この宇宙が無限に広く限りが無いということである．すなわち，我々の宇宙はフォトンにより膨大なエネルギーを外部に放出しているが，宇宙が無限であれば他の宇宙空間からフォトンをエネルギーとして獲得しているはずである．実際，背景輻射はそのフォトンのエネルギーであると考えられるものである．現在まで観測されている背景輻射は宇宙のどの場所にも存在していると考えられている．光は光速で動くのにマイクロ波が至る所に存在している事実は，この宇宙初期の爆発の生成物とは到底考えられないのである．宇宙 (今の場合，銀河) が膨張する速度よりもマイクロ波が宇宙空間の外に放出される時間の方がはるかに短く，マイクロ波が現在も存在している物理的な理由が見当たらないのである．

● 背景輻射は無限宇宙空間から：　このマイクロ波が無限宇宙空間からのものだとすれば，物理的には至極合理的に理解できるものである．我々の宇宙はこの背景輻射のゆりかごの中で宇宙の生成・消滅が行われているものと考えれば，現在観測されている事実は矛盾なく理解される．

● 宇宙空間は無限：　このように，様々な観測事実と推論から我々の宇宙だけだとすると矛盾が生じることがわかる．従って，この宇宙空間は無限に広がっていて，銀河などの物質も無限の彼方に無限に多く存在しているものとする事が現在の最も合理的な宇宙論であろう．

● 我々の宇宙の安定性：　この宇宙全体が無限個の宇宙でできているとした場合，我々の宇宙が安定であるかどうかと言う問題が生じてくる．それは銀河が最終的には引き合ってゆくことと同じである．しかしながら，宇宙が無限であるとすると話は別になってくる．簡単のために，1 次元系で考えて見よう．我々の宇宙が原点にあるとしよう．この場合，$x-$ 軸の正の方向に無限の宇宙があり，そこからの引力が当然，無限大である．ところが，$x-$ 軸の負の方向にも同様に無限の宇宙があり，そこからの引力も当然，無限大となっている．これは両者が引き合って吊り合う状態になっていることを示している．従って，宇宙に銀河が無限に存在している限り，確かに我々の宇宙も安定に存在していることがわかる．

第３章　物理学とその表現法

物理学は自然現象を理解するための学問である．これは自然論学派に取っては至極当然なことではあるが，しかしこれがどの物理学者にも当たり前になっているかどうかはそれ程自明ではない．現実に，表現手段としての数学が一人歩きしてしまい，物理的には意味をなさない理論が提案されることが実際に起こっている．物理学で自然を理解しようとするときはその表現手段として数学を使っているが，ここではこの自然を数学という言語で表現することの問題を言語と文法の関係と比較しながら議論してゆこう．

3.1　表現言語

物理学の法則を表現する時に，我々は数学を使っているがこの数学は物理学に取っては言語である．例えば，ニュートンの微分方程式を眺めれば，その解が伝える物理の内容が頭に浮かんでくるものであり，微分方程式がその内容を詳しく伝えてくれている．数学としての言語を自然現象を表現するために使う場合，当然，その使い方に注意が必要なのである．しかしながら，これはかなり微妙な問題も含まれており，表現された内容を余程しっかり検証をしないと，それが物理的に十分意味があるものになっているという保証はない．すなわち，文法 (数学) は正しくても，文章 (物理) として意味があるかどうかを常に頭に入れておく必要がある．

● 文法：　言語は人間が獲得した技術のなかで最も重要なものの一つである．そしてその言語のなかで尤も大切なものが文法である．この文法があるから，表現空間が飛躍的に増大したものである．文法は言語を使う場合の規則であり，その規則を守ることは常に必要なことである．

3.1.1　チョムスキーの「無意味な例文」

しかしながら，文法的に正しくても意味をなさない文章はいくらでも作れる．これはチョムスキーが言っている例文であるが,「Colorless green ideas sleep furiously”（無色の緑色の考えが猛烈に眠る）」というものがある．これは文法的には正しいのだが，あきらかに文章としては意味をなしていない．このことは文法という規則をきちんと守っても，だからと言って「正しく伝達する」という言語の最も重要なことがいつでも正しく行われているとは限らないことを示している．文法を数学と置き換え，文章の意味を自然界の記述と置き換えると，このチョムスキーの提言はそのまま物理学にもあてはまってしまう．数学上はいくら正しいものでも，自然界の記述には十分な注意が必要である．この問題に対して，物理屋はこれまであまりにも鈍感でありすぎたということが言えよう．

この例文の場合，明らかに無意味である事がわかる事例となっているが，しかし当然，ある程度ぼやけている無意味さの例文もありうるわけである．この場合，特にその文章における独創性を強く主張されると，その方に注意がいってしまう可能性もある．実際，物理学において，アインシュタインも南部達もともにその独創性を必要以上に強調していることは確かである．学者は自分の仕事に対してどんなに謙虚であろうとしても，謙虚でありすぎるということはないと言われている．それだけ謙虚さを保つことが難しいことを意味している．しかしながら，ある種の物理屋はその論文の独創性をあまりにも強調しすぎてしまい，その仕事が自然界とどのように関係しているかという最も難しい問題を十分に深く検証することができていない例が見受けられるものである．

3.1.2　物理学における表現言語

自然現象を理解するために，物理学ではその表現言語として数学を用いている．数学における微分方程式はその式を見れば，その表現しようとしている内容がかなりしっかりした形で浮かんでくるものである．

数学の規則は常に厳格であり余程のことがない限り，数学自体で間違えることはめったに起っていない．しかしながら，これを言語における文法として捉えると，文法的には正しくてもその文章が意味をなさない場合があると同じで，物理学においても，数学自体は正しくても物理的に意味をなさない場合が現実に起こっている．自然界を記述するためには，余程，数学表現を正しく使わないとそれこそ意味のない方程式となってしまうのである．一般的に言っ

て，方程式では「左辺＝右辺」という式になっているわけだが，この等式の意味を相当深く考えてはじめて意味がある文章になるものである．

この点をしっかり理解するために，幾つかの実例をあげてその内容を検討して行こう．ほとんどの例は文法 (数学) は正しいが物理的に意味をなしていないものである．

3.1.3　正しい数学は必要条件

物理の現象を数学で記述するとき，その場合に使っている数学が正しい事が当然ながら，必要条件である．数学が間違っていたら，自然界を記述する事は不可能である．しかしながら，数学自体が間違う事はあり得なく，現実にはその数学を応用する時に間違う場合がみられているのである．実際，次元正則化の手法においては，その文法 (数学) を使う際，使ってはならない場合の数学公式を利用している．このため，計算結果が間違ってしまい，深刻な問題を惹き起こしたのである．しかしこれは物理以前の問題でもあった．

- 次元正則化：　この次元正則化という手法は１９７０年代初めに提唱された理論形式である．これは積分の次元 (今の場合４次元) である４を $D = 4 - \epsilon$ (ただし ϵ は微少量) と置き換えて積分を実行しようする手法である．このようにすると，通常は２次発散で無限大になる積分量が Log 発散になり，ゲージ条件を満たした結果が得られると言うものであった．しかしながら，これは数学公式を間違って使ってしまったために，２次発散が消えてしまったことがわかっている．この次元正則化の話は物理とは無関係ではあったが，ある時期はこの手法が一世を風靡したほど，よく使われたのである．今となっては，ゲージ条件自体が意味をなさない要請である事がわかっているが，科学史的には将来，何故，このような単純な間違いの理論模型が人々に受け入れられたのかという「次元正則化の問題」をきちんと検証することが必要であろう．この理論形式は自然現象と直接関係があるというものではなかったが，この手法の新鮮さと独創性のためか，ある時期は必要以上に評価が高かったものである．実際，この理論の提唱者達はノーベル物理学賞を受賞している．

3.2　物理的な無意味文の例題

チョムスキーのいう「無意味な例文」と似たような現象が物理の世界でも起こっている．数学としては正しい式であるが，しかしそれを自然界に応用しようとすると物理的には意味をなさない理論形式のことである．但し，意味をなすか成さないかという問題は「無意味な例文」でも慎重な検討が必要であるように，物理学においてもその検証は膨大な計算や思考の積み重ねを実行した結果であることは強調しておく必要があろう．それはチョムスキーの無意味な例文を見てもわかるように，完全に無意味であれば，むしろ問題ない．しかしながら，微妙に正しそうに見えて，結果的に無意味な例文をあげられるとその検証はそれ程簡単ではないことを十分に理解しておく必要がある．

物理学における「無意味な例文」には共通したものが見られる．それは「独創性」である．この実例としてあげる一般相対論や自発的対称性に破れの論文において，その著者は彼らの考え方の「独創性」を必要以上に強調している．独創的であれば物理的に意味があるかどうかの検証は２の次であるという感じである．これはチョムスキーのいう「無意味な例文」の典型的な例題となっているので，以下に詳しく調べてゆこう．

3.2.1　一般相対論

一般相対論は文法 (数学) は正しいが，物理上は意味をなさない理論体系に属している典型的な例である．この方程式は微分幾何を用いているが，その数学自体は勿論，間違っているわけではない．この方程式をみると「左辺は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれたテンソル量であり，右辺はエネルギー・運動量テンソル」という式になっている．この方程式自体は数学としては全く問題のない式である．しかしこの等号がどういう意味があるかという問い掛けには全く答えることができていない．アインシュタインはこの方程式が成り立ったら，すなわち，計量テンソルに変更が起こったら，それが自然界のどの現象を説明できるのかという問い掛けを全くしていない．彼にとってこの問い掛けはそれをしなかったからではなくて，それができなかったからであろう．この理由は簡単で，計量テンソルが変更を受けたとしても，空間自体の認識が人間にはできないため，計量自体が我々の理解を超えたものであるからである．この方程式の等号は，ただ単に新しさのみがその理由であったと考えられる．

この一般相対論の方程式は，言語学でいったら，その文法は確かに正しいものであるが，しかしながら文章としては意味をなしていないものであった．し

かしこの方程式の言っていることが非常に斬新であり，確かに独創性はゆたかである．このため，これまでこの一般相対論を受け入れる物理屋が多かったのであろうか．しかし，どんなに目新しくても，その理論が自然界と無関係では物理学では無意味なものとなっている．

3.2.2　ブラックホール

ブラックホールという物理用語はその内容とは無関係に，あっという間に一般の人達にも使われてしまった「流行語」ということができる．言語でいう文法以前の問題と言えよう．ブラックホールの概念はたとえ一般相対論を認めたとしても自然界との関係がどうなっているのか全くわからないものである．もともとは一般相対論の方程式が持っている「特異点」からきている．しかし数学的な特異点が物理と結びつくためには，余程の努力が必要である．ところが，このブラックホールに関しては実体がない．それは明らかでそもそも一般相対論は系のダイナミックスを記述する方程式ではないことと関係している．例えば，星の力学を扱うのはニュートン力学であり，一般相対論は系の動力学とは全く無関係の理論である．従って，もともと星については議論できるはずがないものである．それでも人々は，ブラックホールのイメージを物理学とは無関係に空想上の星として作り上げてきたのである．

たまたま宇宙には中性子星が存在していることがわかっていたため，この中性子星とブラックホールを結びつけて，あたかもそれが自然界に存在するような印象を人々に与えるような宣伝を行ってきたのである．現実には核力の知識がしっかりしていれば質量が巨大な星でも重力がそれ程強くはなれないことがわかっていたはずである．核子ー核子ポテンシャルには近距離で非常に強い斥力が働くため，核子同士が一定以上に近づくことはできない．

3.2.3　カイラルアノマリー

このカイラルアノマリーは三角形図というファインマン図の計算と関係して導き出された方程式である．この三角形図のうち，$\pi^0 \to \gamma + \gamma$ は実験でも観測されているし，理論的な計算でも西島先生による計算が実験値を非常に正確に再現している．実際，このことは「Fields and Particles」に詳細な記述があり，これは良く知られていたことである．しかしながら $Z^0 \to \gamma + \gamma$ という物理的な過程の計算を実行すると，見かけ上１次発散がでてくることがわかっ

ている．しかし正確な計算を行うと，実はこの見かけ上の１次発散が消えてしまうことも証明されている．

カイラルアノマリー方程式とは，この三角形図の計算を正しく行わなかったために見かけ上の１次発散が現れてしまい，それを正則化という数学の手法をうまく用いて新しい方程式を見つけてしまったことに対応している．この計算ミスがどこからきているのかを検証すると，ファインマン図の計算過程で２個のフォトンを入れ替えたファインマン図の計算を正確に行わなかったことからきていることがわかっている．その意味では，言語で言ったら文法自体が正確さを欠いていたということになり，計算ミスとしてはかなり初歩的なレベルの間違いであり，物理学の研究では決して起こしてはいけないものである．

しかし，この計算ミスをそのまま認めてしまうと，その後の計算は文法的にはほぼ正しいものとなっている．見かけ上あらわれた１次発散の無限大を数学的に正則化するという操作を行うと，カイラルカレントの保存則を破ってしまう方程式が求められたことは確かである．しかしこの場合でも，彼らが用いている「ゲージ条件」が物理的には無意味であることを理解していたら，アノマリー方程式は導出されなかったことも事実である..

現実にはこの間違った計算が人々に受け入れられ，物理学界に大きな混乱をもたらしたのである．これは文法 (数学の使い方) をほんの少し間違えてしまったため，それまで知られていなかった新しい「表現文」(方程式) を見つけたことに対応している．しかしこれは文章としても (物理的にも) 意味をなしていないものであった．このことは如何に人々が新しいものに引き付けられ，自然界との整合性さえも犠牲にしてでも「独創性」を評価してきたのかと言う良い実例である．しかし科学は自然を理解しようとする学問である事を忘れてはならない．このカイラル・アノマリーの問題は，どんなに反省しても反省しすぎることはない程深刻で，物理の歴史に大きな汚点を残してしまったのである．

3.2.4　自発的対称性の破れ

自発的対称性の破れとは，カイラル対称性がある場の理論模型において，その真空状態はカイラル対称性が自発的に破れてしまうという主張である．この自発的にという言葉があまり良くわからないのであるが，基本的には「何をしなくても真空の状態は対称性を破る状態が自然に実現される」という主張である．これは非常に奇妙な主張であるが，人々はこれを受け入れたのである．この計算を検証すると，この模型計算において文法 (数学) 自体は正しいのであるが，それを模型計算に応用する時にある近似を用いている．従って，文法

としては近似的に正しいことを実行している．しかしながら，この自発的対称性の破れの理論を主張した人達は，厳密なことを要求していたのである．すなわち，対称性が破れているかいないかのどちらかのみに意味がある模型計算であった．ところが，近似法を用いたため，近似的に破れていたと思った計算結果は，厳密には破れていない事が証明されているのである．このことより，その模型計算の文法 (数学) は近似的には正しくても，厳密には成り立たなく，結果的に間違った理論となってしまったのである．

さらに悪い事に，この結果が他の模型計算，特に Higgs 機構という新しい独創的な模型計算に応用されてしまい，それがまた人々を引き付けてしまったのである．そしてこの Higgs 模型は Weinberg-Salam の弱い相互作用の理論模型に応用されて，もはや収拾がつかない状態になってしまったのである．そして，Higgs 粒子探索という名目で CERN 研究所においては，年間，莫大なお金の浪費している．しかしそれに対して，その研究者達は全く平気であり，Higgs 機構に対する新しい知見には無関心を装っている．さらに，対称性の破れの理論を批判する論文は完全に無視されているという極めて深刻な状況が続いて今日に至っている．

現在では，この自発的対称性の破れは物理的にも単に無意味な理論模型であることがわかっている．その意味では，言語の応用を余程注意しないと物理的な混乱を惹き起こす原因になっていることに十分注意する必要がある．ここではむしろ Curie の原理をしっかり理解する事の方が，今後のためには重要である．

3.3 物理の表現空間

物理学における「物理状態」を表現するとき，その数学の表現空間の事をヒルベルト空間と呼ぶ．その空間は行列で表現することができるが，その基本的な理由は状態が離散的な固有値によって指定されるという事実にある．ただし，その空間の行列の次元は無限である．この節の解説は少し専門的になっているかも知れないので，大半の読者には読み飛ばして先に進まれても十分である．

3.3.1 固有関数による表現

何かの状態を表現する場合，数学では表現の基底を持ってくることになる．その基底は完全系を持ってくることになる．完全系について簡単に解説しよう．今，１次元系で考えることにしてその基底の関数を $u_n(x),\ (n=1,\cdots,\infty)$ としよう．この時，完全性とは

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)u_n^*(x') = \delta(x-x') \tag{3.1}$$

が成り立つ事がその条件である．さらに，この関数 $u_n(x)$ は規格直交系を成している事も必要である．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)u_m(x)dx = \delta_{nm} \tag{3.2}$$

を充たしている必要がある．ここで大切な事は，任意の関数 $\psi(x)$ がこの関数系 $u_n(x)$ によって表現されると言う事実である．すなわち

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \tag{3.3}$$

と展開して書けることである．ここで a_n は定数であり，何らかの形でこれを決定することになる．もし， $\psi(x)$ の形がわかっているときはこの系数 a_n を決めることができる．

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)\psi(x)dx \tag{3.4}$$

により求められる．

3.3.2　群論による表現

群論は数学における最も興味深い概念の一つである．グループを考えて，その中に何らかの演算を定義する．そしてその演算を施した結果が再び，そのグループの一員である時，そのグループは群をなしているというものである．その群の構成員を群の要素 (元) という．

● 群の定義：　今，群の要素 (元) として $\{a, b, \cdots, g\}$ を考えよう．ここである演算を定義して２つの要素に対する演算として $a \circ b$ と表す．この演算は，例えば，掛け算とか足し算だと思っていればよい．物理への応用で最もよく使われる演算は「行列の掛け算」である．ここで群の定義のなかで重要な部分だけを書きだしておこう．

● 群の定義

１．２つの要素間の演算 $\boxed{a \circ b}$ の結果がその群に属する

２．単位元 I が存在する

３．逆元 a^{-1} が存在する

この２番目の要請は簡単であり，任意の元 a に対して $\boxed{a \circ I = a}$ となるというものである．また逆元に関しては任意の元 a に対して $\boxed{a \circ a^{-1} = I}$ となるというものである．

● 群の表現論：　物理学で使う群論は表現論の方である．例えば，SU(3) という３行３列の行列でその行列式が１である行列集団がある．この行列集団は群を作っている．その場合，この群の性質を表現するために，群の表現論が発展し良く使われているのである．基本的にはこの群の演算の性質を行列で表現している事に対応している．少しだけ式を書くと群の要素を A として，表現する基底を $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ としよう．この時

$$A\psi_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ji}\psi_j$$

と書かれるとき，その行列 D_{ji} を表現行列と呼んでいる．この場合，基底を的確に選ぶことが重要である．

第４章　対称性とその物理

自然界には様々な対称性があり，それらの対称性は物理学において極めて重要な役割を果たしている．対称性とは時間・空間の変数に対して何らかの変換を施した時に，その系がもつ不変性のことである．この場合，その変換の対称性は自然界の身近な言葉で表現された現象と関係つけられている．場の理論ではさらに進んで状態関数に対する変換を行い，この変換に対する系の不変性により様々な対称性が求められている．一般的に言って，系がある対称性をもっていると理論的に取扱いが簡単になり，また様々な観点から物理の理解を深めることができる．さらに，対称性は物理学の描像を描く上で非常に有用であり，その本質を理解するときの指針にもなっている．

物理学における基本的な対称性に関連して二つの原理がある．その一つとして相対性原理があり，これはローレンツ変換に対する対称性と関係している．この対称性はどの場の理論模型も必ず満たさなければならないものである．もう一つは Curie の原理として知られているものであり，どの模型もその動力学の結果は必ず，Curie の原理を満たさなければならない．これは一種の因果律に関係していて，自然界では常に守られている．

4.1　変換と不変性

それでは「何らかの変換」とは具体的にはどのようなものであろうか？物理学を学んでいる読者にとって，この部分はよく知られていることと思われるが，対称性の問題を整理して考えるための一助にはなるものと考えている．

4.1.1　Lagrangian

ここで現代物理学において，その記述のすべての基礎となっている Lagrangian について少しだけ解説しておこう．まずは古典力学を取り扱うことになるが，この場合もっとも単純な系は２粒子系である．これは明らかで，１粒子だけの

状態は相互作用していないので自由粒子の状態であり，対称性を議論する場合の対象外となっている．２体系の場合の Lagrangian L は
$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2{}^2 - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ と書かれている．この右辺の第１，２項が運動エネルギーであり，第３項がポテンシャルである．

4.1.2　Lagrangian 密度

一方，場の理論は Lagrangian 密度によって記述されていて，これは場の量 (場の変数，状態関数とも呼ばれる) で書かれている．実際，量子電磁力学，量子色力学，弱い相互作用そして重力の Lagrangian 密度すべてが場の変数で書かれている．この場合，系の対称性は場の変数を変換した時，Lagrangian 密度が不変になることにより決定されている．そして様々な変換に対して，それぞれに対応した対称性が議論されている．その意味で古典力学と比べると，場の理論の対称性は非常に多様であることがわかっている．

4.1.3　変換と対称性 – 古典力学

まず，古典力学における対称性について簡単に議論しよう．古典力学では Lagrangian が座標の関数になっているため，この系の対称性は座標の変換に関係している．

● 空間の平行移動：　座標を $\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}$ と定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ だけ平行移動した場合，Lagrangian L は不変である．これは明らかで運動エネルギーの部分は平行移動の変換に対して変わらないし，またポテンシャルの部分も定数部分が打ち消し合って不変である．Lagrangian L が $\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}$ の平行移動に不変だと，その系の運動量が保存量になっていることが証明される．

● 時間の平行移動：　時間を $t \Rightarrow t + d$ と定数 d だけ平行移動した場合，Lagrangian L は明らかに不変である．この場合，エネルギーが保存量になっていることが証明される．

● 空間回転：　ある角度だけ座標を回転したとき，ポテンシャルが動径部分のみの関数の場合，Lagrangian L が不変となっている．この時，角運動量が保存量になっていることが証明される．座標の回転を数式で書くことは簡単ではあるが，それ程意味があることではないのでここでは省略しよう．

4.1.4 変換と対称性 – 場の理論

場の理論においては Lagrangian 密度が場の量の関数になっているため，この場の量の変換に対する不変性を議論することになっている．

● ローレンツ変換： すべての Lagrangian 密度はローレンツ変換に対して不変である必要がある．このため，どの Lagrangian 密度もローレンツスカラーとなっている．これは絶対条件である．

● 時間・空間の平行移動： 場の理論の場合，場の変数 $\psi(t, \boldsymbol{r})$ は時間と空間の関数である．ここで時間と空間を微小量だけ平行移動するとそれに応じて場の変数も変更を受ける．この変換に対して Lagrangian 密度が不変であることを要請すると，エネルギー・運動量テンソルが保存量となることが証明される．これは後でもう少し詳しく議論しよう．

● グローバルゲージ対称性： 状態関数 ψ を $\psi' = e^{i\alpha}\psi$ と変換してその模型の Lagrangian 密度が不変である場合，この模型はグローバルゲージ対称性があるという．この不変性はその系の電荷保存を保証している．

● グローバルカイラルゲージ対称性： 状態関数 ψ を $\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi$ と変換してその模型の Lagrangian 密度が不変である場合，この模型はカイラル対称性があるという．もう少し詳しくは，後程，解説しよう．

● SU(N) 変換対称性： 状態関数が N 個の成分を持っているとして，それを SU(N) の群 U によって $\psi' = U\psi$ と変換することを考えよう．ここで Lagrangian 密度がこの変換に対して不変である場合，この系は SU(N) 不変性を持っているという．この場合，群の表現論を用いて物理の状態を特定することができるため，この対称性は非常に有効であることが知られている．

4.2　相対性原理

相対性原理とそれに関連するローレンツ変換に対する対称性に関しては，どの場の理論の教科書にも詳しく議論されている．従って，ここではこの解説はしないが，基本的なことを少しだけ書いておこう．相対性原理の出発点は，座標系をどこに持って来たら良いかという問い掛けから始まっている．例えば，地球は太陽系の中にいるが，しかしその太陽は銀河系の外側を高速で周回している．その銀河系は宇宙の膨張にあわせて運動している．そうだとすると，どの座標系を取ったらよいのかわからなくなる．相対性原理とは慣性系である限り，どの慣性系をとっても物理的な観測量は同じであるという要請である．現在までのところ，これと矛盾する自然現象は観測されていないし，これは原理として十分意味があるものと考えてよい．

4.2.1　相対性理論

ある慣性系から他の慣性系へ移るときに，いかなる場の方程式も満たさなければならない変換則がある．それが相対性理論である．この変換則のことをローレンツ変換と呼ぶ．現在の場の理論はすべてこのローレンツ変換に対する不変性を持っている．ローレンツ不変な模型でないと，ある系で計算した結果が他の適当な慣性系で計算した結果と一致するとはかぎらなくなってしまうので模型として不適当である．その意味で，ローレンツ変換に対する不変性はどの模型も絶対に守らなければならないものである．

4.2.2　ローレンツ不変な Lagrangian 密度

実例として具体的な Lagrangian 密度を書いておこう．この Lagrangian 密度は量子電磁力学のものである．

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

この Lagrangian 密度の解説はしないが，すべての項がローレンツ変換に対してスカラーになっている．

4.3 Curie の原理

１９世紀の終わりには Curie が自然界の対称性に注目して，非対称性があるとしたらどのようにそれが実現されるのかという問題を研究している．彼は Curie の原理を提唱しているが，それは「非対称な現象はその原因がない限り自然界では起こらない」というものである．この原理が信用されている主な理由は，その原理自体が観測に基づいて求められているからである．

4.3.1 圧電効果と逆圧電効果

例えば，ある種の誘電体に外から機械的圧力を加えると，それに応じて物質の対称性が壊れて非対称になる．このことが電束密度を誘起して電気的な力が誘発されることになり，これが圧電効果の現象である．これは非対称性が起こるのは外力が原因であるという Curie の原理そのものを表している．この圧電効果の重要性はよく知られており，実際，最近のタッチパネルによる情報の伝達は多種多様に利用されている．

さらに逆圧電効果も知られている．これは，電圧を掛けて対称性を少し変えると，それを戻そうとする力が働き，例えば，水晶の振動になるのである．この原理をうまく利用して実用化したのがクォーツ時計である．

4.3.2 場の理論における Curie の原理

場の理論の模型でも Curie の原理が成り立っているべきであり，実際，原因がないのに系の対称性が自然に破れると言う事はあってはならない．ところが自発的対称性の破れという理論模型は，原因がないのに対称性が破れると言う事を主張している．しかし直感的にも，自然に対称性が破れたとしたら，何か特別なこと (計算ミス) が起こったと考えざるを得ない．南部達が主張した自発的対称性の破れの概念は，現実にはその理論計算の途中で，ある「重要な近似」を使ったことが対称性が破れたように見えた原因であることが証明されている．従って，場の理論模型においても Curie の原理は例外なく成り立っている事が現在はわかっている．厳しい言い方をすれば，自発的対称性の破れを提唱した人達が Curie の原理をもう少し深く理解していたならば，あのような愚かな理論を提唱することはなかったことであろう．

4.4　場の理論の対称性

場の理論の模型には様々な対称性があり，そのうちローレンツ変換に対する対称性は最も基本的なものである．それ以外にも，時間・空間の平行移動に対する Lagrangian 密度の不変性から，重要な対称性が知られている．時間も空間も場に対しては一様であるべきであることから，この平行移動の対称性はごく自然なものである．実際，この対称性は運動量とエネルギー保存則に関係していて自然界でよく成り立っていることがわかっている．

4.4.1　対称性と保存則

この平行移動の対称性から，エネルギーと運動量の保存則が導かれている．この保存則は エネルギー・運動量テンソルと呼ばれている量が保存されることから，証明されるものである．従って，この物理量は非常に重要な量になっている．式を書いてもあまり意味があるとは思えないが，重要なのでその定義だけを書いておこう．この エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ はある場 ψ から作られている Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ に対して次のように定義されている．

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}\,\partial^\nu \psi^\dagger - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

ここで $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ が成り立っていて，これがエネルギーと運動量の保存則そのものである．これは場の理論模型にとって最も重要な物理量となっている．

● 一般相対論のエネルギー・運動量テンソル：　ここで一つコメントをしておこう．一般相対論の方程式においてはその右辺にはエネルギー・運動量テンソルが現れている．これはある意味で非常に不思議ではある．それは一般相対論は粒子描像であり，場の理論ではないためエネルギー・運動量テンソルのような場の量を作ることは基本的には不可能である．従って，この一般相対論におけるエネルギー・運動量テンソルとはどのようなものであるのかを検証する必要がある．これはその定義を見るとわかることであるが，実は，星などの分布関数から作られたものである．従って，これは到底，基本的な物理量ではない．さらに，分布関数がどのように作られるのかは一般相対論が関知しない事でもあり，この点からみても一般相対論が物理学の基礎方程式にはなり得ない事がよくわかるものである．

4.4.2 グローバルゲージ対称性

場の理論の模型における対称性のうちで，グローバルゲージ対称性と呼ばれているものがある．それは状態関数 ψ を定数位相だけ回転したとき，その Lagrangian 密度が不変であるときに生じる対称性である．

● グローバルゲージ変換： ここで状態関数 ψ を $\psi' = e^{i\alpha}\psi$ と変換してその模型の Lagrangian が不変である場合，この模型はグローバルゲージ対称性があるという．現在までによく議論されてきたすべての模型は，この対称性を持っている．その場合，この対称性に付随してその模型は電荷保存が成り立っている．さらに，この対称性が自然に破れると言う事はないし，自発的対称性の破れとしてこのグローバルゲージ対称性が議論されることもない．

● カイラルゲージ変換： 自発的対称性の破れと関連して議論されている変換がカイラルゲージ変換であり，状態関数 ψ は $\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi$ と変換される．この変換に対して，質量項があるとその系にはこの対称性はないので現実的な模型ではない．実際，フェルミオンの模型で質量項がないとしたら，その模型には定数スケールがないため，自然界の記述には適していない．例えば，量子電磁力学においてはフェルミオンの質量により，次元を持つすべての物理的観測量が表現されている．従って，質量項のないフェルミオン模型は自然界を記述しようとする模型としては不適当である．

4.4.3 対称性とその破れ

一方において，南部達は非常に特殊な模型を考えて，カイラル対称性について議論した．それは「質量項をなくすことによりカイラル対称性がある模型」のことである．これは上述したように，質量項がないため現実的な模型ではないが，しかしおもちゃの模型として議論を展開したのであろう．

● 自発的対称性の破れ： この模型において南部達はこのカイラル対称性がその真空状態では「自然に」破れてしまうと言う事を主張したのである．これは物理的にどういう意味なのかが問題であるが，実際にはその模型の真空状態のカイラル対称性が自然に破れることはあり得ないことがわかっている．事実，破れていたわけではなく彼らが勝手にカイラル対称性自体が破れた状態になっていると思い込んでしまったのである．

● 間違いの原因：　何故，このような勘違いを起こしてしまったのかという疑問に対しては，二つの理由が考えられる．一つには，新しく求められた真空状態のカイラル電荷が自由場が持っているカイラル電荷とは異なっていたことと関係している．自由場のカイラル電荷はゼロであるが，新しく求められた真空状態のカイラル電荷はゼロではなかったのである．しかしこれは何か特別なことが起こったというわけではなく，状態によってカイラル電荷の固有値が異なるのは当然の物理的な結果である．例えば，水素原子の問題において，その系は空間対称性があり，水素原子の基底状態は角運動量がゼロの状態が実現されている．そしてそれは励起状態の角運動量とは異なっているが，状態がそれぞれ異なった固有値を持つことは当然のことである．

二番目の理由としては，彼らが用いた近似法にその原因がある．Bogoliubov 変換と呼ばれているもので，これが近似法であることは周知の事実である．さらに，この近似法を採用すると，見かけ上，質量項が現れる場合があることはよく知られていた．これに対して，質量項が現れたからこれはカイラル対称性が破れた結果であると南部達は短絡して誤解してしまったのである [2]．このような非常に基本的なレベルの間違いが物理の世界で長い間 (５０年以上も) 通用してきた事実は，驚きを超えて，悲惨でさえある．

● Weinberg-Salam 模型：　南部達の理論だけが世の中に流通していたならば，それ程深刻な状況は生まれなかったことであろう．この理論模型が Higgs によって，Higgs 機構として新しい模型になり，さらにそれが Weinberg-Salam 達によって標準理論として使われたために，その混乱が大きくなってしまったのである．但し，Weinberg-Salam の模型はそれよりももっと基本的なところで深刻な問題点があることが知られている．それは彼らの模型は非可換ゲージ理論であり，その模型の構成粒子は観測量ではないことが証明されている．従って，彼らの模型は「厳密に解いたらその構成粒子であるウィークボソンは観測量ではない」のであるが，「Higgs 機構という近似法を採用したためにウィークボソンがうまい具合に観測量になった」と主張していることに対応している．これは明らかに科学の論理ではなく，その意味で Weinberg-Salam の模型は自発的対称性の破れ以前の深刻な問題をすでに抱えていたのである．

但し，この Weinberg-Salam の模型は弱い相互作用における最も重要な CVC 理論を再現するように作られている．この CVC 理論は弱い相互作用関連のほとんどすべての現象をよく記述している模型である．従って Higgs 粒子を除去して，さらに非可換ゲージ理論ではない等の修正をすれば，自然現象をよく記述している理論模型であることは間違いない．

4.5 カイラル・アノマリー方程式

場の理論の模型がカイラル変換に対して不変であると，軸性ベクトルカレントが保存している．式で書くと

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0 \qquad (\text{但し} \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)$$

と書かれる．この保存則はフェルミオンの質量項が存在すると成立しない対称性から得られているため，現実の模型では見られない保存則ではある．

それではカイラルアノマリーとは，どのような物理現象であろうか？これは「１次発散を正則化したらアノマリー方程式が導出されたのだが，これが軸性ベクトルカレントの保存則を破ってしまった」というものである．Adler 達は，あるファインマン図 (三角形図) を計算した時に見かけ上現れた１次発散の無限大を正則化したのである．このように求められたアノマリー方程式は非常に斬新で独創的であり，このため人々を引き付けてしまったのであろう．普通，正則化という数学的な方法を採用して最も重要な物理の保存則を破ってしまった場合，これは正則化のどこかに間違いがあると考えるものである．ところが，その当時は「ゲージ条件」に対する理解が不十分であったこともあり，アノマリー方程式を人々が受け入れてしまったのである．物理学では，Noether の定理から導かれた保存則が単純な数学的手段などで破られることはなく，保存則はそれを破る相互作用がない限り，常に厳密に成り立っている．

物理学の理論体系からしたら，これは最も低いレベルのミステークであると言える．しかしこれが数十年に渡り人々に受け入れられてきた事も事実である．さらに悪いことに，超弦理論はこのアノマリー方程式をその理論構築の一つの根拠にしているのである．何故，このようなことが起こり得たのかという疑問に対する科学史的な考察は今後の研究に任せるしかないであろう．自発的対称性の破れの問題にしてもこのアノマリー方程式にしても，対称性について人々の理解がなかなか深まらなかったことが一つの原因でもあろうか？

さらに言えば，三角形図の計算に関しては，非常に正確な模型計算が Adler 達よりも前に西島先生によって提唱されている [1]．ところが，その論文 (実際には教科書における解説) がどういうわけか全く無視されて今日に至っている．このことがアノマリーの問題を野放しにしてしまった最も大きな原因であると言えよう．理論家各自が自分の手できちんと三角形図の計算を行っていれば，このような事態にはならなかったかも知れない．

4.6 Higgs 粒子の問題点

Higgs 機構の問題点を解説することは，それ程，大変なことではない．しかし同時にそれ程，面白い事でもない．実際，Higgs 粒子は存在しないことが，いずれ明らかにされることであろう．この Higgs 機構とはゲージ場が複素スカラー場と相互作用する場合，Lagrangian 密度の段階でゲージ固定してしまうことにより，ゲージ場に質量を与えようとする近似法である．これは物理学の論理としては到底，正当化できるものではない．

4.6.1 Higgs ポテンシャル

Higgs 機構を説明しようとすると，まずは Higgs ポテンシャルを解説する必要がある．これは不思議なポテンシャルである． Higgs 場はスカラー場なのでフェルミオンではなくボソン場であるが，そのボソン場が自己相互作用しているものが Higgs ポテンシャルである．しかし自己相互作用とは何か，と言うことが物理学では答えられていない．そのような自己相互作用は現実的なものとしては存在していないからである．

この「あり得ない相互作用」が提案されると，人々の反応は２つに分かれることになる．一つ目としては，これは非物理的であるとして排除する立場である．これは自然論学派としては当然取るべき方向であり，この形は自然界の記述には現れてこない相互作用であることが最大の理由である．ところが，第２番目の立場をとる人たちは，その考え方の独創性を評価するため，その模型に何か面白い物理があるかも知れないと期待するのであろう．そしてその期待が暴走すると，いつの間にか自然界との整合性の検証が二の次になってしまい，その模型が過大評価されてしまうのである．自己相互作用とはどのようなものなのかという，非常に基本的な概念をきちんと検証していれば，このような混乱は起こらなかったものと考えられる．

4.6.2 Higgs 機構

Higgs 機構自体は単純な模型計算である．ゲージ場が Higgs ポテンシャルと相互作用している系をまず考えることから始めている．この場合，スカラー場がゲージ場と相互作用する形はきちんと分っているわけではないため，その形を特定することはできない．しかし人々はミニマル変換という手法はゲージ不変だから，これがスカラー場とゲージ場が相互作用する形であろうと仮定し

て相互作用の形を決めたのである．しかし実際問題としては，自然界に有限質量のスカラー粒子は存在しないため，これは実験から正当化しようがないものであり，よくわからない．

しかしながらここでは，このミニマル変換の手法をひとまず受け入れて，ゲージ場と Higgs ポテンシャルの相互作用の形を決めたとしよう．そこで Higgs はある種のゲージ固定をこの全体の Lagrangian 密度に対して行ってしまうのである．通常のゲージ固定は運動方程式を解く時に変数の数と方程式の数を合わせるために行う物理過程であるが，Higgs はゲージ場に対するゲージ固定の条件式を Lagrangian 密度に代入して，ゲージ不変性を破ってしまったのである．このことにより，ゲージ場が質量を獲得したと主張したのが Higgs 機構である．何故，このような奇妙な過程が容認されたのかという問題は確かに不思議ではある．しかしこれは自発的対称性の破れと関係していると考えられる．対称性が自発的に破れるのだから，このような荒っぽいことをしても構わないという雰囲気がその当時には存在していたのであろう．また非常に独創的な概念であることも，この奇妙な理論が容認された一因でもあろうか？

このように，Lagrangian 密度の段階でゲージ固定したため，勿論，ゲージ不変ではない Lagrangian 密度になっている．従ってそれ以降は，ゲージ理論ではないので「非可換ゲージ理論ではその構成粒子が観測量ではない」という深刻な問題も回避されていると考えたのであろう．前述したように，「厳密に解いたら観測量ではないものが，近似をしたら観測量になってくれた」という論理は物理学では到底，受け入れられるものではない．この分野は，一体，どうしてこのような摩訶不思議な現象が横行していたのであろうか？

4.7　弱い相互作用の理論

弱い相互作用を歴史的に振り返ると学ぶところが多いものである．弱い相互作用とは，中性子がβ崩壊する過程を記述することができる理論体系である．この弱い相互作用における物理過程を理解しようとした最初の論文 (教科書での解説) はフェルミによって提案されている．

4.7.1　４点相互作用

フェルミは４点相互作用という模型を提案することにより，中性子崩壊の現象を理解する手掛かりを与えたのである．中性子の崩壊は中性子が陽子，電子そしてニュートリノへ崩壊するため，これは４個の粒子と関係している．従って，４点相互作用となっている．ここで粒子生成という非常に新しい概念が提唱されている．現在の場の理論ではこの粒子の生成・消滅を記述する場合，場の量子化を行うがフェルミはこれを行列要素で書いている．この表式はハイゼンベルグが行ったものであり，場の量子化と同じ結果を与えている．

4.7.2　パリティ非保存の相互作用

物理学における相互作用はいくつかの基本的対称性を持っている．その場合，それらのほとんどはその変換が連続変数による変換である．グローバルゲージ変換もその一つである．これら連続変数の変換から求められた対称性が基本的な相互作用の中で破れている現象は現在まで見つかってはいない．

一方，対称性の中には不連続な変数変換から導出された対称性も存在している．例えば，空間反転に対する対称性である．具体的には $r \to -r$ という変換 (パリティ変換) に対して，相互作用 Lagrangian 密度が不変であるかどうかという問題である．この変換に対して，電磁的な相互作用は不変であり，さらに強い相互作用も重力もこのパリティ変換に対して不変である．

ところが，弱い相互作用はこのパリティ変換に対して不変ではないことが実験・理論両面からわかっている．その意味では，フェルミの相互作用は不十分であることが知られていた．このパリティ非保存の形式を最初に導入したのが Lee と Yang である．その後，実験的にも弱い相互作用はこのパリティを破っていることが証明され，物理学会に大きな衝撃を与えたものである．しかしこれは自然現象を理解するという立場からは，至極自然なものとも言えよう．

4.7.3 CVC 理論

弱い相互作用の理論的な体系はゲルマンやファインマンやその他の人達により CVC(Conserved Vector Current) 理論として完成された．この CVC 理論により，弱い相互作用に関連するほとんどすべての現象がうまく理解されることがわかっていた．ところが，この CVC 理論は２次の摂動論を展開すると２次発散が出てしまうことも知られていた．これは理論形式の問題であるが，CVC 理論には何かまだ不十分なところがあることを示していた．

4.7.4 Weinberg-Salam 模型

CVC 理論は SU(2) という群で記述すると簡単に書けることがわかっていたため，Weinberg-Salam 模型はそれに準拠している．さらに，この当時はゲージ理論のみが正しい理論体系であるという思い込みが物理屋のなかに蔓延していたのであろう．このため，Weinberg-Salam 模型は SU(2) $\otimes$ U(1) という非可換ゲージ理論の模型として提案されたのである．しかしゲージ粒子は質量がないため，実験的な観測とは合わないものであった．その当時ウィークボソンの質量は少なくとも 10 GeV 以上であるという実験結果が報告されていた．

このため， Weinberg-Salam 模型ではこのゲージ不変性を何とか壊す必要があり，その時に採用された理論が Higgs 機構である．これは自発的に対称性が破れているわけだから，ある意味で何でもありの理論になってしまったのであろう．何度も強調しているが，Weinberg-Salam 模型は非可換ゲージ理論である．このため，その基本粒子である $W^{\pm}$, Z^0 ベクトルボソンは「厳密に解いたら観測量ではないが Higgs 機構という近似法を採用したためゲージ対称性が破れ，これらのボソンが観測量になった」と主張しているのである．しかしながらこの論理が受け入れられないことは議論する必要もないであろう．

● Weinberg-Salam 模型が実験を再現できる理由： 何故，この Weinberg-Salam 模型が標準模型として人々に信用されてきたかと言う疑問に対してはそれなりの理由がある．それはこの模型の最終的な Lagrangian 密度が CVC 理論を導出できるように調整されていたからである．従って，Weinberg-Salam 模型は理論的な整合性を別にしたら，実験をよく再現している模型と言うことができる．しかしだからと言って，この模型を評価することはできないのは至

極当然のことでもあろう．

4.8 非対称性の物理

ある対称性を持つ系に外力を作用させると，一般的にはその対称性が壊れることになる．これが非対称な物理現象である．ここでは重要な具体例のうちで，いくつかの興味ある現象について簡単に解説しよう．

4.8.1 ゼーマン効果

原子系は空間回転対称性 (およびスピン空間回転対称性) を持っているため，水素原子の $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態は縮退している．従ってスピンの状態関数 $\chi_{\frac{1}{2}}$ と $\chi_{-\frac{1}{2}}$ は同じエネルギーを持つ状態になっている．この状態に一様磁場 B を掛けるとこの磁場がスピン空間回転の対称性を破るため，縮退していたエネルギー状態に $\boxed{\Delta E = \pm\frac{e\hbar}{2m_e c}B}$ のような分裂が生じる．これはゼーマン効果と呼ばれていて，非対称な性質を示す現象のうちでも最も重要である．

- MRI(核磁気共鳴)： 物理学において，最も幅広く応用され様々な機器に実際使われている現象がこのゼーマン効果であろう．例えば，MRI(核磁気共鳴) は今や，日常的に使われているものである．これは磁場を掛けることにより水分子中の陽子状態がゼーマン分裂する機構を応用したものである．

- 偏光ゼーマン法： また，体内に蓄積された有機水銀の量を測定するため，その試料に磁場を掛けておき，偏光したフォトンの吸収率を測ることにより有機水銀の量を「絶対測定」する手法も開発されている．これは非対称現象をうまくとらえて，偏光したフォトンの磁気量子数の保存則を利用した極めて精巧な技術と言えよう．

4.8.2 電気双極子の物理

誘電体に外から電場 $\boldsymbol{E}$ を掛けると，誘電体においては電気双極子が誘発されてそのために $\boxed{\Delta E = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}}$ というエネルギーシフトが生じる．これはもともとの結晶は中性なのだが，そこに電場を掛けたため対称性が壊れて偏極が生じたことに対応している．但しこの現象は物質の中で起こっているものであり，孤立系 (例えば水素原子）ではその電気双極子がゼロであるためこの現象は起こらない．孤立系の電気双極子が有限だとこれは「時間反転不変性」を壊すことになり，現在まで時間反転不変性を破る現象は発見されていない．

4.8.3　シュタルク効果

電場 $\boldsymbol{E}$ を $z-$ 軸方向に掛けると相互作用として $\boxed{H' = ezE}$ が現れる．この相互作用は電気双極子と電場の相互作用そのものである．これは空間回転の対称性を破り，さらに空間反転対称性も破っている．この相互作用の形を見ればわかるように，水素原子の基底状態での期待値はゼロでありこの効果の影響はない．しかし励起状態にはパリティの異なる縮退した状態 $(2s,\ 2p)$ がありこの場合，１次の摂動計算により確かにこの影響を確認することができる．

4.8.4　スピン－軌道相互作用

量子力学で水素原子を勉強すると，必ず，スピン − 軌道相互作用と言うものが出てくる．これは Dirac 方程式の非相対論近似から得られる項であり $\boxed{H' = \xi(r)\,\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s}}$ の形である．この相互作用は軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ に比例しているため空間回転の対称性を破っている．この破れは勿論，近似により生じたものである．Dirac 方程式は相対論的な方程式であり，Lorentz 空間における回転対称性を持っている．しかし非相対論近似を実行するとこれは当然，Lorentz 対称性を破ることになり，従って，このようなスピン − 軌道相互作用が現れるのである．水素原子においてはこの非相対論近似は非常に良い近似であることが実際の計算で簡単に確かめることができる．

4.8.5　圧電効果

圧電効果とはある種の結晶体に機械的応力を掛けるとそれに応じて電気分極が起こり，電束密度が生じる現象である．これは Pierre Curie が１００年以上も前に発見しているもので，機械的な力が結晶構造の対称性を少し壊すため起こる現象である．この応用は非常に広範囲に渡っている．特に液晶画面に手で触れてそれを電気信号に変換する機構はこの圧電効果の応用そのものである．

4.9 繰り込み理論と対称性

繰り込み理論に関しては，Dirac の主張が何故，人々に無視されたのかと言うことが最も重要であろう．第１章では繰り込み理論の大雑把な解説をしているが，実はこれ以上に詳しく説明しようとすると，どうしても数式をふんだんに使わざるを得なくなる．それはこの本の趣旨ではないので，ここでは，繰り込み理論を対称性の観点から見直してみようと思う．また科学史的な観点からも繰り込み理論について少し考察してみよう．

4.9.1 局所的ゲージ対称性

繰り込み理論それ自体は特に対称性と関係しているわけではない．しかしその繰り込みの考え方は，実は，局所的ゲージ対称性と密接に関係している．何故,「局所的 (local)」と言う言葉を使うかは明らかであろう．このゲージ変換 χ が時間と空間の関数となっているからである．実際，ゲージ対称性とは Lagrangian が局所的ゲージ変換という非常に特殊な変換に対して不変であることと関係している．局所的ゲージ変換とは，ある場の変数，今の場合ベクトルポテンシャルを任意の関数の微分量だけ平行移動 ($\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi, \quad A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}$) しても Lagrangian は不変である (Lagrangian が χ には依らない) と言うことが出発点である．量子電磁力学ではこれに加えて，フェルミオン場についても，任意関数の位相分 ($\psi' = e^{ie\chi}\psi$) だけ変換する操作を含んでいる．

局所的ゲージ対称性の重要性は明らかで，これによりフェルミオン場と電磁場の相互作用の形が一意的に決まってしまうのである．ゲージ理論で相互作用が決まる模型としてもう一つ，量子色力学 (QCD) が知られている．ところが，この QCD 模型の場合，相互作用の形が確かに決定されるのであるが，その後，摂動論が展開できないため事実上，観測量の計算は不可能である．その意味においてゲージ理論として計算可能な模型は実は QED だけである．

4.9.2 電子の自己エネルギーの発散

QED において摂動論を展開して電子の自己エネルギーを計算すると，その計算結果は無限大 (Log 発散) になってしまう事がわかる．この場合，電子の自己エネルギーの発散をどうとらえるかが問題である．古典電磁場においても，電子の作る自己電場を求めてその全エネルギーを計算すると，電子の自己エネルギーは発散している．しかし，どの教科書でもこの電子の自己エネル

ギーの発散について何かを変えようという議論もなく，そのまま放置すればよいことになっている．それは当然で，この電子の自己電場のエネルギーは観測量ではないので，何も困ることはない．すなわち，電子が他の物質と相互作用をしない限り，その自己エネルギーを測定することもできないし，物理的な観測量になることもない．

4.9.3　電子の磁気能率補正

ところが，量子場の理論においては，電子の自己エネルギーが発散することは理論的に問題だとして，その無限大を打ち消すために，カウンター項を Lagrangian 密度に足し算するのである．これにより，今度は自己エネルギーの発散が抑えられた形式ができたと思い，これが繰り込み理論の出発点になっている．この形式により観測量である電子の磁気能率補正を計算すると，やはり発散項がでてしまうのであるが，この発散項を電子の波動関数に押し込める形式を発展させたのである．何故，電子の波動関数にこの無限大を押し込めることが出来たのかと言う疑問に対しては，簡単に答えることができる．それは，自己エネルギーの無限大の形と電子の磁気能率補正の無限大の形とが全く同じものであったことに依っている．この手法はいかにも人工的ではあるが，この場合，有限量が電子の磁気能率の観測値と非常によく一致していたため，人々はこの繰り込み理論を受け入れたのであろう．実は，この磁気能率補正の計算にはもう一つ赤外発散の無限大が存在していることが知られている．しかしこれは波動関数に繰り込むことはできないので人々は単純に捨てているのである．計算結果に無限大があっても，その中の有限量が実験値とよく一致すればそれで良いとした理論計算を人々が受け入れてきたことは事実である．これはよく考えてみると非常に不思議な論理ではあるが，無限大に対して割合よく見られる現象でもある．しかし，科学史的に検討してみたら，これは他の分野でもよくあることなのであろうか？

4.9.4　フォトンの自己エネルギーの発散

フォトンの自己エネルギーは２次発散している．これは電子の自己エネルギーが Log 発散している事とは好対照である．ここでこのフォトンの自己エネルギーの無限大に対して，人々はこの２次発散を何とか処理する必要があると思い「ゲージ条件」を導入したのである．この「ゲージ条件」が問題で物理

的にも数学的にも間違っていることがわかっている．このような条件を付けることにより，フォトンの自己エネルギーを繰り込める形にしようと考えた動機がよくわからない．フォトンの自己エネルギーが発散しても何も問題を起こさないのに，何故，人々はこの「ゲージ条件」に固執したのか，今となっては謎ではある．この現象も科学史的に究明する必要があると思われる．

● 有限質量ベクトルボソンの自己エネルギー： 簡単な計算ですぐに確かめられることであるが，実は，有限質量ベクトルボソンの自己エネルギーも同様に２次発散している．しかし不思議なことに，この２次発散に対しては誰も問題にはしていなく，議論さえもされていないのである．このことを理解すればわかるように，フォトンの自己エネルギーが２次発散していることはゲージ理論の特殊性ではない．つまりはフォトンを含めたベクトルボソンの自己エネルギーの２次発散はゲージ理論とは無関係な発散であったのである．

4.9.5 観測量の計算における発散の原因は？

通常の計算において，観測量の計算結果に無限大が出てきたら，その計算がどこかで間違っているか，あるいはその定式化のどこかに誤りがあるかと細心の注意を払って計算を検証するものである．確かに，人々は様々な形でこの検証を行っている．しかしながら，これはゲージ不変性の理解が不十分であったことが最も大きな原因であることが，今となっては明らかである．もし人々が，有限質量ベクトルボソンによる電子の磁気能率補正をきちんと計算していたら，話は全く別の展開になっていたことであろう．この有限質量ベクトルボソンによる電子の磁気能率補正の計算結果には，どこにも発散はない [3]．つまりは，ファインマンのフォトン伝播関数を用いた電子の磁気能率補正にのみ，Log 発散が現れているのである．このことを認識していたら，ゲージ理論のみが特殊であることが明らかになっていたことであろう．将来，科学史の研究者はこの問題をどうとらえてゆくのであろうか？．

● ファインマンの伝播関数： フォトンによる電子の磁気能率補正の計算に無限大が出てきたのは，フォトンの伝播関数としてファインマンの伝播関数を用いたことに依っている．そしてこの伝播関数が正しくないことは昔の場の理論の教科書でしっかり議論されている [6, 7]．しかし，いつの間にか，このファインマンの伝播関数がフォトンの正しい伝播関数であると人々が思い込んでしまったのである．この理由は一つには，繰り込み理論が過大評価されてしまったことに原因があると思われる．もう一つ，このファインマンの伝播関数の取

扱いが非常に簡単であることが大きな原因でもあろうか？フォトンの正しい伝播関数は勿論，よく知られていたがこの取扱いが専門家にもかなり複雑であり，人々はファインマンの伝播関数を使うことにしたのであろう．さらに言えば，電子ー電子散乱の場合，どちらの伝播関数を使っても散乱振幅は同じに求められることも知られていた．これらいくつかの偶然が重なって，現在の繰り込み理論に対して，ほとんど無防備なまでに人々がこの理論形式を受け入れてしまい，そしてそれが定着したのであろう．

現在，繰り込み理論の問題点を指摘しても，ほとんどの「いわゆる専門家」達はその批判内容を検討はしないで，単純に (少なくともしばらくの間は) 無視し続けることであろう．尤も今となっては，繰り込み理論においてその専門家と言えるような研究者はいなくなってしまったと言えるかも知れない．しかしながら，恐らく，繰り込み理論の提唱者達は (特に，朝永博士がもし生きておられたら) この理論に対する新しい知見と進展を喜んでくれると思うのだが，どうであろうか？

4.9.6　Dirac の主張が何故，無視されたのか？

繰り込み理論に関して，Dirac の最も最近の論文は１９８１年に出版された AIP 会議報告書であろう．その報告書以前からずっと，Dirac は繰り込み理論に対する問題点をかなり強く主張し，指摘している．ところが，歴史的にはこの繰り込み理論に対する批判は，物理屋にはほとんど見向きもされなかったのである．これは科学の考え方を教える科学教育の立場からするとかなり深刻な問題であり，科学史的にきちんと検証するべき事象である．１９８１年の AIP 会議報告書を読むと，その論理の確かさに仰天し，強い感銘を受けるものである．この論文を書いた時に Dirac は８０歳近い年齢であることを考えてみれば，なおさらに彼が繰り込み理論に対して非常に憂えていたことがよくわかるものである．それは，この繰り込み理論が現代物理学の基礎として君臨してしまったことに問題がある．電子の磁気能率補正の計算にのみ，この繰り込み理論が応用されたのならば，まだ，その被害は最小限になっていたことであろう．ところが現実の物理の世界では，繰り込みができる理論模型，できない理論模型とわけていて，そのため，ゲージ対称性を持つ理論のみが正しい理論であるという風潮が蔓延していたのである．実際には，ゲージ理論に対してのみ，観測量に奇妙な無限大が現れることが，今は証明されている．さらには，正しい伝播関数を用いれば，恐らくフォトンの磁気能率補正の計算にも発散は存在しないことであろう．しかし，Dirac はこれらの事を知らない段階ですで

に，繰り込み理論の問題点を繰り返し指摘していたのである．この Dirac の主張に対して専門家が耳を傾けなかったことは，一体，何故なのであろうか？

4.9.7 繰り込み理論迷走の原因

現在までに，繰り込み理論が迷走した主な原因がわかっている．それは「フォトンの波動関数を解いて条件式を求める」と言う作業を怠ったことである．付録で解説しているように，自由電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

である．この方程式を自由粒子の状態で展開して偏極ベクトル ϵ^μ に対して解くと， $k^2 = 0$ という分散関係式が求まる．これをもとの式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0$$

という Lorentz 条件の式が得られる．これは信じられない事であるが，これまでこの条件式を求めることなしに，QED における繰り込み理論が議論され展開されてきたのである．このような重要な条件が一つ足りなくて繰り込み理論を議論しても，これが正しい方向性とその結果を与えるはずがないのである．これまで，この方程式を解く作業を忘れていた事実は非常に重いものであり，これが繰り込み理論迷走の主な原因になっている．

4.9.8 今後の方向

繰り込みをする必要がなくなったと言うことは，現代物理学においてはどのような影響があるのであろうか？これは一言で表現することは難しいとは思うが，しかし場の理論の形式が非常に簡単になったことは確かである．現代物理学はすべて場の理論で書かれているが，これから物理的な観測量を計算する場合，摂動論の形式をきちんと実行すれば正しい答えが求められると言うことである．現実問題としては，強い相互作用の基礎理論である量子色力学は非可換ゲージ理論であるため，摂動計算が不可能である．このため，もともと繰り込み理論とは無関係であったので影響はほとんどないと考えられる．一方，重力理論は場の量子化をする必要がなかったため，繰り込み理論とは無関係であった．このため，繰り込みが必要かどうかの問いかけ自体が存在しないので，影響はもともとなかったのである．さらに弱い相互作用では観測量に対してそもそも発散項は存在しないため繰り込みは不要であった

第５章　一般相対論

この本の主な目的は新しい重力の理論をきちんと，しかしわかり易く解説することにより重力に関して多くの読者に興味を持ってもらう事である．重力について解説した場合，読み手の理解の程度は千差万別であろうし，それぞれ独自の興味とその視点に強く依存しているものと思う．しかしながら，重力理論に親しむためには，まずは一般相対論がどういう理論であるかという事をある程度知っている必要がある．それはこれまで１世紀近くという長い期間に渡って，一般相対論は重力の理論であるという考え方 (思い込み) が人々の間に浸透し，そしてそれが受け継がれてきたからである．

このため，まずは一般相対論をわかり易く解説することが重要であり，この作業はこの本の主題である「新しい重力の理論」を議論する前に実行した方が良いと考えている．読者が一般相対論に対する大雑把な，しかし正確なイメージを持つことができれば，この本を読んでみようという思いが芽生えてくる可能性があると思っている．それだけ，一般相対論という言葉が人々の頭の中に食い込んでいるということである．

しかしながら「一般相対論とは何なのか？」と言う問いかけに対して，この分野の専門家はどの程度的確に答えられるものであろうか？現実的な問題として，新しい重力理論がわかっていないと，一般相対論の本質を理解することは非常に難しいものである．このことは一般相対論の理論体系が観測にかかる物理量では表現されていないことによっている．従って，巷に氾濫している一般相対論の解説書の大半が分かりにくいことは，それ程不思議な事ではない．しかし一方において，ときに SF 小説が面白いのは作者の想像力のセンスが優れているからでもあり，それと同様に一般相対論のある種の解説本が人気が高い場合があったとしてもそれ程不思議な事ではない．それは想像の世界の産物として面白おかしく書かれているからであろう．しかしながら，SF 小説は科学とは無縁のものであり，特に問題にはならないことも確かである．

ここではできる限り平易な言葉を使って，一般相対論とは何かという問題の解説に挑戦しようと思う．この場合，常に念頭には新しい重力理論を置いてあり，それと比較しながら一般相対論を解説して行こう．

5.1 Einstein 方程式とは何か？

一般相対論は実験から出発していないので，その理論の根拠となるような現象は自然界には存在していない．一方において，現代物理学のすべての理論体系はこれとは好対照をなしていて，必ず，対応する自然現象が存在していて，その理解のために理論を構築している．

それでは，Einstein 方程式は何処から出てきたのであろうか？本人の主張によれば，これは純粋に理論的な推論の結果として導出された理論体系であると言う事になっている．しかし著者の推測によれば，アインシュタインは元々は力学の方程式を相対論化したかったのではないかと考えられる．当時の状況を考えてみれば，Newton 方程式と Maxwell 方程式が物理学のすべてであった．しかし単純に運動学を相対論化しても，正しい力学の方程式が得られる保証はない．それで電磁気学と同じように，ベクトルの連立方程式かテンソル型の方程式を求めたかったのであろう．ところが力学ではテンソルに対応するような物理量は存在していない．そこで計量テンソルを考えたのであろう．

5.1.1 計量テンソル

計量テンソルという言葉を見て，これは読むのをやめようかなと思われる読者が少なからずおられるものと推測している．しかしこれを解説しない限り，一般相対論を説明することはできない．それは最初に書いたように，一般相対論が具体的な自然現象から発想を得ていないので，どうしても方程式そのものを解説するしか方法はないのである．そしてその方程式は「計量テンソル」を未知変数とした方程式なのであり，計量テンソルを決定することが一般相対論の目的のすべてとなっている．以下に簡単な数学を少し書くことになるが，数式がひどく嫌いな読者の場合，この部分を読み飛ばしても一般相対論の解説を理解する事に特別な支障はないと思っている．物理学においては数学は言語であり，その言葉を使うと様々な現象を比較的簡単に記述できるのである．

5.1.2 Minkowski の計量テンソル

計量テンソルという概念は Minkowski から来ている．この場合は非常に単純であり，わかり易いものである．これは Lorentz 変換における不変量と

関係している．それでその不変量を調べてみると

$$(ds)^2 \equiv (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{5.1}$$

という４次元の微小２乗距離が不変量であることがすぐに確かめられる．何故，微分量で書くかということであるが，これは Lorentz 変換においては２点間の距離が不変である事によっている．そして微分は微小距離に対応しているからである．これは３次元での回転不変性が距離 (長さ) である事と同じである．Minkowski の計量テンソルとは，この式 (5.1) で

$$(ds)^2 \equiv (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{5.2}$$

における最後の式の $g^{\mu\nu}$ の事を言っている．ただし，

$$\begin{aligned} dx^\mu &= (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \equiv (cdt, dx, dy, dz) \\ dx_\mu &= (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (cdt, -dx, -dy, -dz) \end{aligned}$$

と定義している．ここで式 (5.2) において μ が２回現れたらこれは $\mu = 0, 1, 2, 3$ の和を取る約束となっている．従ってこの右辺の意味は

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \quad & g^{00} dx_0 dx_0 + g^{01} dx_0 dx_1 + g^{02} dx_0 dx_2 + g^{03} dx_0 dx_3 \\ + \quad & g^{10} dx_1 dx_0 + g^{11} dx_1 dx_1 + g^{12} dx_1 dx_2 + g^{13} dx_1 dx_3 \\ + \quad & g^{20} dx_2 dx_0 + g^{21} dx_2 dx_1 + g^{22} dx_2 dx_2 + g^{23} dx_2 dx_3 \\ + \quad & g^{30} dx_3 dx_0 + g^{31} dx_3 dx_1 + g^{32} dx_3 dx_2 + g^{33} dx_3 dx_3 \end{aligned} \tag{5.3}$$

である．この式より $g^{\mu\nu}$ はすぐにわかる事である．すなわち，

$$\{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta^{\mu\nu} \tag{5.4}$$

となっている．ここで $g^{\mu\nu}$ の行列表現の場合，$\{g^{\mu\nu}\}$ と括弧をつけたが特別な意味はない．一般的には $g^{\mu\nu}$ は行列の成分を表すが，行列全体を表す表記としても良く使われている．ここで $\eta^{\mu\nu}$ は Minkowski の計量テンソルとして定義されている．これは単純に式 (5.2) を書き直しただけであり，この計量テンソルに特別な物理的意味があるわけではない．さらに式 (5.4) の計量テンソルは Lorentz 変換と一致しているため物理的には至極，合理的なものである．

5.1.3 計量テンソルの拡張

一般相対論の方程式ではこの計量テンソルを拡張して，これが座標の関数であるとして $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x^\sigma)$ と書いている．但し $x^\sigma = (t, x, y, z)$ と表記している．しかし計量テンソルが時空点に依存するとは一体，物理的に何を意味しているのであろうか？ $(ds)^2$ は Lorentz 空間における微小２乗距離であり Lorentz 変換に対して不変である．しかし，微小距離を測る定数が時空点の関数になった場合，これは一般的には Lorentz 変換の不変性を破ることになっている．

5.1.4 定数スケールの不在

この計量テンソルは無次元であり，また定数スケールが存在しない．定数スケールとはその系におけるすべての物理量を記述する単位になるものであり，物理において最も重要な役割を果たしている．量子力学においては電子の質量が定数スケールの役割を果たしていて，長さも質量もエネルギーもすべて，電子の質量で測定されている．しかしながら，定数スケールの存在しない世界ではその世界の大きさを議論することはできない．

- 定数スケールの役割： 例えば，もし Maxwell 方程式においてその電荷が質量を持っていなかったとしたらどうなるのであろうか？この場合，電場の形は決めることはできても，電場に現れる距離 r を測定する単位が存在しないことになる．従って，この定数スケール不在の理論では電磁的な現象を記述することは物理的に不可能なことである．この事は非常に重要な事でもあり，頭の片隅に入れておく必要がある．

5.2 Einstein 方程式

このように理論的な推論によって構築された Einstein 方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \tag{5.5}$$

と書かれていて，$g^{\mu\nu}$ が未知関数である．$R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソルとよばれる量で，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の２回微分で書かれている． $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものであり，G_0 は重力定数である．この方程式は簡単に言えば，星のように質量が分布していたら，その星の空間の計量テンソ

ルが Minkowski の計量テンソルからずれてしまうと言っている．

5.2.1 Ricci テンソル

Ricci テンソル $R^{\mu\nu}$ を具体的に書いてもあまり意味はないと思われるが，定義式だけ書いておこう．

$$R^{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} \tag{5.6}$$

$$\text{但し} \quad \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{5.7}$$

である．これは微分幾何の言葉を使用しているが，この表現に物理的に特別な意味があるわけではない．

5.2.2 重力場の Poisson 型方程式

ここで Einstein 方程式と重力場との関係を議論しよう．但し，この部分には物理的には正当化できない仮定がなされている．それは計量テンソルと重力場との間にある関係式を仮定することである．すなわち弱い重力場では

$$g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g \tag{5.8}$$

という関係があると仮定されている．この場合，$T^{00} \simeq \rho$ でもあることから，この重力場 ϕ_g に対する方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi_g = 4\pi G_0 \rho \tag{5.9}$$

と書かれる．ρ は質量の分布関数である．この方程式 (5.9) で $\rho \simeq M\delta(\boldsymbol{r})$ とすれば，重力場 ϕ_g が $\phi_g = -\frac{MG_0}{r}$ と求まり，これは勿論，実験的に知られている重力場 ϕ_g と一致している．しかし当時，この Poisson 型方程式を導出する理論がわかっていたわけではない．この式 (5.8) を仮定すれば，重力の Poisson 型方程式が導出されるとして，Einstein 方程式は作られたのであろう．

5.2.3 一般相対論と重力理論の関係

一般相対論がこれまで信じられてきた主な理由はアインシュタイン方程式から重力場のポアソン型方程式 (5.9) が導出されると考えられていたからであ

る．ところがこの導出を証明することは実は不可能である．その証明には物理的に正当化できない方程式 $\boxed{g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g}$ が仮定されているからである．その式を仮定すれば確かに，重力ポアソン型方程式 (5.9) が導出されることが簡単に確かめられる．

● 力学変数と座標系： ところが，この仮定の式 (5.8) は物理的に無意味である事がすぐにわかる．それは，計量テンソルは座標系であるのに対して，重力場 ϕ_g は無次元ではあるが，力学変数である事に依っている．これは異なるカテゴリーを足し算しているため，どのように頑張っても物理学の式として承認することには無理がある．繰り返すが $g^{00}(x)$ の右辺の１は座標系の単なる数字であり，ϕ_g は力学変数である．この ϕ_g は運動方程式の解であり、その解が座標系に現れる事は物理的に許される事ではない。しかしこの式を認めたため，一般相対論が重力理論であると人々は思い込んできたことは事実である．

5.2.4 等価原理

一般相対論を構築する際の根拠は等価原理である．これは思考実験 (Gedanken Experiment) から求められており，対応する自然現象が存在しているわけではない．それでは「等価原理とは何か」が問題となってくる．何が等価であるのか？それは,「一様重力場での物理と等加速度運動をしている系での物理が同じである」という仮定である．例えば，一様重力場での粒子の加速度は $\ddot{z} = -g$ であるから，確かに重力場における加速度と重力定数 g は同じである．しかし，これは Newton 方程式そのものであり，特に新しい問題ではない．

● 等加速度運動系： ところが，アインシュタインは等加速度運動系という非現実的な系を仮定したのである．実際，エレベーターの系を考えて，その系が慣性系と同じであるとすると，どうしても光が曲がったり空間が歪むような現象を考えざるを得なくなる．しかし実際は，エレベータの系と言っても，空間が動いているわけではなくエレベータの箱が動いているだけである．一方，慣性系の場合，空間がその系ごとに定義できており，またその慣性系における観測者の存在も定義されている．等速直線運動をしている電車において，その電車の箱を取っ払ったとしてもその空間は定義されている．このため，観測者の存在を仮定することができるのである．

● 空間と座標系：
ここで物理学でいう「空間とは何か」について解説しよう．物理学で言う空間とは実は「座標系」のことである．さらにこの空間とは「慣性系の空間」のこ

とであり，この事を正確に理解する必要がある．今，地上の静止系を座標系 A として導入し，観測者 A は原点にいるとしよう．この時，等速直線運動をしている電車を考え，その電車の運動座標系 B を定義して，観測者 B はその座標系の原点にいるとしよう．ここで物理において使われている「空間」とは，座標系 B が動いているためその空間が一緒に動いているという言い方をしている．この時，電車の箱が取り払われたとしても観測者と座標系は何も影響を受けない．そしてそれぞれの系で同じバネの実験をするとすべて同じ観測量が得られることがわかり，これが相対性原理の根幹となっている．一方，等加速度運動系で同じことをしようとしても，ある速度 (加速度) で箱が取り除かれると，観測者はその系に存在することはできない．従って，物理で使う空間とは，結局，慣性系で定義された座標系とその観測者の事だと考えれば間違えることはない．

5.2.5　Einstein 方程式の定数スケール

Einstein 方程式 (5.5) において，そのスケールは何で測られているのであろうか？この方程式は座標系に対してたてられた式であるため，そこに現れる基本的なスケールを正確に把握しておく必要がある．このスケールの問題を理解するためには，これまでによく理解されている電磁気学の方程式でまず，その内容を明らかにすることが必要であろう．

● Maxwell 方程式における定数スケール：
Maxwell 方程式における定数スケールを議論するために，Maxwell 方程式をベクトルポテンシャル $(\phi,\ \boldsymbol{A})$ で書いた方程式から見てみよう．この場合，Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) = -\rho \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{j} \tag{5.11}$$

である．この左辺は２階の微分で書かれているが定数スケールはない．一方，右辺をみるとこれは電荷密度分布と電流密度分布であり，これは Dirac 方程式により決定されている．Dirac 方程式では電子の質量が定数スケールになっていて，距離 r はすべて電子の質量により測られている．従って，Maxwell 方程式におけるスケールは電子の質量によりすべてが測られている事がわかっている．この事は物理学の本質と関係しているのでじっくりと考える必要があ

る問題である．

- 量子電磁力学：

これはコメントであるが，昔，量子電磁力学 (QED) を研究していた折，電子の質量をゼロにした模型計算を実行した事があった．ところがこの場合，QED においてスケール不在となるため，すべての物理量がどう書いたら良いのかわからなくなり，その深刻さに仰天したものであった．当時，カットオフ Λ がスケールの役割をすると解釈していたが，しかし今では，このカットオフの物理は理論的に意味をなさないことがわかっている．

- Einstein 方程式の定数スケール：

それでは Einstein 方程式の定数スケールはどうなのであろうか？Einstein 方程式 (5.5) の左辺には定数スケールがない．計量テンソルは無次元の未知変数であり，Ricci テンソル $R^{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ の２回微分で書かれているので定数スケールは現れようがない．一方，右辺は星の密度分布で書かれているのでそこには星の質量が現れている．従って，Einstein 方程式の解である計量テンソルの座標 r は星の質量を単位として表現されている．実は，重力定数 G_0 も次元を持っているが，この定数が現象を記述する場合の「次元」に関係するのかどうかは良くわからない．いずれにせよ，Einstein 方程式は計量テンソルを時間・空間の関数として決定する方程式である．そして，その計量テンソルの座標は最終的に星の質量で測定されている．これは物理的には，相当，奇妙な状態になっている．

5.3 Einstein 方程式の解

ここで最も重要な問題はこの Einstein 方程式 (5.5) の解が求まった時，その解に対してどのような物理的な解釈ができるかである．その方程式を如何に解くかという事は，実は大して重要な問題ではない．Einstein 方程式 (5.5) を解くと計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が決定されるが，ここで簡単のために，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が Minkowski の計量テンソル $\eta^{\mu\nu}$ から少しずれて決定される場合を議論しよう．そしてその形を

$$g^{00}(x^\sigma) = 1 + C_0(x^\sigma) \tag{5.12}$$

$$g^{11}(x^\sigma) = g^{22}(x^\sigma) = g^{22}(x^\sigma) = -(1 + C_1(x^\sigma)) \tag{5.13}$$

としよう．ここで $g^{\mu\nu} = 0 \ \ (\mu \neq \nu)$ を仮定している．この場合，$C_0(x^\sigma),\ C_1(x^\sigma)$ も無次元量である．従って，式 (5.2) における $(ds)^2$ は変更を受けて

$$(ds')^2 = (1 + C_0(x^\sigma))(cdt)^2 - (1 + C_1(x^\sigma))((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) \tag{5.14}$$

となる．Einstein 方程式の解が上記のように求まった時，この後どうするかが重要な問題である．そこには二つの可能性がある．一つ目は相対性理論を順守し，微小２乗距離 $(ds)^2$ を不変に保つことである．一方，もう一つの可能性として相対性理論はあきらめて，それを無視した新しい展開を考えることである．そして Einstein やその追随者はこの後者を選んでいる．

● 相対性理論を順守：　相対性理論を順守するためには，求められた微小２乗距離 $(ds')^2$ が元の不変量 $(ds)^2$ に一致するべきである．この場合，明らかに

$$C_0(x^\sigma) = 0, \quad C_1(x^\sigma) = 0 \tag{5.15}$$

となり，結局，何も起こらなかったことになっている．

● 相対性理論を無視：　一方，Einstein 方程式の解に対するこれまでの解釈は相対性理論の要請を無視する事である．この場合，計量テンソルは時空点の関数となっている．この物理的な解釈は良くわからないが，しかし，以降の一般相対論の議論はすべてこの相対性理論とは矛盾する解から出発している．すなわち微小２乗距離はもはや最も基本的な不変性の要請を充たしていない．

5.3.1 Schwarzschild の解

ここで Einstein 方程式の解として有名な Schwarzschild の解について解説しよう．まず，$(ds)^2$ を極座標表示で書いておこう．この場合

$$(ds)^2 = A(r)(cdt)^2 - B(r)(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2 \tag{5.16}$$

となる．ここで $A(r),\ B(r)$ は Einstein 方程式の解として決定されているべき量である．ここで球対称性を仮定し，また真空の時空を仮定して得られる最も簡単な解は

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2G_0M}{c^2r}\right)(cdt)^2 - \frac{(dr)^2}{\left(1 - \frac{2G_0M}{c^2r}\right)} - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2 \tag{5.17}$$

となっている．これが Schwarzschild の解である．座標系は観測者が設定するものであり，そこで定義した微小２乗距離の中に星の質量 M が入っている事に違和感を覚えるものであるが，その物理的な意味はさらにわからない．

- ブラックホール： この式 (5.17) で $\boxed{1 - \frac{2G_0M}{c^2r} = 0}$ を充たす r の事をブラックホール半径と呼んでいる．それは

$$R_g = \frac{2G_0M}{c^2} \tag{5.18}$$

と書けている．この半径よりも小さい部分では微小２乗距離が負になってしまうため，この範囲においては座標が定義できなくなり，従ってブラックホールと言うわけである．ところが，これは座標系であり，自然界を記述しようとして観測者が用意したものである．これが定義できなくなったら，普通の感覚からしたらどこかで間違いを犯したと考えるべきである．ここで注意するべき事は，この式 (5.17) は星の成り立ちとは無関係であり，さらにそのダイナミックスの情報は何処にも入っていない方程式であると言う点である．

5.3.2 Friedmann 宇宙

Friedmann が求めた方程式は微小２乗距離 $(ds)^2$ を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - a(t)^2((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) \tag{5.19}$$

と書いて $a(t)$ に対する方程式を求め，そしてその解を書きだしたものである．ここではその解の一つを書いておこう．例えば

$$a(t) = a_0 t^{\left(\frac{2}{3(1+\kappa)}\right)} \tag{5.20}$$

と書ける解が知られている．ここで κ は定数である．例えば $\kappa = 0$ の場合，空間が膨張する解であるとして知られている．

● 座標系が膨張？：　しかしながら，ここでこの結果をきちんと検証することが重要である．$a(t)$ はスケールを持たない量である．従って，これが定数倍だけ大きくなったとした時，それが物理的に何を意味しているのかを吟味する必要がある．一般的に言って座標系の (x, y, z) は変数であり，これに定数倍しても別に何かが起こったことにはならない．座標系での (x, y, z) は粒子や場を記述するために導入している．このため新しい座標系として，例えば

$$dx' = a(t)dx, \quad dy' = a(t)dy, \quad dz' = a(t)dz \tag{5.21}$$

と定義しなおしても，自然現象の記述には全く問題ない事である．この場合，新しい座標系 (x', y', z') は元の座標系と原点は一致していて，測り方が定数倍だけ変わったと言う事である．よって微小２乗距離 $(ds')^2$ は

$$(ds')^2 = (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \tag{5.22}$$

となる．ついでに $t' = t$ としている．この (ct', x', y', z') の座標系で星の運動を記述して行けば，Lorentz 不変性も保たれている事でもあり，全く問題なく記述出来る事になっている．すなわち，座標系が膨張すると言う事は自然界とは無関係であり，座標系はあくまでも観測者が指定するべきものである事に依っている．しかし Einstein 方程式では座標系がまるで自然界そのものであるという錯覚に陥っている．

5.4　一般相対論の予言

一般相対論を応用して，実際の観測量と結び付けようとする作業はこれまでに数多くなされている．ここではその解説を簡単にして行こう．まずは一般相対論が古典力学の方程式に与える影響を評価する事が最も大切である．実は，この記述はブラックホールの予言の問題と密接に関係している．従って，まずはこの一般相対論が予言する高次の効果として，一般相対論による付加ポテンシャルの問題から解説して行こう．

また，ここでは一般相対論が物理的観測量として予言している水星の近日点移動の問題を議論して行こう．実際，観測量と比較した場合，一般相対論の予言値はその観測値を再現できない事をここで示すことになる．これまで一般相対論関係の教科書では，水星の近日点移動の観測値が３桁の精度で再現できるものとして紹介されてい場合がある．しかし実際は観測量を計算する過程で正当化できない物理的手法を用いているので，そのことに関してもきちんと解説しておく必要がある．特に付加ポテンシャルが実は非可積分であり、そのまま解くと物理的には無意味な解を与える事が証明されている。これは従って摂動論的に扱う必要があり、この場合１周期において、近日点移動が起こらないことが理論的に厳密に証明されている。

さらに決定的に重要な観測量として，うるう秒の問題がある．重力の付加ポテンシャルが存在する場合、地球もそれに応じた変化をする事になっている．この当然の事が，現代技術の進歩，特に正確な時間測定の長足な進歩により，測定されてきた事は意味深いものがある．実際，地球の周期に対する高次効果がうるう秒による年間周期の遅れとして非常に正確に観測されていたのである．しかも，この地球の公転周期の遅れの観測量は新しい重力理論によって完璧に再現されるのに対して，一般相対論の予言では全く再現できていない．これは明らかで，一般相対論の高次効果は引力的なため、周期に対する高次効果を計算するとどうしても軌道面積が小さくなり従って、周期に対する補正は進みとなっているからである。

5.4.1　一般相対論による付加ポテンシャル

一般相対論の効果を近似的に無理やり付加ポテンシャルで表すとその付加ポテンシャルを加えた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{5.23}$$

となる．但し，一般相対論による高次補正項はポテンシャルでは書けないと言われることがよくある．しかしながら，もしそのことが事実だとしたら，それは一般相対論が内部に深刻な問題を含んでいる事を示すことになっている．Newton 方程式は量子論における期待値として求められているので，すでに観測量と直接に結びつくべき方程式である．従って，この方程式に対する如何なる高次の修正効果も必ず，ポテンシャルの言葉で表せられる必要がある．

ここでは，人々が主張している φ 依存性の変化分 (後で式 (5.29) で与えられる) を再現するようなポテンシャルとして上記のポテンシャル (D.20) は求められている．この時，Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3} \tag{5.24}$$

となっている．ここで，L_g^2 は

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2M^2m^2}{c^2} \tag{5.25}$$

と定義されている．さらに新しく角速度 Ω_g を

$$\Omega_g^2 \equiv \omega^2 - \frac{6G^2M^2}{c^2R^4} \equiv \omega^2(1-\gamma) \tag{5.26}$$

で定義しておく．ただし，γ は次式で定義されている．

$$\gamma = \frac{6G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{5.27}$$

5.4.2　重力崩壊

ここで重要な事は，もし L_g^2 の式で右辺の第 2 項が第 1 項よりも大きくなるとこれは重力的に不安定となることである．r が小さい所では必ず引力が勝ってしまい，角運動量でこれまで崩壊を止めていたのに，もはや止める項がなくなり重力崩壊してしまう．これがブラックホールであり，その条件は

$$R \leq \frac{\sqrt{6}GM}{c^2} \tag{5.28}$$

と表されている．この式 (5.28) の細かい係数 ($\sqrt{6}$) はこれまでの計算 [式 (5.18) では 2 であった] と異なることはあるが，この条件式は通常言われているブラックホールの条件と確かに一致している．

● **解が存在しない！：** しかしながらこの場合，次節で求められている式 (5.29) でわかるように，L_g^2 が負であるため軌道の半径 r が負となっていて，これは物理的に意味のある解ではない．従って r が実数では求まらないので，この Newton 方程式は解なしである．ブラックホールの条件式 (5.28) を満たさない場合でも，自然界を記述する基本方程式がこのような特異な振る舞いを内包していることは通常ではあり得ない．これはポテンシャル (D.20) における Newton 方程式が自然界を記述する方程式ではないことを意味している．

● **相対論的な効果？：** しかしここで一般相対論の専門家は「式 (5.28) を満たす場合に Newton 方程式が成り立つのか？」と質問して来ると思われる．この場合，確かに相対論的な効果が効いてくる可能性がある．ところが一般相対論は動力学の方程式ではないので，この力学の問題に関しては初めから全く無力なのである．この場合は別の新しい方程式を構築する必要がある．実はそれこそが量子場の理論に基づいた新しい重力理論なのである [2, 3]．

5.4.3 水星軌道の進み

それでは，この一般相対論による付加ポテンシャルはどのような水星の近日点移動を予言するのであろうか？ Newton 方程式に対する軌道の解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{5.29}$$

と書けており，ここで A_g は

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{5.30}$$

で与えられている．物理的な観測量は前述したように積分量であり，今の場合の Newton 方程式で保存量である角運動量から $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ より，

$$\frac{\ell}{m}\int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\{1 + \varepsilon\cos(\varphi(1-\gamma))\}^2} d\varphi \tag{5.31}$$

と積分すれば良く

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 - 2\gamma\} \tag{5.32}$$

が直ちに求められる．しかし一般相対論による付加ポテンシャルで引き起こされる効果は

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq -2\gamma \tag{5.33}$$

となり，これは周期の進みを与えている．これは，一般相対論の予言値が観測値と矛盾している事を明確に示している．この事より，一般相対論は概念的な困難だけでなく，観測量との比較からも，正しい理論ではない事が示されたのである．

5.4.4　これまでの理論計算の予言

それでは，これまでの人達は何故一般相対論の予言値が水星の近日点移動の観測事実を再現できると思ったのであろうか？その答えは簡単である．これまでの理論計算においては，角度のズレだけで観測量と結びつけられると思い込んだ事によっている．水星の軌道を与える式は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)\right)} \tag{5.34}$$

と表された．ここで角度の式には L_g^2 の具体的な式を入れてある．この時，水星の近日点は軌道の式から

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 0 \tag{5.35}$$

で与えられるが，この場合明らかに $\varphi = 0$ となってしまう．そこで人々は

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 2\pi \tag{5.36}$$

が近日点を与えるからと言ってこの式から角度のズレを求めたのである．この場合，確かに

$$\varphi \simeq 2\pi + \pi\gamma \tag{5.37}$$

が求められて，水星の近日点移動が $\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\gamma}{2}}$ となっている．そしてこの物理量は観測値を良く再現していた．しかし，この式には数学的に明らかな矛盾点がある．それは，φ は常に $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ で定義されているという事である．φ が 2π を超える事はあり得ない事であり，定義されていない．

5.4.5 非可積分な付加ポテンシャル

実はこの問題は付加ポテンシャルが非可積分である事と密接に関係している。良く知られているように、非可積分系の問題における軌道の解は空間の連続性が破れてしまうのである。すなわち、式 (5.34) の軌道の解は $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ で不連続となっている。これは力学においては到底、受け入れられるものではない。付加ポテンシャルが非可積分である場合、その取扱いは摂動論で行う必要がある。詳しい内容は「Cosmology and Field Theory」で議論されているので参考にして欲しい。

5.4.6 一般相対論の今後への影響

このように，観測量をしっかり検証する事は常に重要である事がよくわかる．これまで見てきて明らかになったように，一般相対論はその理論の出発点から問題を含んでおり，さらにその理論模型の予言値は観測値を再現できていない．さらに，あとで議論しているように量子場の理論による新しい重力理論が発見され，その理論の予言値が観測値を良く再現している．その意味においては，一般相対論は単純に不要な理論となっただけである。これまで一般相対論はどの分野にも応用されたわけでもない。従って物理学の理論体系からすれば、どの模型も全く影響されることはない事も確かである．それは一般相対論が運動学でもないし，動力学でもないことに依っている．

5.5　現代物理学から見た一般相対論

一般相対論は約１世紀前に作られた理論模型である．１世紀の間も生き延びているのだから，これはそれなりに意味のある理論体系であると思っている読者が少なくないものと考えられる．これまで一般相対論を支持する実験的な証拠は何処にもないにもかかわらず，同時にこれを完全に否定する理論的な証明も最近までは知られていなかった．恐らく，このことが一般相対論が長い間，人々に受け入れられてきた最も大きな理由であると思われる．

5.5.1　一般相対論は何故，生き延びたか？

一般相対論は物理的な意味があまり明解な理論とは言えないにもかかわらず，人々の関心を引き付けてきたことは事実である．何故だろうか？この答を見つけるのは非常に難しいものであろうが，いくつかの理由は考えられよう．

- 理由 (1)：　一つには，これまで場の理論に基づいた重力理論が新しく作られていなかった事が主な原因であろう．重力理論といえば一般相対論だけであったということが，この理論が生き延びた最も大きな原因であろう．

- 理由 (2)：　重力場に関しては，観測事実として一般相対論の検証になるような実験は極めて難しいことである．それは明らかで，重力は力としては非常に微弱であり，その相互作用を実験室で検証することはほとんど不可能なことである．従って，一般相対論を実験室で検証できなかったことが，この理論が長く生き延びた原因の一つでもあろう．

- 理由 (3)：　さらに，実験的な検証が簡単にはできない理論で，しかもその理論の内容が不明瞭な場合，その理論が生き延びる可能性がかなりあることは経験的な事実である．実際，場の理論のような，形式がしっかりしている分野でさえも，実験的に観測されていない (観測することが容易でない) 理論で長く生き延びた理論模型が存在している．典型的な例が「自発的対称性の破れ」の理論模型である．この模型は Goldstone ボソンを予言していたが，半世紀にも渡り Goldstone ボソンは発見されてはいなかったのである．それにもかかわらず，この理論模型は長く人々に受け入れられたのである．実際，この模型計算の間違いが指摘されたのは１０年ほど前という最近の事であった．それはこの模型と関係する理論で厳密解が偶然見つかり，この事より「自発的対称性の破れ」の理論模型が初めて否定されたが，これは実験からではなかった．

5.5.2　理論模型の否定・肯定は常に困難

この「自発的対称性の破れ」の理論模型の問題と関連しているが，一般的に「ある模型」が「新粒子」の存在とその性質を予言したとしよう．その新粒子が実験的に存在することが証明された場合は，話は簡単でありその模型の是非を決定することが可能である．しかしながら「新粒子が存在しない事」を証明することは容易な事ではない．実験的にあらゆる可能性を検証することは非常に大変な労力を要している．現在，CERN で Higgs 粒子探索の実験が行われているが，３０年以上に渡り膨大な予算と労力をつぎ込んだにもかかわらず，まだ発見されていない．しかしながら，この Higgs 粒子の存在を否定する理論が提案されても，その粒子が存在しない事を証明することは，これはまた至難の業でもある．科学ではどの実験においてもその結果の再現性が常に要求されている．この事は明らかに非常に重要である．しかし同時に，何かが「存在しないこと」の証明は非常に困難である事も事実である．さらに言えば，理論的な整合性のない理論模型の予言に関しては，その予言された現象が存在しない事の証明は科学的には必要ではないと考えるべきである．

- 神の存在証明：　昔，西欧社会において，神の存在証明が盛んに行われた時期があった．その存在を証明する事はできなかったのであるが，同時にその存在を否定する事も容易なことではないし，それが可能とも思われない．

5.5.3　新しい重力理論

これまで議論してきたように，Einstein 方程式には数々の問題点があり，物理学の立場からすれば，これは必要で重要な模型とは考えられない理論体系である．しかしながら一般相対論を完全に否定するためには，新しい重力理論を手にしていない限り，非常に難しいものであった．そしてこの本で議論しているように，今はそれが可能になっている．実際，地球公転周期の遅れが「うるう秒」として観測され、この観測値がそれぞれの理論模型の予言値と比較検討されたのである。その結果，Einstein 方程式による予言値はこれまでの観測量をまったく再現できてはいないことが証明されたのである．一方において，新しい重力理論による予言値は，この観測値を予想を上回る精度で再現している事が証明されている．この事より，我々は初めて正しい重力理論を手にすることができたのである．この新しい重力理論の解説は次章で行ってゆこう．

第６章　新しい重力理論

物理学においては運動学と動力学という二つの理論形式がある．このどちらも重要であるが，役割は本質的に異なっている．その一つ目の運動学 (キネマティックス) では粒子の運動の性質 (エネルギー・運動量の保存や様々な対称性) を運動学的に決定している．特に粒子の運動エネルギーや運動量がどのようになっているかを知る事はその物理を理解するための基本であり，これが粒子の振る舞いを記述する上で重要な要素となっている．一方，もう一つの動力学 (ダイナミックス) は，粒子の運動を決める最も重要な方程式から成り立っており，この方程式を解く事により粒子の力学が決定されている．この場合，記述しようとする物理現象によってその方程式は異なり，それに応じて相互作用も選ぶ必要がある．このため，どの運動にはどの相互作用が働いているのかを見極めて，それに応じた運動方程式を解く事によってその粒子が関係する様々な自然現象を理解することができている．

● 一般相対論の役割：　それでは重力場における動力学の方程式は何であろうか？これは基本的には Newton 方程式である．この時さらなる疑問が湧いてくる．「一般相対論の役割」は何であろうか？これは時間・空間の計量を変化させるという方程式なので，どちらかと言えば運動学に近いと言える．しかし粒子の状態やその Lagrangian とは直接の関係はないので，運動学でもない．ところが粒子のダイナミックスとはさらに関係がないため，物理において一般相対論が果たすべき役割が実は不明である．従って，一般相対論が存在しなくても，理論体系に対する影響はとくにないものと考えてよい．このことを読者もしっかりと理解し認識しておく必要がある．ここで大切な事は，重力場がある場合，高エネルギー粒子の動力学はどうなっているのかと言う極めて基本的で単純な疑問に答える事であり，以下，その議論を進めて行きたい．

6.1 Dirac 方程式とポテンシャル

現在知られている基本的な相互作用は電磁気的な力，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．力の強さを示す結合定数と言う言葉でいうと，重力は最も弱い．実際，弱い相互作用と比べても重力は３０桁以上も小さい．重力の次に弱いのが弱い相互作用である．この力は，中性子が β 崩壊する時や π 中間子が崩壊してミューオンとニュートリノになって行く過程を記述する事ができる．これらの相互作用と比べると，電磁気的な力はかなり強い相互作用であると言える．実際，我々の物質の世界は基本的には電磁気的な力で支配されている．原子や分子が出来ているのも，全て電磁気的な力である．最後に，最も強い力として強い相互作用があり，これは原子力エネルギーや太陽のエネルギー源になっている．星の内部で起こっている核融合はまさに強い相互作用による核子間の束縛エネルギーをうまく利用する事により得られている．

- 重力の影響は何故，大きいのか？： 重力は星の生成に大きな影響を与えているが，それは何故であろうか？重力は力の強さとしては一番弱いのであるが，しかしながら２つの重要な性質のために，大きな影響を星の形成では発揮する事になるのである．その２つの性質とは，力の到達距離が $\frac{1}{r}$ である事および常に引力である事である．特に，重力は常にどんな場合でも引力であり，おまけにその力は遠距離まで及ぼすため，いずれは全ての核子は引き寄せられて星を形成して行く事になっている．

- 相対論的な粒子： 粒子が高エネルギーになると相対論的な粒子の運動を重力場の中で考える必要がある．しかし高エネルギー粒子の運動は Newton 方程式では記述できないことが知られているため，何かこれにかわる方程式が必要である．古典力学の方程式は量子論から近似的に得られることがわかっているので，相対論的な粒子の運動を重力場中で考えるためには，どうしても Dirac 方程式から出発する必要がある．ところがこの重力ポテンシャルを Dirac 方程式のどの部分に入れたら良いのかという基本的な問題がこれまで未解決のままであった．この事は１９７０年の始め頃までは深刻な問題として人々の興味を引いていたが，その後，議論が完全に途絶えてしまった．その主な原因は一般相対論への過大評価であろう．ところが，一般相対論は粒子の運動に対する方程式ではなく，さらに場に対する方程式でもないため，動力学とは無関係であった．従って重力ポテンシャルを場の理論の枠組みの中に入れる事が，結局，現代物理の最も重要な課題である事は当然であった．しかしながらこの課題の解決が最近まで行われていなかったことも事実である．

6.2　重力問題の方向性

ここで問題を整理してみよう．まず，Newton 力学では重力がある場合の方程式は良くわかっていて，実際，Kepler の法則にしても重力下での Newton 方程式を解けば問題なく理解されている．そしてその Newton 方程式はどのように導かれるのかというと，これはよく知られているように Schrödinger 方程式からきちんと導かれるものである．Schrödinger 方程式は場に対する方程式であるから，Newton 方程式を導くには何らかの近似をする必要がある．直感的にわかりやすいのは Ehrenfest の定理として知られているように，演算子 (座標と運動量) の期待値を取る事である．この手法により，Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導かれている．そして Schrödinger 方程式は非相対論の近似をすれば Dirac 方程式から求められる事から，結局，Dirac 方程式から，Newton 方程式が導かれる事を意味している．

6.2.1　Dirac 方程式と重力ポテンシャル

逆に言えば，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れられないとしたら，それは最もよく知られている重力ポテンシャルの場合の Newton 方程式が求められない事を意味している．この事より，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れた方程式を考えるのは一番最初にされるべき最も重要な事である．この問題が未解決のままで重力の問題が議論されてきたために，重力問題の解決に対する正しい方向性を見失ってしまったと言える．恐らく，１９６０年代の多くの物理屋はこの問題をかなり深刻に考えていたと思われるが，ゲージ理論をあまりにも重要視されすぎたため，重力をゲージ理論以外で研究する方向はすべて退けられてしまったものであろう．

- クーロン場の Dirac 方程式：　重力ポテンシャル中の Dirac 方程式を議論する前に，クーロンポテンシャル $V_c(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ 中の質点 (質量 m) に対する Dirac 方程式を書くと

$$\left(-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = E\Psi \tag{6.1}$$

となっている．一方，重力ポテンシャル $V(r) = -\frac{G_0 mM}{r}$ の場合，もしクーロンと同じだとすると, 式 (6.1) と同様に

$$\left(-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{G_0 mM}{r}\right)\Psi = E\Psi \tag{6.2}$$

と書くことになる．しかしこの式はゲージ理論からきているため常に引力であるという保証をすることはできない．また，この場合に非相対論の極限をとって Newton 方程式を求めても，クーロンと同じで影響は全く現れない．

- 重力場の Dirac 方程式： 実際問題として正しい方程式は

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{G_0mM}{r}\right)\beta\right]\Psi=E\Psi \tag{6.3}$$

であることが最近の研究によりわかっている．この場合，非相対論の極限をとると新しいポテンシャルが続々と現れてくる．そのうちの一つが重力付加ポテンシャルとなっている．しかしながら，これまでこのような重要な問題を未解決のまま放置していた事自体が，実は最も深刻な問題であると言えよう．

6.2.2 スカラー場によるポテンシャル

後で詳しく議論するように，新しい重力理論 (式 (6.6)) によって，式 (6.3) の Dirac 方程式が導出されている．すなわち，電磁場の場合とは異なっていたのである．この事は水星の近日点移動の問題を取り扱う時に，重大な効果を引き起こす事になる．それはクーロンポテンシャルの場合，非相対論の極限をとっても全く影響する事はなかったが，スカラーポテンシャルとして入ってくると，非相対論の極限において重力の付加ポテンシャルを新しく生み出すことになっている．これはベクトルポテンシャルによる Zeeman 効果の場合と同じ機構である．

- 慣性質量と重力質量の等価性： 重力に関する観測量として「慣性質量 m と重力質量 m の等価性」という非常に重要な物理量がある．この等価性は一般相対論の一つの根拠になったものであるが，そこでは仮定されており，導出はされていない．一方，新しい重力理論においては，この等価性が自然な形で証明されており，この理論が信頼される重要な理由の一つとなっている．

- 繰り込み理論： 何故，スカラー場によって重力相互作用がうまく記述されるのかと言う問題はかなり難しく，実は繰り込み理論と密接に関係している．実際，この繰り込み理論を深く理解することが，この新しい重力理論を理解するための必須条件となっている．しかしこの繰り込み理論の解説はこの本では不可能なので，参考文献 [3] を読み進めて理解して頂きたいと思う．

6.3　新しい重力理論

重力の量子論を作るという事は物理的には何を意味しているのかをまず考える必要がある．最も基本的な意味は明らかである．それは，まずは，重力ポテンシャルがある時の Dirac 方程式をどのように書けるかという事である．これがすべての出発点になる．逆に言えば，これさえも出来なかったら，それ以上の重力理論を考える物理的な意味は無い．

現在良く使われている量子重力は重力場の量子化という意味を含み，そちらの方がより本質的であると考えている物理屋が多いように見受けられる．ところが，一般相対論は重力場に対する方程式ではなく，計量テンソルに対する方程式であり，そもそもその物理的な意味が不明である．さらに，一般相対論は動力学を記述する方程式とは無関係なため，重力場の下で運動する粒子の記述には無力である．まずは量子重力に関してその物理を明確にして行こう．そしてそのためには，粒子間の重力ポテンシャルを与える Lagrangian 密度を求めて，この Lagrangian 密度からの Lagrange 方程式から重力ポテンシャル中での粒子の運動を記述する Dirac 方程式を求めるという事が重力の問題を解くための最も重要な課題となっている．さらには，重力ポテンシャル中での新しい Dirac 方程式が求められた事に対して，その非相対論的な極限の方程式を求め，それを古典力学の方程式に持って行く作業を実行する必要がある．実際，このようにして Newton 方程式を求めたところ，新しい重力として付加ポテンシャルを含めた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{6.4}$$

と求められる．この第２項である重力付加ポテンシャルが地球の公転によるうるう秒の是正の問題を高精度で解決している．また，この重力付加ポテンシャルは長い間，Newton 方程式のなかで議論されてきた重力ポテンシャルを修正した新しいポテンシャルとなり，これは１９世紀半ば以来の変更と言えるものと考えられる．

● 大雑把な大きさの評価：　歴史的に言って相対論的効果を最初に具体的に検証したのは，Michelson-Morley の実験である．この場合，地球上で観測できる最も速いものは地球の公転速度であり，Michelson-Morley はこれを利用して光の速度が地球の公転速度の影響をどのように受けるかを検証したわけである．結果は良く知られているように，光速は地球の公転速度の影響を受けていなく，光速不変の法則へと発展して行くのである．この時の相対論的

効果は

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \tag{6.5}$$

である事が光速 c と地球の公転速度 v を入れれば求められる．一方，地球の公転によるうるう秒の効果 $(\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8})$ も，ともに丁度，相対論的効果の大きさそのものである．従って，直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は，至極当然の事と納得できるものである．

6.3.1 重力を含む Lagrangian 密度

重力を入れた理論を考える時，当然の事として，最も信頼されている量子電磁力学の理論体系に何とかこの重力の相互作用を組み入れる事が自然な事である．この場合，出発点として重要な事は，重力場を考える場合，これはゲージ理論では不可能であるという事である．その理由は簡単で，ゲージ理論だとその理論が持っている特性として，粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまい引力だけが必要な重力理論には適していない．それでは重力場はどんな場であったら常に引力を与えるのであろうか？実はこの事は周知の事実である．重力の場が「スカラー場」であれば，その場を媒介とした相互作用は常に引力になっている．

● 具体的な Lagrangian 密度： ここで，具体的な Lagrangian 密度を書いておこう．質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1+g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{v\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\ \partial^\mu\mathcal{G} \tag{6.6}$$

と与えられている．ここで $\mathcal{G}$ は質量のないスカラー場となっている．それでは人々は何故このスカラー場による重力を考えなかったのだろうか？その答えは，恐らくは，スカラー場だと，繰り込みが出来ないと思い込んでいた事が主因であろうと思われる．

● 重力場はゲージ理論では不可能！： この数十年間，人々は基本的な相互作用の形はゲージ理論であるべきであるという根拠のない「信奉」に振り回されていた．量子電磁力学による繰り込み理論が大きな成功を収めたため，量子電磁力学の基礎であるゲージ原理が本質的であると思い込んだ節がある．ゲー

ジ原理自体は単に数学的なものであり，確かに物理にそれを応用して，特に量子電磁力学では予想以上に上手く行っている．しかしゲージ理論だとその力には引力と斥力が常に現れるため，引力だけの重力の記述にこのゲージ理論は応用できないため，その他の理論を考えるべきであることは，自明でもあった．

6.3.2　重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると，重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる．この方程式は時間によっている方程式になっているが，外場である物質場が時間によらない場合は，一般に静的近似をする事が出来る．この場合，重力場 $\mathcal{G}_0$ に対する方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathcal{G}_0 = mg\rho_g \tag{6.7}$$

と求められる．この時，$m\rho_g$ は物質の密度に対応する．結合定数 g は重力定数と $G = \frac{g^2}{4\pi}$ により結びついている．これは，基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて，確かに観測されている重力場を再現できている．

6.3.3　重力場中の Dirac 方程式

上記の Lagrangian 密度から質量 m の質点に対して，重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式は

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta\left(1+g\mathcal{G}\right) - \frac{Ze^2}{r}\right]\Psi = E\Psi \tag{6.8}$$

と求められる．ここで重力場が質量 M の原子核によって作られる時は

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r}\right)\beta - \frac{Ze^2}{r}\right]\Psi = E\Psi \tag{6.9}$$

となり，前章で議論した重力場中の Dirac 方程式が得られている．これは非常に重要であり，基本的な Lagrangian 密度から質点に対する重力場下での Dirac 方程式が初めてしっかりと求められたことになっている．電子や陽子などの素粒子に対してこの重力場中の Dirac 方程式が重要になるような現象はそれ程無いかも知れない．可能性としては中性子星の表面での粒子の運動が相

対論的になればあるいは必要になるかも知れない．しかし，後で見るように，この式を非相対論に直し，それを古典論に持って行くとこの時初めて重力場中での Newton 方程式が Dirac 方程式から矛盾無く求められた事になっている．

6.3.4 重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{GmM}{r}\right)\beta\right]\Psi=E\Psi \tag{6.10}$$

と求められた事より，その非相対論極限の方程式を求めて，それから新しい Newton 方程式を求める必要がある．この事により，重力ポテンシャルも変更を受ける事になる．そして新しく求められた重力付加ポテンシャルが地球の公転における遅れ具合を 0.621 秒/年 と予言しているが，これははうるう秒として観測されてきた観測値 0.625 秒/年 とぴったり合うのである．さらに月の後退が観測されているが，月の運動も当然，重力付加ポテンシャルの影響を受けており，実際，月の後退の観測値が理論計算と良く一致している事がわかっている．

- Foldy-Wouthuysen 変換： 重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H=-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{GmM}{r}\right)\beta \tag{6.11}$$

で与えられる．この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して，非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない．この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリー変換なので，常に信頼できるものである．その結果だけ書くと，

$$H=m+\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{GmM}{r}+\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\boldsymbol{p}^2-\frac{1}{2m^2}\frac{GMm}{r^3}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}) \tag{6.12}$$

となる．興味があるのは，古典近似をした後のポテンシャルなので，因数分解仮説

$$\left\langle\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\boldsymbol{p}^2\right\rangle=\left\langle\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{p}^2\right\rangle \tag{6.13}$$

は，良い近似である．さらに，Virial 定理

$$\left\langle\frac{\boldsymbol{p}^2}{m}\right\rangle=-\langle V\rangle \tag{6.14}$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{6.15}$$

となる．第２項が新しい重力の補正項であり，Zeeman 効果と導出が似ている．電磁場の場合，クーロン力ではこのような非相対論の極限で新しい項は出てこないが，重力はスカラーで入っているので，このような新しい項が現れたのである．電磁場の場合ベクトルポテンシャルの部分は非相対論の極限をとると新しい項が現れてくる事は良く知られているが，重力の補正項もこれと似ていて新しい項が現れてくるのである．

● 相対論的な Newton 方程式：　最近の研究 (半澤・藤田論文) により，Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式が直接求められる事が分かっている．この結果だけを書いておこう．

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - \frac{m}{E}\boldsymbol{\nabla}\left(-G\frac{mM}{r}\right) \tag{6.16}$$

ここで E は粒子のエネルギーであり，この式は粒子が散乱状態の場合にのみ正しい式であり，束縛されている場合には使えないものである．E は粒子のエネルギーであり $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ と書かれている．ここで $E \simeq m$ と近似すると方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \simeq e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{6.17}$$

となり，通常の重力ポテンシャルに対応している．もう少し近似を上げると非相対論の場合，$E = m + \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots$ と展開されるため，重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルが現われる事がわかり，これは基本的には束縛状態の重力付加ポテンシャルに対応している．

6.4 新しい重力理論の予言

新しい重力理論が完成されて，その帰結として重力ポテンシャルに重力付加ポテンシャルがあらわれる事がわかっている．これは非常に小さい効果ではあるが，しかし実際の観測に掛かる程度の大きさである．この相対論的効果は大雑把に言って，地球の公転に対しては $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8}$ である事が光速 c と地球の公転速度 v を入れれば求められる．一方，地球の公転によるうるう秒の効果 $(\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8})$ も，ともに丁度，相対論的効果の大きさそのものである．従って，直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は，至極当然の事と納得できるものである．

6.4.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

新しい重力理論においては，通常の重力ポテンシャルに加えて新しい重力付加ポテンシャルが導出されている．従って，回転物体（例えば地球）が重力中心（この場合，太陽）から受ける重力ポテンシャルは全体で

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{6.18}$$

と書かれている [3]．右辺の第２項が重力付加ポテンシャルである．ここで G と c は重力定数と光速，M は重力中心の質量, そして m は回転物体の質量である．この場合の Newton 方程式はすぐに解くことが出来るのであるが、実はこの重力付加ポテンシャルは非可積分であることが知られている。この非可積分ポテンシャルは物理的には容認できない解を与える事が知られている。このためこのポテンシャルの取り扱いは摂動論的に実行する事が必要である。詳しい計算法は英語版である「Cosmology and Field Theory」に解説してあるので専門的に興味がある読者はそちらを参考にして欲しい。重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \tag{6.19}$$

となる．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{6.20}$$

と書かれている．この式で R は平均軌道半径，ω は角速度で Newton 周期 T と $\omega = \frac{2\pi}{T}$ と結びついている．この事より，重力付加ポテンシャルにより引き

起こされる効果として周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{6.21}$$

である [2, 3]．式 (D.35) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である．この式より，正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している．

6.4.2　地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30}\ \ \mathrm{kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \tag{6.22}$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って１年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ \ Motion} = 0.621\ \ \ \mathrm{s/year} \tag{6.23}$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は１９７２年６月から始まりこれまで４０年間に２５秒補正している．従って１年間での観測値は

$$\Delta T^{Obs}_{Orbital\ \ Motion} \simeq 0.625 \pm 0.013\ \ \ \mathrm{s/year} \tag{6.24}$$

である．これは式 (6.23) の理論値と完全に一致している．

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [9]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

6.4.3 水星の近日点移動

水星の近日点移動の問題にも少し触れておこう．水星の近日点移動の観測値は１７００年から１８００年における１００年間の近日点移動について行われたものとなっている。これは木星などの影響で確かに水星の近日点が移動する事は知られていた。しかし惑星効果の計算は Newcomb が１８９０年代に行ったものが知られているが、その計算の検証が実行された形跡はない。いずれにしても１周期における水星の近日点移動の観測値には任意性が大きすぎて科学的な議論は今後の検証によるものとなっている。理論的には１体問題である限りは、１周期における水星の近日点が変化する事はない事が証明されている。

6.4.4 月の後退

月も重力付加ポテンシャルの影響を受けている．ここでは，このズレの量が月の軌道の後退と関係している事を示し観測量と比較しよう．実際，月は１年間に $3.8 \quad \mathrm{cm}$ 後退している事が観測されている．

月の軌道の場合もズレを表す式はおなじである．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \tag{6.25}$$

である．月の場合，軌道半径 R，地球の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 3.844 \times 10^8 \quad \mathrm{m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \quad \mathrm{kg}, \quad \omega = 2.725 \times 10^{-6} \tag{6.26}$$

である．これより

$$\frac{\Delta T}{T} = 2.14 \times 10^{-11} \tag{6.27}$$

となる．今，月がその軌道からどれだけずれるかの計算を行う．角度のズレの式は $\Delta\theta = 2\pi(2-\varepsilon)\eta$ だから，今の場合の軌道のズレ $\Delta\ell_m$ は 1 周期につき $\Delta\ell_m = R\Delta\theta \simeq 0.052 \quad \mathrm{m}$ となる．よって１年間で月のズレは

$$\Delta\ell_{m\ (one\ \ year)} = \Delta\ell_m \times \frac{3.156 \times 10^7}{2.36 \times 10^6} \simeq 69.5 \quad \mathrm{cm}$$

だけ軌道が遅れる事になる．

● 月の後退：
月の軌道は楕円なのでこの軌道のズレは後退したように見える部分がある [10]．軌道の式は

$$r = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos\theta} \tag{6.28}$$

で与えられるとして十分である．今，月の場合，離心率 ($\varepsilon = 0.055$) は十分小さいので上の式を ε で展開すると

$$r \simeq R(1 - \varepsilon \cos\theta) \tag{6.29}$$

となる．従って，軌道のズレ Δr は $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ の時を見ると１年間では

$$\Delta r \simeq R\Delta\theta\ \varepsilon \simeq \Delta\ell_{m\ (one\ \ year)}\ \varepsilon\ \ \simeq\ \ 3.8\ \ \mathrm{cm} \tag{6.30}$$

となっている．一方，月の後退の観測値 Δr_m^{obs} は

$$\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8\ \ \mathrm{cm} \tag{6.31}$$

と観測されている．これは計算値と良く一致している．

この月の後退の測定はドップラー効果を用いた場合，この精度で可能であると思われる．しかし，月と地球の絶対距離の測定から 3.8 cm を求める事は不可能である．それは光速の精度が

$$c = (2.99792458\ \ \pm 0.000000012) \times 10^8\ \ \mathrm{cm/s} \tag{6.32}$$

であり，８桁の精度しかないのであるが，月と地球の絶対距離 $R = 3.85 \times 10^8\ \ \mathrm{cm}$ と比べて $\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8\ \ \mathrm{cm}$ は１０桁目であるため直接測定は不可能である．

また，もし本当に月が後退しているとしたらエネルギー保存則が局所的にせよ破れる事に対応している．月の運動の全エネルギーを E とした場合，エネルギーのズレ ΔE は

$$\Delta E \simeq -2E\frac{\Delta r_m}{R} \tag{6.33}$$

となり，E が負である事から，エネルギーが増える事に対応している．しかも破れているレベル $\delta \equiv \frac{\Delta E}{E}$ が $\delta \sim 10^{-10}$ では物理的に到底容認できる事ではない．

第７章　宇宙論

長い間，２０世紀以前の世界における西欧的 (そしてそれはキリスト教的) 世界観では，絶対者 (神) の存在を常に仮定していた．このため，最終的なレベルでは全ては決定されるべきであるとする「決定論的な世界観」が主流であった．この考え方は古典力学とは矛盾していない．それは力学による軌道は，もし厳密に (神のように) 解ければすべての事象は時間の関数として決定されることになっていて決定論的な概念と一致しているからである．

しかし残念ながら，古典力学は近似の方程式であり，厳密に正しいという方程式ではない．これは決定論的な世界観の破綻を意味している．現実の物理法則は確率的であり，生物の進化自体も多分に確率的な意味合いが強いものである．その意味においても，進化論的な世界観が現実的であり，今後の方向を指し示している．

7.1　これまでの宇宙論

宇宙論を展開しようとすると，素粒子の振る舞いを記述している場の量子論に対する正確で深い理解が要求されることになる．それは星などを形成している物質は基本的に素粒子であり，従ってその間の基本的な相互作用を正確に理解していることが最低条件となっている．この場合，量子電磁力学，強い相互作用，弱い相互作用そして重力が基本的な相互作用である．これらすべてが重要であることは明らかであるが，星や銀河の形成に関しては重力がとくに重要であることは言うまでもないことである．ところが，この最も重要な重力の相互作用がこれまで正確には理解されていなかったのである．この主な原因が一般相対論にあることは明らかであろう．この一般相対論という奇妙な理論に対して，アインシュタイン本人が重力の理論であると主張したため，その後の大半の物理屋は一般相対論が重力を記述していると思い込んでしまったのであろう．しかしながら，一般相対論は計量テンソルに対する方程式であり，重力場に対する方程式ではない．彼は計量テンソルの時間成分 g^{00} に対して

$g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g$ と仮定してこの ϕ_g が重力場であるとしている．ところがこの方程式では，何故，計量テンソルの時間成分 g^{00} に対して，このようにおけるのかと言う物理的な理由がどこにもない．さらに後で議論するように，この式は物理的に無意味な式であることが証明されている．従って現在，これまでの宇宙論の修正が余儀なくされる状況になっているのである．

7.1.1　天地創造とビッグバン模型

旧約聖書には天地創造の話が出てくるが，それは天地は神が創造したということが西欧における宗教の出発点になっているからであろう．ここではその詳しい話をする必要はないが，この天地創造の考え方がやはりビッグバン模型の出発点になっていることは注目すべき点である．ビッグバン模型が科学の世界において割合簡単に受け入れられてしまった事実は，どう見ても，この西欧における宗教的な思想と無関係ではないと考えられる．

物語として，無から天地が創造されるのは神がいれば不思議な事ではないかも知れない．しかし，自然現象と捉えたら，これは不思議以上の事で，到底，物理学としては受け入れる事が出来ない現象である．ところがビッグバン模型が物理学で人々に受け入れられてしまったのである．この模型は最初，ガモフがおもちゃの模型として提唱したものであるが，背景輻射の存在が実験的に観測されてから一気に現実的な模型として議論されてしまったのである．さらにそれに加えて，一般相対論がそのビッグバン模型と合体したため，この上なく奇妙でわかりにくい理論体系が出現してしまったものである．一般相対論では空間が膨張するという言い方をしていて，これによりこの膨張宇宙の現象を理解できるのだと主張している．ところが，それではその時に「銀河も一緒に空間にくっ付いて膨張したのか？」という質問に対して専門家は誰も答えようとしなかったのである．それどころか，このような基本的な疑問さえも議論された形跡がないのであるが，これは到底，科学的とは言えないレベルの理論模型なのである．

さらに言えば，宇宙の背景輻射がビッグバン模型の重要な証拠として受け入れられてきているが，宇宙における星の密度分布は非常に希薄であり，この状態で，何故，フォトンが熱平衡のような状態として残り得るかという問題が検証されていない．しかも，フォトン—フォトン相互作用は理論的にも実験的にも存在が確認されてはいないし，存在したとしても極めて弱い相互作用であろうと考えられている．この事を考慮すれば，現在の宇宙において，背景輻射のフォトンが $2.7\mathrm{K}$ の温度を持っている事実は，フォトンがこの１５０億光年の

宇宙空間に何か異常な形で閉じ込められているとでもしない限り，到底，理解出来る事ではない．この背景輻射の問題は新しい宇宙論では重要な役割を担うことになるので，記憶しておいて欲しい．

7.1.2　一般相対論による宇宙論

これまで，様々な宇宙模型が提案されている．これらをきちんと科学史的に解説することは著者ができることではない．特に，２０世紀以前の宇宙論は階層構造を主力とした宇宙論が様々な形で提案されているが，その解説は科学史家がすでに行っている事でもあろう．

● 一般相対論による宇宙論：　ここでは一般相対論による宇宙論について簡単な解説を行うが，これは主としてこの半世紀間に議論された宇宙論と言うことになる．一般相対論は質量分布が存在するとそれに応じて時空の計量が変更を受けると言うものである．時空の計量が変わると何故，宇宙論を議論できるのかと言う基本的な問いかけはこれまでほとんどされていなく，誰かが「空間の膨張解」と主張すれば，それはそういうものだと人々に受け入れられてきたのであろう．

● 宇宙の創生と膨張：　一般相対論による宇宙論の出発点は「点からの宇宙の創生」にある．ある時点でこの宇宙が点から作られたと仮定することから始まっている．何故，点から出発する必要があったのかという問題は明らかであろう．もし，有限のサイズから宇宙が膨張したとすると，そこには固有の定数スケールが存在することになってしまい，考えている模型が破綻してしまうからである．

● 宇宙創生のシナリオ：　そしてこの宇宙創成のシナリオはビッグバン模型に従っている．但し，一般相対論は時空の計量についての方程式であるため，星や銀河の形成などには無力である．この宇宙論で最も重要な点は，宇宙創成と同時に空間が膨張したとする方程式の解である．しかしながら，その解として人々が解説する「空間の膨張」という物理的な意味がどのように想像しても良くわからない．アインシュタイン方程式の中には対応する定数スケールが存在しないのである．従って，膨張と言われても，それが「点」と比べてどのように大きくなったのかという測定スケールがわからない．現実には,「点」に何を掛けてもやはり点であり，膨張という意味が不明である．

7.1.3　宇宙の膨張

宇宙が点から膨張したというビッグバン模型の提唱者達の主張は，物理的には実際は沢山の銀河が全体として膨張しているというものである．しかしこれは空間の膨張ではない．それ以上に科学的に言って，空間が膨張するという物理的な意味が理解できない．これまで人々は，その空間の膨張を何故わかったと思い込むことができたのであろうか？実際，ビッグバン模型で宇宙が膨張したと言う事と銀河が膨張したことを同じ現象として捉えているが，その場合の専門家達は銀河が空間にくっ付いて膨張したと考えているのであろう．宇宙の膨張において空間と銀河が同時に膨張したという考え方は科学ではない．これは読者や著者のみならず，物理の専門家もしっかり考えるべき問題である．

● 銀河の膨張：　この宇宙の膨張シナリオで，一般相対論は空間の膨張に関して主張したのであるが，この場合の宇宙論では銀河もその空間膨張と一緒に膨張したと仮定されている．ビッグバンの初期の状態で膨張したのは素粒子であると仮定されているのだが，それがいずれ星や銀河に成長して行くと考えたのがビッグバン宇宙論による銀河形成のシナリオである．但し，この場合，すでに粒子ー反粒子の世界から粒子だけの世界になったとした結果である．この仮定は，現在，陽子崩壊が起こらないことが実験で確認されているため，物理的には正当化できないことが証明されている．

しかし，ともかくこの粒子だけの世界になったとして，それが銀河を形成するためには何らかの異方性が必要である．ビッグバンでは点から創生されたと仮定されたため，完全な対称性があり，銀河ができるためには何らかの「核」になる要素が必要であったのである．しかしながら，それを見つけることはできず，さらに統計的なゆらぎでは到底，銀河形成は不可能であることが知られていたため，この銀河形成がビッグバン模型の最大の欠陥であると考えられてきたし，現在もその謎は解けていない．

● 物理学と宇宙論：　これだけ多くの問題点を抱えていたのにもかかわらず，それでもビッグバン宇宙論が支持されてきたのは物理学の立場からしたら異常であり不思議でもある．それはすなわち，宇宙論が物理学 (科学) になっていなかったと言うことであろう．それぞれの議論を追ってゆくと，一般相対論に根差した宇宙論はどう見ても科学的ではなく，完全に SF 的 (scientific fiction) である．だからこそ，多くの人々が興味を持ちまたその議論に加わったのであろう．宇宙論の議論には重力理論が本質的である．このため、重力場の理論体系をきちんと理解できない限り宇宙論の議論は不可能である．現実問題として，重力場の理論が発見されたのはごく最近の話である．さらに，残念なが

ら一般相対論は重力理論ではなく，座標系に対する方程式 (理論体系) である．実際，一般相対論は重力の相互作用に関して，それが引力である事さえも証明できないものである．しかしながら，重力理論は一般相対論だけであるという思い込みが物理学者の間に蔓延していたため，この奇妙な理論がそのままずるずると生き続けてきたということであろう．ただし，一般相対論が重力理論であると主張したのはアインシュタイン本人であり，必ずしもその後の物理学者の問題とは言い切れないとは思う．いずれにしても，この半世紀間の宇宙論はほとんど進展はなく，これら多くの重大な課題を抱えたまま現在に至っている．

7.1.4 一般相対論と重力理論の関係

この節は第５章の記述と重なっているが重要なので繰り返して書いておこう．一般相対論がこれまで信じられてきた主な理由はアインシュタイン方程式から重力場のポアソン型方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\phi_g(\boldsymbol{r}) = 4\pi G_0\rho(\boldsymbol{r}) \tag{7.1}$$

が導出されると考えられていたからである．ところがこの導出を証明することは実は不可能である．それは、その証明には物理的に正当化できない方程式が仮定されているからである．その式とは

$$g^{00}(x) \simeq 1 + 2\phi_g \tag{7.2}$$

である．こうすると確かに重力ポアソン型方程式が導出されることが簡単に確かめられる．

● 力学変数と座標系： ところが，この仮定の式 (5.8) は物理的に無意味である事がすぐにわかる．それは，計量テンソルは座標系であるのに対して，重力場 ϕ_g は無次元ではあるが，力学変数である事に依っている．これは異なるカテゴリーを足し算しているため，どのように頑張っても物理学の式として承認することには無理がある．繰り返すが $g^{00}(x)$ の右辺の１は座標系の単なる数字であり，ϕ_g は力学変数である．この ϕ_g は運動方程式の解であり、その解が座標系に現れる事は物理的に許される事ではない。しかしこの式を認めたため，一般相対論が重力理論であると人々は思い込んできたことは事実である．

7.1.5　今後の重力理論

上記に見たように，一般相対論が重力理論と無関係であることが証明されている．幸い，新しい重力理論がこれまでの重力関係のすべての観測結果を矛盾なく説明していることがわかっている．

● 慣性質量と重力質量の等価性：　とくに、第６章で解説したように、新しい重力理論により慣性質量と重力質量の等価性が自然な形で証明されている。歴史的に見ても，この等価性の証明の事実は非常に重要であることがわかる．

● 正しい重力場ポアソン型方程式：　重力場のポアソン型方程式 (7.1) の右辺には結合定数の２乗である G_0 が現れている．しかしこれだと重力が相互作用として記述はできてはいないことを示している．相互作用であるならば必ず、$G_0 = \frac{g^2}{4\pi}$ とした時に、この g がポアソン型方程式の右辺に出てくる必要がある．相互作用する２個の質点の両方から結合定数 g が出てくるからである．実際、新しい重力理論により求められたポアソン型方程式 (6.7) の場合，確かに g が右辺に現れていて相互作用であることを明確に表している．

7.2　新しい宇宙論

現在までに，自然界を記述するべく基本的な相互作用の理論形式が事実上，量子場の理論として完成されたと考えてよい．この理論体系は４個の相互作用から成り立っており，それらは量子電磁力学，弱い相互作用，強い相互作用そして重力相互作用である，このことより，この新しい場の理論模型を基礎とした宇宙論を展開することが初めて可能になっている．特に，これまで場の理論としての重力理論がなかったため，銀河形成にしてもそれ以上の宇宙全体のスケールの議論が困難であったが，現在はそれが可能となっている．

ここで展開している宇宙論のシナリオは現代場の理論に基礎をおいている．これはまだまだ荒っぽさの残るものではあるが，しかし本質的な点では正しいものとなっている．最も重要な出発点は，この宇宙における基本的構成要素である素粒子 (陽子と電子) の寿命が無限大であるという実験事実である．これがビッグバン模型との本質的な違いであり，このことは宇宙の存在が無限に遠い過去からのものであることを示している．すなわち，この宇宙がある時，何処かで突然創生されたなどと言うことはあり得ないものである．

7.2.1　安定な素粒子と無限の過去

前述したように，新しい宇宙論において最も重要な出発点は構成要素である素粒子 (陽子と電子) が安定であると言うことである．これは実験的にも確立されており，従って，無限の過去からこれらの構成要素は存在していたことになっている．このことが新しい宇宙論を考える上で最も重要な点である．しかしながら，我々は「無限の過去」ということが理解できるわけではない．これはあくまでもそのように仮定せざるを得ないと言うことである．この宇宙はどのような形であれ無限の過去から存在していたということからすべての宇宙論は始める必要がある．「無限の過去」という事実は理解を超えているが，しかしこのことにより宇宙論を初めて科学的に展開できるものとなっている．

● 有限宇宙の導入：　今後，宇宙全体は無限であるとする宇宙論を議論してゆくため，我々のこの宇宙の事を「有限宇宙」と呼ぶことにしよう．この有限宇宙には数千億個の銀河系が存在しているものと考えられているが，その数自体に特に意味があるわけではない．大切なことは，この有限宇宙が全宇宙には無限個あると言うことである．

7.2.2　有限宇宙の大きさと力学方程式

これまで人々はこの有限宇宙の大きさをハッブルの法則 ($v = Hd$) から決めている．その場合，有限宇宙の大きさ d はハッブルの法則において v が最大になるとき，すなわち $v = c$ の時が最大の時であり，これがこの有限宇宙の大きさを示していると仮定されている．従って，$\boxed{d \simeq \frac{c}{H} \simeq 135 \text{ 億光年}}$ と求められていて，これがこの有限宇宙の大きさであると言われている．しかしこれはあまりにも単純すぎる計算である．実際問題としては，有限宇宙が爆発し，それに応じて銀河が膨張して行く動力学をきちんと解く必要がある．しかしながら第０次近似での評価としては，この値を受け入れても良い可能性はある．

● 有限宇宙の力学方程式：　この有限宇宙の大雑把な大きさを決定するには，有限宇宙の力学方程式を設定することであろう．最も単純化した模型として，この有限宇宙全体が爆発したところから始める計算をしてみよう．この有限宇宙全体の質量を M_U としてそこから飛び出して行く星の質量を m_s としよう．銀河の衝突のところで議論したように，この場合も１次元のニュートン方程式となる．今の場合，脱出しようとしている星に対するニュートン方程式は

$$m_s \ddot{x} = -\frac{G m_s M_U}{x^2} \tag{7.3}$$

となっている．これよりエネルギー保存則 $\boxed{E = \frac{1}{2} m_s \dot{x}^2 - \frac{G m_s M_U}{x}}$ が求まる．大雑把な有限宇宙の大きさはこのダイナミックスより求められると考えてよい．ただし，初期値をどのように選んだらよいかと言う問題は任意性が大きくて，簡単ではないであろう．最終的には有限宇宙ファイアボールの動力学を解く必要があるものと思われる．星が有限宇宙ファイアボールから脱出する速度を v_0 としよう．この時のファイアボールの半径を R_f とすると $\boxed{E = \frac{1}{2} m_s v_0^2 - \frac{G m_s M_U}{R_f}}$ となっている．ここで，初期条件をどうとるかが非常に難しい問題であるが，v_0 は光速に近いものと考えられる．そのため，エネルギー保存則における運動エネルギーを修正する必要がある．相対性理論だとエネルギー保存則の式は $\boxed{E = \frac{m_s c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - m_s c^2 - \frac{G m_s M_U}{R_f}}$ と修正される．但し，さらに厳密に行うとニュートン方程式を相対論的に書き直した式 (半澤―藤田の式) を用いる必要があるが，これは今後の課題としよう．

7.3 無限宇宙の模型

宇宙模型として宇宙には限りがないという「無限大の宇宙模型」を考えて行くとき，その基礎となる観測事実はいくつかある．そのうち，構成粒子である陽子と電子の安定性が最も重要である．また「宇宙の背景輻射」も重要な観測事実であると言える．これらの観測事実を基にすると，宇宙が無限大であると言うことを出発点にすることが最も科学的であることがわかる．

7.3.1 有限宇宙の爆発 (宇宙ファイアボール)

この我々の宇宙 (有限宇宙) が百数十億年以上前に爆発したと仮定することは，恐らく，科学的に言っても充分に道理にかなっていると考えられる．但しこの百数十億年という数値自体にあまり意味はない．この爆発の仮定は有限宇宙の膨張 (銀河の膨張) という観測事実と関係している．沢山の銀河を観測するとそれらが互いに膨張していることがわかっている．この有限宇宙においてはそれぞれの銀河が互いに遠ざかっている証拠でもある．しかしながら，沢山の銀河がどのように膨張して行くかと言う動力学はハッブルの法則からでは良くわからない．さらに付け加えると，遠くの銀河がより高速で遠ざかっていると言う事実は，遠くの銀河ほど昔の状態の銀河を見ている事になっていることも考慮する必要がある．それは遠くの銀河から届く光はそれだけ時間が掛かっているからである．これは遠くの銀河は爆発の初期の段階を示していることに対応している。すなわち，宇宙ファイアボールの初期段階の銀河は高速で膨張していることを意味している．

- 有限宇宙の膨張の停止： この銀河群の膨張はいずれは必ず重力による引力により停止する事になる．そしてこれらの銀河は次第に融合してゆく．それが大雑把に何時ごろであるかは，ある程度は計算出来ると思うが，あまり興味が湧く事でもない．しかしながら，膨張が止まった段階で，沢山の銀河は少しずつ融合しながら，より大きな銀河団を作って行く事であろう．そしてそれを繰り返す事により，最終的には，２個か３個の大銀河団になって行き，それらが最後の衝突を起こす事になるであろう．

- 宇宙ファイアボール： その最終的な衝突で作られた物を「宇宙ファイアボール」と呼ぶ事にしよう．この宇宙ファイアボールの状態は非常に熱いものになっている事と考えられ，それは恐らくはこれまで考えられて来たビッグバンの状態の内でバリオンと電子の世界になった状態に似ているものと考えられ

よう．従って，この場合は最初にヘリウムまでは作られるであろうが，その後はやはり急速に冷えて行き，重い原子核の生成はこの宇宙ファイアボールの段階では，作り難いものであると考えても矛盾は無いものと思われる．

7.3.2　前有限宇宙の残骸

この新しい宇宙論によると，銀河と有限宇宙の形成は繰り返す事になる．この有限宇宙の形成は約１５０億年程の昔に大方作られたものと考えられているが，それではその前の有限宇宙はどうであったのであろうか？恐らくは，今の有限宇宙の様に沢山の銀河が融合して宇宙ファイアボールになったと考えられるが，何か，その爆発の「残骸」に対応するものがあれば，よりわかり易いと思われる．

● 有限宇宙爆発の残骸：　その残骸に対応するものとして考えられるものは，やはり銀河の大構造であろう．この銀河の大構造に関する詳しい内容は，宇宙物理学の専門書を参照していただく事にしたいが，銀河団の空間的分布がある所でかなり偏っているという事である．それはまるで壁を作っている様に並んで見える場合が観測されているのである．これは，最終段階の銀河団の衝突の仕方と密接に関係しているものと思われる．

7.3.3　銀河の融合と有限宇宙の爆発

それではこの有限宇宙の膨張はどうなって行くのであろうか？ハッブルの法則で見たように，遠くの銀河の速度が速いことはその銀河の昔の状態を見ていることになっている．すなわち，昔の状態ほど銀河の膨張速度が大きいと言う事は，逆に言えばその後，膨張速度は弱まっていることを示している．銀河はその後，それぞれが次第に融合して行くことになるであろう．それがどのように融合するのかと言う問題は多体問題であり，極めて難しいものである．

すべての銀河がいずれ融合して行くことは，現在の重力理論を含む場の理論からしたら明らかなことである．しかしその融合がどのような形で全体の爆発に至るのかという動力学を解く事は非常に難しいものと思われる．実際問題として，その融合・爆発を星のレベルで取り扱うか，銀河のレベルでよいのか，それとも，粒子描像まで下がって扱う必要があるのか，この辺の問題から解決して行く必要があろう．いずれにしても，この「宇宙ファイアボール」の形成の議論に関しては，今後の研究に期待しよう．

7.3.4 無限の過去・未来と無限の空間

この新しい宇宙論の描像によれば，無限に遠い過去から無限に遠い未来まで同じ事（銀河と有限宇宙の生成）を繰り返してきたし，また将来も繰り返す事になる．それでは，無限の過去・未来とは一体何なのであろうか？これこそは，確かに永遠の課題であろう．しかし，はっきりしている事は，人間は有限量しか理解出来ないのである．無限と言葉で言っても，実際は何もわかっている訳ではない．数学者に言わせれば，人間は所詮数える事しか出来ないのであるという事になる．そして，脳科学者に言わせれば，人間の脳はせいぜい１兆個の脳細胞により思考しているから，無限の過去・未来を理解する事は不可能であるという事になる．

さらに言えば，空間的にも宇宙は無限であるとしても，なんら矛盾が無い．これまでは，宇宙が無限であるとしたら Olbers のパラドックにより，星の光を全て足すと必ず無限大の光になってしまうから，宇宙が無限では困ると言う事が考えられてきた．この事も人々がビッグバン宇宙論を支持する一つの根拠でもあった．しかしながら， Olbers のパラドックには基本的な仮定として，星が常に一様に分布しているという事がある．この新しい宇宙論の場合，明らかに一つの宇宙がほとんど閉じた形で成立しており，一様性の仮定が成り立っていない．さらに，光が重力と散乱する事より，必ずしも全ての光が遠方まで届くわけではない．さらに言えば光速は有限速度であり無限の彼方から光が届くには無限の時間が掛かることになっている．従って，この我々の有限宇宙と同じ様なレベルの有限宇宙が他に無限個あったとしても，別に驚く事ではない．ただ，残念ながら我々にはそれ以上理解できないし，また他の有限宇宙との相互作用もほとんどゼロに近いであろうから，物理学の対象にはならない事も確かである．それ以上に，人間には無限の空間と言う事を理解する事が出来ない．どんなに想像したとしても，それは所詮有限の空間なのである．

7.3.5 新しい宇宙像

これまで見てきたように新しい宇宙像とは，沢山の銀河が形成され全体が膨張し続けて行き，その膨張エネルギーを使い果たしたある段階から今度は収縮に転じて行き，いずれはまた宇宙ファイアボールになり，爆発して膨張するという現象を繰り返して行くという描像である．

- 有限宇宙の中心： この場合，この有限宇宙に中心はあるのであろうかと言う疑問を持つのは至極当然である．惑星系も銀河系も全てその中心に重い星

が存在しているからである．しかしながら，銀河全体を見るに及び，これはむしろ原子核の多体系に近いのであろうと想像できる．原子核の場合，それは陽子と中性子によって作られている．ところがこの物体には中心となるものが存在していない．そのれぞれの核子が平等の役割を果たしていて，原子系のように，その中心に原子核があるという系ではない．今の場合，一つの核子からすると，その原子核の中心が何処であるかという設問に対しては答える事は出来ない．但し，その原子核全体を見渡す事が出来れば，その中心が大雑把には何処にあるかが，平均値としてわかる．この有限宇宙全体の中心の問題もこれに極めて近いものであると考えられる．平均したら，この有限宇宙の中心がどのあたりにあるのかはもし有限宇宙全体を見渡す事が出来たら，大雑把には議論出来る可能性はある．しかし，有限宇宙の一部に存在する観測者からこの有限宇宙の中心を探る事は原理的に不可能である．

7.3.6　宇宙の無限性と背景輻射

この我々の有限宇宙には 2.7 K の背景輻射が存在している．宇宙にこの低エネルギーのフォトンが一様に分布し存在しているとするとこれはかなりのエネルギーになっている．大雑把に言って，すべての物質が持っている宇宙の重力ポテンシャルエネルギーの数%にはなっているものと考えられている．この事自体は別に問題ないが，問題はフォトンが我々の宇宙からその外へエネルギーを持ち去っているという事実である．これがたとえ重力ポテンシャルの数%でも，爆発を繰り返している限り，いつかはすべての重力ポテンシャルエネルギーを持ち去ってしまう事は明らかである．

この現象を解釈する模型として大雑把に言って次のことが考えられる．それは，我々の有限宇宙と同様な有限宇宙が無限にあると言うものである．この場合，どの宇宙も爆発と収縮を繰り返し，その度にこの 2.7 K の背景輻射を放出すると言う事は同じである．しかしこの場合，2.7 K の背景輻射は宇宙全体に存在するべきものであり，その温度の多少のずれはあるにせよ，基本的には，この電磁波の海の上に我々の宇宙が存在していると言う事になる．この模型の場合，2.7 K の背景輻射を理解する事はそれ程難しくはなくなっている．

7.3.7 無限宇宙 (Mugen Universe)

宇宙全体を考える時に，我々と同じレベルの有限宇宙が無限個あるべきであるという事が理論的に結論される事が分かる．これは物理とは言えないが，少し解説する事にしよう．まず，最初に，宇宙の階層構造を定義しておこう．それは大雑把に以下のように定義するのが合理的であろう．

$$10^{57} \times \mathbf{protons} \Rightarrow \mathbf{star} \quad : \quad 10^{12} \times \mathbf{stars} \Rightarrow \mathbf{galaxy} \quad :$$

$$10^{12} \times \mathbf{galaxies} \Rightarrow \mathbf{universe} \quad : \quad \infty \times \mathbf{universe} \Rightarrow \mathbf{mugen-universe}.$$

● 一個の有限宇宙の問題点： この有限宇宙が無限の過去から存在したと言う仮定は，至極，合理的である．逆にもし途中で作られたとしたら，どのように作られ，またその元のエネルギーは何であるのかなど，説明がつかない事であふれてしまうのである．従って，無限の過去から現在の我々の宇宙が存在していたと言う事は，現在の物理学においては間違いない事である．この場合，宇宙ファイアボールの生成を無限回繰り返してきた事も事実と考えてよい．しかし，そうだとすると問題が生じるのである．それは１回の宇宙ファイアボールにおいて，有限のエネルギーがフォトンとニュートリノによって我々の宇宙の外に放出されている．それがたとえ小さな量でも，無限回行なっている限り，我々の宇宙の重力エネルギーは既に無くなっているはずであり，理論的に矛盾してしまう事になる．これを回避するためには，どうしても我々と同じレベルの宇宙が無限個存在していないと困る事になっている．

7.3.8 無限個の銀河の宇宙

宇宙全体には我々の宇宙と同じレベルの宇宙が無限個存在しているという仮定の場合 (Mugen-universe) ，フォトンとニュートリノによってエネルギーが失われても問題にならない．それは明らかで，他の宇宙から結局同じレベルのフォトンとニュートリノエネルギーが供給されるからである．従って，この場合，重力エネルギーの問題は解決される．また宇宙の背景輻射の原因はこの無限宇宙から来る輻射であると考えられるため輻射が熱平衡状態であると言う事実も理解されている．

● 無限宇宙の重力安定性： しかしこの時，その無限宇宙は何故，重力的に安定であるのかが問題になるが，これは無限系を考えると解決される事であ

る．今，簡単のために１次元系を考えよう．無限空間を円で表して，後で半径を無限大にすればよい．この時，今，我々の宇宙がある一点に存在するとしよう．この場合，その右方全体の宇宙から引力を受ける事になる．所が，同じように左方全体の宇宙からも引力を受ける事になっている．円を考える限り，これは両者ともに同じ重力になり，即ち，つり合う事になり，安定である事がわかる．これは勿論，まだお話レベルであるが，しかし，理論内の整合性は常にしっかり考えておく必要がある事は間違いない．

7.4 隣の有限宇宙 β の観測は可能か？

我々の宇宙のことを有限宇宙 α と呼ぼう。この有限宇宙 α の大きさが百数十億光年で、そこには１千億個程度の銀河系が存在していると言うものである。これは実際、観測から得られているものである。そして有限宇宙 α の近くにある他の有限宇宙を有限宇宙 β と呼ぼう。恐らくはこの 有限宇宙 β も同じような大きさと１千億個程度の銀河系から成り立っているものと考えられる。それではこの時、有限宇宙 β の光を我々は観測することは可能なのであろうか？

7.4.1 光の Red shifts はない？

我々のような有限宇宙が無限個あると言う無限宇宙論において、恐らくは近くにある有限宇宙 β は我々の有限宇宙 α から遠ざかっているわけではなく、また近づいているわけでもないと考えられる。すなわち、比較的定常的な宇宙になっているものであろう。この場合、近くの有限宇宙 β からの光は Red shifts も Blue shifts もないことになっている。これでは例え有限宇宙 β からの微弱な光を観測したとしても、その光から何かを引き出すことは非常に難しいと言える。

7.4.2 強い Blue shifts の光は？

しかしながら我々の有限宇宙 α からの光はすべて Red shifts であることがわかっているので、もし強い Blue shifts の光を観測したらこれは有限宇宙 β からの可能性が出てくる。それは、たまたま有限宇宙 β が宇宙ファイアボールの状態にあった時は、その光が強い Blue shifts の光として観測されるからである。このような偶然が起こっているとは勿論、考え難いものだが、しかしその可能性が有限である限り、調べる価値はあると思われる。

第８章　今後の物理学

今後の物理学について概観しておこう．これまでは基本的に真空における自然現象を主として扱ってきている．４個の相互作用について解説をしてきたが，これらは全て真空における物理現象に当てはまるものである．特に，これまで科学において重要な役割を果たしてきたのは加速器を用いた巨大科学であったが，今後はどのような物理学が主流になって行くのであろうか？ここでは将来の物理学に対する大雑把な描像を解説して行こう．

8.1　最近までの物理学：理論

まず，今後の物理学の方向を議論する前に，最近までの物理学を簡単に概観しよう．これまで，一般相対論の影響からか，場の理論でも幾つか方向を誤った理論が流行してしまった．その一つは自然界における対称性に関係している理論である．物理学ではキュリーの原理によって自然界の対称性が「自発的」(自然) に破れる事などあり得ない事が常識であり，理論的にも証明されている．ところが１９６０年初めに南部達が「自発的対称性の破れ」という一種奇抜な考え方を提唱してしまい，不幸な事に人々がこの理論に乗っかってしまったのである．今となっては模型計算の中で近似を用いたために対称性が一見破れたように見えただけの「間違った理論」である事が証明もされている．しかし残念ながら人々は５０年以上もその間違いに気がつかなかったのである．

8.1.1　何故，方向が間違ったか？

何故，物理学者はそのような単純な誤りに気がつかなかったのであろうか？これには多少の理由もある．それは場の量子化から発生する無限大とそれに関連した「繰り込み理論の不透明さ」と関係している．特にゲージ理論のみが繰り込み可能な理論であるという誤った「常識」が最も重大な間違いを惹き起こす事になったのである．この常識の圧力が「自発的対称性の破れ　⇒　Higgs

機構 ⇒ Weinberg-Salam の標準模型」という「間違い連鎖」を惹き起こす最大の原因になったと考えられる．非可換ゲージ理論から出発すると，相当無茶苦茶なことをしない限り，CVC 理論を再現できなかったからであろう．論理的に無理な飛躍をするためにはこの「自発的対称性の破れ」とそれに続く Higgs 模型は絶好の模型計算の結果であったと言う事である．

8.1.2 現代物理は単純明解

実際には量子電磁力学，強い相互作用，弱い相互作用そして重力と全ての力が一つの量子場の理論として非常に健全な形で定式化され完成されたものとなっている．そしてこの量子場の理論は正しく計算すれば，自然な形で観測量を正確に再現できる理論体系である．そこには繰り込み理論も必要はないし，対称性は外部から力が加わらない限り常に保存されている．ここでその詳しい内容を解説する事は出来ないし，またその必要もないと思う．しかしこの本を読めば，大半の読者がその理論体系の輪郭は理解できるようになると考えているし，またそのための最大限の努力はしている．更に言えば，この理論形式は繰り込み理論や対称性の破れの理論などと比べると格段に単純・明解になっているため，実際の理解は今までよりはるかに簡単になっている点を強調しておきたい．

8.2 最近までの物理学：実験

今まで巨大科学が現代物理学を牽引して重要な発見をもたらしたことは事実である．そしてその功績は充分大きいと言えることは間違いない．しかしここでは近年における巨大科学がもたらした問題点についてのみ議論し，その解説を簡単にしておこう．

8.2.1 加速器の物理学

この半世紀の間，CERN(欧州原子核研究機構) は巨大科学の盟主に君臨してきた．しかしながらここ数年間，重要な実験が次々と失敗に終わり，CERN はその権威と信用を完全に失墜している．

- ニュートリノの速度： まず，ニュートリノが光速を超えたという信じられない実験結果をメディアの前で発表してしまった．発表する方も科学者とし

て最悪だが，それを特集にまで組んで放送したメディアも軽率であった．

● Higgs 粒子の存在：　また「Higgs 粒子の存在は９５%以上なくなった」という CERN の実験データが２０１１年秋の物理学会で報告された．それにもかかわらず，それから１０ヵ月後には，突然，Higgs 粒子の存在を示すデータが「One Event (１事象)」見つかったとメディアで宣伝した．ところが，このデータがおよそ信頼出来るものではない事が発覚して，専門家の間で問題になった．しかしそれから今まで (約３年間)，Higgs 粒子関連のニュースが全く消えている．いずれ CERN は「Higgs 粒子の存在を示す証拠は発見できなかった」と発表するものと思われる．実際，標準理論として知られている Weinberg-Salam 模型は非可換ゲージ理論であり，これは「厳密に解いたらその構成粒子 (ウィークボソン) は観測量ではない」事が証明されている．彼等はそれを「Higgs 機構という近似をしたらうまく観測量になってくれた」と主張していることに対応するが，これは誰が見ても正常な科学の論理とは言えない．

● 巨大科学：加速器の物理：　このような状況下において，今後，巨大科学はどうすれば良いのかという事が深刻な問題になっている．これは大変難しい問題であるが，しかし答えは明快である．現在までに，物質の最小単位であるクォーク・グルオンの探索実験は無意味である事が理論的に厳密に証明されている．従って，１ GeV 以上のエネルギーを持つ加速器の物理が科学的に意味があるとは考えられないと言う事である．さらにこれまで人々が空想を欲しいままにしてきた「一般相対論」が理論・実験の両面から完全に否定されている．これはある意味で巨大科学の終焉を意味している．科学研究はもともと地味なものであり，その基本的な姿勢にそろそろ戻るべきであるという事だと思われる．さらには科学研究に限らずどの研究においても，研究機関はその体制の新陳代謝《役目を終えた研究所を閉鎖して新しい研究機関を作る》を常に行ってゆく必要がある．

8.2.2　重力波の物理学

一般相対論の方程式が波の形の式を持っているため，それが重力波として伝播する可能性があるのではないか，と言う議論が現在でも時々行われている．重力波が真空中を伝播したら相対性理論に反するのであるが，何故かある種の人々はこの重力波に興味を持ってしまう．ここでは，それはあり得ない事を明確にしておこう．実験が巨大科学の一部として膨大な予算とともに行われてお

り，黙ってそのまま見過ごすわけには行かないのである．

● 重力波の痕跡：　欧州宇宙機関が２０１５年の３月に「重力波の痕跡」をとらえて，宇宙初期の重力波を観測したと記者発表した．ところがこの話も，２０１５年の秋には「これは間違いであった」と訂正の発表をした.「宇宙背景輻射における重力波の影響」だと考えた観測事実はただ単に「銀河のちりの影響」である事が証明され，重力波の痕跡とは無関係だったのである．このような単純な検証さえも行わないで，発表することは科学者のすることではない．

● 重力波とその伝播：　最近 (２０１６年２月)，遠方の星の衝突に起因した重力波が観測されたと言う論文が Physical Review Letters (116, 061102) に発表された．ここで，この論文の内容を検証しその物理を理論家の立場から解説しておこう．まずはじめに，重力波の言葉の意味であるが，この論文の著者が「重力波」と言っているのは一般相対論における「波の方程式」から類推したものである．しかしこの重力波が観測にかかる物理的な波であるかどうかと言う問題はほとんど議論されてはいなく，実際，これが自然界に存在する波であると言う物理的な根拠は全くなく１００年が過ぎている．さらに，これは「重力子 (graviton)」とは無関係であり，従って媒質を伝播する「古典的な波」を意味している．ところが，この「重力波」は物質とどのような相互作用をするのかという最も重要な問題が理論的にわかっているわけではない．この論文の主張では，地球から約１３億光年離れた２個の星が衝突し，１個の星に融合した時に重力波が生じたとしている．そして昨年の９月にこの波のシグナルをキャッチしたというのが論文要旨である．

　前述したように，この著者は重力波を「重力子」ではなく，あくまでも古典論における波として捉えている．それではこの重力波はどのように伝播するのであろうか？この著者は重力波の伝播を「空間の振動」としてみており，その「空間の振動」がレーザー光に影響して干渉実験に引っかかったという主張である．これはフォトンの様なエネルギーの塊ではなく，媒質 (空間) の振動エネルギーを観測したと思っているのであろう．この論文では現代の先端技術を駆使しているが，その物理は１９世紀以前のもので，現代物理学の立場からしたら議論の対象にさえならないものである．

● エーテル：　重力波の伝播を空間 (エーテル) の振動として捉えると，これは相対性理論と矛盾している．この波の伝播を場の理論の立場からみてみると，もう少し詳しい物理的な実情がわかってくる．計量テンソルに対する方程式はすべて実数なので，そのままでは粒子としての伝播はない (教科書「 電磁気学」(現象と理論) の第１３章を参照)．従って，エーテルではなく「重力子」

としての伝播を考えると，どうしても場の量子化をすることが必要となる．しかし計量テンソルを量子化するといっても何の事か分からないため結局，著者は物理的な意味を理解することなく重力波を古典的な波として扱っている．

● エーテルの亡霊 ：　相対性理論を直接，観測によって確立した実験が Michelson-Morley によって行われ，この実験結果により，慣性系の空間は相対的であり，絶対的な空間 (エーテル) は存在しない事が証明されている．その後１００年以上に渡る，膨大な検証実験や理論的な進展により，相対性理論の正しさは確立されており，それは現代物理学の基盤となっている．これに対して，この「重力波の発見」は観測されたシグナルが相対性理論と矛盾している事を示している．１０億光年彼方の星達の「空間振動」がたとえ「１事象」にしても真空中を伝播して地球まで到達したとしたら，これはまさに絶対空間 (エーテル) の存在なしでは考えられない事である．これはまるで「エーテルの亡霊」を見ているようである．しかしながら，重力波が相対性理論と矛盾してしまうと言う事実は，それ程驚くことではない．それは，一般相対論が相対性原理と矛盾していることを理解していれば，当然な帰結でもある (付録 A「一般相対論の解説」参照)．それにもかかわらず，この実験の著者が一般相対論を信じようとしているのは，一般相対論が特殊相対論を超える理論であるという「妄想」が主な理由であると考えられる．

● 重力波の実験評価 ：　この重力波の実験のように，相対性理論と矛盾する事象を「発見」した場合，その実験の評価には二つの可能性が考えられる．一つには，実験がどこかで間違っているという可能性である．恐らくは通常の感覚からすると，確率的にはこれが最も高いものと結論されよう．もう一つの可能性として，この発見されたシグナルは重力波とは無関係であり相対性理論と矛盾はしないと言うものである．この場合，この実験結果が何か他の新しい現象と結びついている可能性を否定はできないが，しかしそれが何なのかは今後の研究によっていよう．

● 重力波発見への反証 ：　「重力波発見」の発表から半月ほど経った段階で，この実験の反証と考えられる観測事実が天文衛星「フェルミ」のチームから発表されている．このチームは２０１５年９月，天文衛星により「ガンマ線バースト」とみられる現象を観測していたのだが，これは重力波を観測したのとほぼ同時刻の観測データであった．ガンマ線バーストは主に超新星爆発で生じる現象と考えられているので，巨大星 (ブラックホール) の融合で起こる現象とは考えられないことである．この観測チームは「重力波の発見はガンマ線バーストを捉えた可能性がある」と指摘している．

8.3　今後の物理学の方向

基本的な力が理解された現在，今後の物理学はどのような方向に進んで行くのであろうか？これは自然界を理解しようとする科学の立場からすると，量子生物が第１の候補となるであろう．生物を量子論的に理解しようとすると，そこには膨大な観測事実が存在しているがそのほとんどは全くわからない状態と言って良い．それは電子の振る舞いのうちでそのエネルギーが著しく小さい場合の取り扱いが，これまで全くと言って良いほど研究されていないからである．さらに溶液中の電子はどのように振舞うのか，これはまだ単純なイメージさえも出来ていない．

8.3.1　溶液の物理

これまでの物理学は基本的には真空中に存在している物質の振る舞いを研究する事が主力であった．量子場の理論は当然真空のみが興味の対象であったし，また固体物性も結晶が存在するところは基本的には真空，あったとしても空気中ということである．そして，その物理は，かなりの精度で現象を記述できる理論体系が完成されたと考えて良い．

今後の方向として，量子生物の研究のまえに，溶液中の物理の研究は極めて大切である．生物を物理の言葉で理解しようとすると，どうしても，溶液中における化学変化の問題にぶつかるのである．この場合，化学反応の現象論は良く理解されているのだが，その化学反応を電子の言葉で物理的に理解する仕事は，まだ，全くといって良いほどわかっていない．溶液だと何故，化学反応が起こり易くなってるのだろうか？溶液中では，例えば，水分子における電子は隣の水分子とどのような相互作用をしているのだろうか？

このように見て行くと，溶液中の化学変化の前に，溶液それ自体の性質をまず理解する必要がある事がわかる．溶液とは何かと言う事である．はっきりわかっている事として，溶液の場合，これ自体は真空中では存在できないと言う事である．即ち，溶液が溶液として存在するためにはそれを支える物質（容器）と圧力の存在が必須条件であると言う事であり，これは，溶液が全体としては束縛状態になっていないと言う事を意味している．この事より，溶液の状態は固体状態と決定的に異なっている事がわかるのである．いずれにせよ，すべてはまだ疑問だらけである．何か決定的に重要な事があり，それを物理の言葉で理解する事が，今後のこの分野の進展に大きな影響を与える事になるだろう．これからは何が決定的に重要な役割を果たしているのかを探す事であろう．

8.3.2　量子生物

物理学の主流は今後，量子生物の研究になって行くことであろう．それは生物を電子の言葉で理解するという事である．サイエンスとしては膨大な自然現象が広がっているがそれを量子生物として理解する事は，非常に難しい事であろう．しかし，サイエンスが自然を理解しようとする学問である限り，生物自体を量子力学の言葉でどうしても理解したいものである．

例えば，生物における神経の伝達を考えると，その情報を伝えるものは，やはり電子であろうと考えられる．しかし，それが電流のように伝達するのか，あるいは何らかの「波」のように密度波として伝達するのか，まだ全くわからない．もし電子による伝達ならばどのように電位差ができるのであろうか？さらに最小単位の電位差は一体どのくらいなのであろうか？

疑問は尽きないが，しかしそれに答えるのに，まだ糸口さえつかめてはいない．それは電場にしても磁場にしても，溶液中でどうなるのかと言う問題を物理学はほとんど答えて来なかったからでもあろう．生物は水を中心にして成立していることから，生物での現象は基本的に溶液中での化学反応に対応している．

付録 A　物理用語の解説

現代物理を解説する場合には，そこに出てくる言葉 (専門用語) をまずは説明しておく必要がある．それをしっかり行わないと，自然現象を解き明かしている理論を解説しても正確には伝わらない危険性がある．ここで，細かいことは別にして，重要な言葉の解説をして行こう．この章では式を書くこともあるが，大切なことはそれを言語として捉え，その式が何を意味しているのかを理解し，できれば覚えてしまう事である．ここではそれらの方程式の解き方を解説はしていない．従って，物理用語に慣れている読者はこの章を読み飛ばして頂きたい．しかしここで解説している物理用語のうち，相当に専門的な物理の解説も含まれている．その意味では，読者にはこの章のうちで必要な部分だけを拾い読みされるのが最も自然な読み方となっている．

A.1　運動学と動力学

力学や場の理論の言葉を解説する前に，運動学 (キネマティクス) と動力学 (ダイナミックス) という言葉を説明する必要があろう．これは非常に重要なのだが，割合，専門家においても，この言葉に対する認識が甘い場合が良く見受けられる．物理学を深く理解するためには，この言葉の意味合いを良く考えしっかり理解し，そして正確に覚えておく必要がある．

A.1.1　運動学 (キネマティクス)

まずは運動学について解説しよう．これは Kinematics の日本語訳であるが，実際は様々な意味が含まれている．一番良く使われる運動学は運動量とエネルギーの保存則に関するものである．これらは粒子の運動に関係しているものである．一方，相対性理論も運動学に入っている．系の変換は粒子の運動に直接の関係はなくても物理を理解する上では非常に大切である．どの動力学模型も必ず，相対論的な変換である Lorentz 変換に不変でなければならな

い．一方，系の対称性に関係する問題も運動学の一部である．この場合，粒子がその対称性を感じることになり，その運動学はかなりのレベルで粒子の運動を制限してしまうことが良くある．例えば，場の理論において SU(3) 対称性がある模型を考えると，その群によって規定される状態のみが許されるため，SU(3) 対称性の結果を正確に知っている必要がある．動力学を様々な近似をして解いた結果が，群の示す結果と矛盾していたらそれは動力学を正しく解いていなかったことに対応している．従って，運動学に強いと物理の理解が速くて正確になる場合が多いと言えるだろう．

A.1.2　動力学 (ダイナミックス)

動力学は単に力学とも言われるが，Dynamics の訳である．古典力学，電磁気学，量子力学そして重力の方程式すべてはこの動力学の方程式に属している．それぞれの運動方程式については，後できちんと解説して行くが，これらの方程式を解く事により，自然現象が理解出来る事になっている．現実問題として，これらの方程式をそのまま厳密に解く事は難しく，大半の場合は何らかの近似をすることにより方程式の解を求めることになっている．

A.1.3　一般相対論はどちらか？

それでは一般相対論は上記のどちらに属しているのであろうか？この一般相対論はダイナミックスではないことは，すぐにわかる事である．粒子の運動とは無関係であることから明らかである．それではキネマティクスなのであろうか？呼び名からすると，相対論が付いているのでキネマティクスに属するように見える．しかし特殊相対論がキネマティクスであると言う理由はそれが系の変換に関するものであり，例えば Lorentz 変換に対して Lagrangian 密度が不変でなければならないと言う要請がキネマティクスそのものだからである．実際，Lorentz 変換に対する状態関数の変換性は最も重要な運動学の計算の一つである．

一方，一般相対論は計量テンソルに対する方程式であり，状態関数とは全く関係はない．それは一般相対論が作られたのは量子力学が発見さる前だから，当然のことでもある．その意味においても，一般相対論がキネマティクスであるとは言えないことも事実である．従って，一般相対論が物理の理論内のどこで役に立つのかがあまりよく分かってはいない．

A.2　古典力学

まずは古典力学から簡単に解説しよう．わざわざ古典力学と呼ぶのは量子力学から区別するためである．但し，ここでの解説は力学を物理学科の学生が勉強して理解しようとするような説明ではなく，直感的に古典力学とはどのようなものかを知識として自分の頭に入れておく，そのような解説である．

A.2.1　Kepler 問題

地球の公転に関して Kepler は３つの法則を証明した．

- 地球の公転の軌道は楕円である (Kepler の第１法則)
- 面積速度は一定である (Kepler の第２法則)
- 周期の２乗は楕円の長半径の３乗に比例する (Kepler の第３法則)

これらの法則により，地球の公転運動は正確に記述されている．

A.2.2　Newton 力学

地球の公転運動を理解するためには Newton 力学の微分方程式を重力ポテンシャルがある場合について解けば良い．これは平均的な大学２年生が解くことが出来る数学の問題であり，物理学科の学生ならばその解き方を覚えることが必要であろう．しかし一般的に，例えばこの本を理解したいと思う読者には微分方程式の解き方を覚える必要はなく，むしろ Newton 力学の微分方程式が与える結果を理解して，そう言うものだと受け入れてくれればよい．それは数学は言語であり，その言語の成り立ちを理解すること (その微分方程式を解くこと) とその言語が何を伝達しようとしているか (その微分方程式が伝えたいこと) は質的にレベルの異なる問題であることに依っている．今は，数学を伝達手段として利用して欲しいということである．

- 地球の公転： 例えば，地球が太陽の回りを公転しているその軌道を与えている微分方程式を見るとその答が自然と頭に浮かんでくるものである．ここでは微分方程式の中身を解説しないで，そのまま書いておこう．今，地球の質量を m として太陽の質量を M としよう．地球と太陽の距離を r と表すと，微分方程式は $\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}}$ となる．ここで $\dot{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ を時間微分しなさい $\left(\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$ という意味であり，また $\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ と定義されている．この微分方程式の解き方は全て頭に入っていて，この方程式を解いたら軌道の式は $\boxed{r = \frac{R}{1+\varepsilon\cos\theta}}$ $(R$

は地球と太陽の平均距離, ε は離芯率で $\varepsilon = 0.017$) となることまで覚えている．この解から地球の軌道は楕円であり (実はほとんど円)，太陽の回りを１周するのに約３６５日かかることが計算されることになる (Kepler の第１法則，第３法則)．そして Kepler の第２法則は角運動量の保存則そのものであり重力ポテンシャルが中心力である事から証明されている．

● 古典論：　一般の読者にとって，微分方程式の解き方を覚える事はそれ程必要ではなく，従って微分方程式の数学自体は重要とは言えない．大切なことは，粒子の軌道が時間の関数として正確に決定されてしまう事である．即ち，古典力学は「決定論的世界」である．この Newton 力学は電子のようなミクロな運動の記述には適していないがマクロな量，例えば，振り子の運動などには十分応用が可能である．

A.2.3　慣性系と相対性理論

物理学において最も重要なことの一つに相対性理論がある．これは運動学のうちに属するものである．相対性とは系の相対的な問題であるためかなり難しい概念を含んでいるが，できるだけわかり易い解説を試みよう．相対性というからには少なくとも２つのことを比較していることがわかる．これは物理の理論を自然界に応用する時，どの座標系で考えているのかという問題が生じてくるが，そのことと関係している．それは明らかで，地球は自転しながら公転もしているが，その太陽系は銀河系の中で周回している．その銀河系は我々の宇宙の中で膨張しているのでやはり動いている．それではどの座標系を取れば物理の議論が出来るのかということが深刻な問題になる．そこで慣性系という概念を導入する．一つの慣性系 (静止系) を考えてそれに対して一定速度で相対的に運動している慣性系 (運動座標系) を導入する．この時，どちらの系で物理的な観測量を計算しても結果は同じであるという事が相対性原理であり，このことと矛盾するような理論模型は正しいものではない．

● 慣性系：　電車が等速直線運動をしていると，その電車のなかでりんごを上にあげても自分の膝に戻ってくる．それは地上で行った操作と全く同じものになっている．これは等速直線運動をしている電車が慣性系であることによっている．慣性系とは物理法則がその系では常に同じように成立している系のことであり，それは互いに等速直線運動をしている系に対応している．しかし，走り始めた電車は加速度運動をしているのでこれは慣性系ではなく，またメリーゴーランドの様に回転している系は慣性系ではない．

● **相対性理論：　どの慣性系でも物理的な観測量は同じであるという要請が相対性原理である．これはどの理論模型を作る場合でも必ず成り立っているべきものである．一方，相対性理論とは，慣性系同士の変換をした場合，運動方程式が不変になっているべきであるということを要請した理論形式でありこれは運動学とも呼ばれている．**

● **自由粒子の Newton 方程式：　自由粒子に対する Newton 方程式で座標を** $\boxed{\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 t, \quad t' = t}$ **と変換する (ガリレー変換) とその方程式の形は変わらないことが証明される．但しこの** $\boldsymbol{v}_0$ **は一定としている．このことをちょっとだけ式で書くと** $\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}' = 0}$ **となり，形が変わらないので，変換に対して不変であるという．ここで注意点であるが，微分方程式では形が全てである．形が同じだと当然，解も同じになっている．言語とはそういうものであるが，それは漢字がその形で意味をなしていることを考えてみれば同じことであることがわかる．**

● **相互作用のある Newton 方程式：　地球の公転運動を記述する微分方程式は，一見，ガリレー変換に不変ではないように見えるが，しかしこれは座標** $\boldsymbol{r}$ **が地球と太陽の相対座標である事を考慮すれば不変である．実際，地球の座標を** $\boldsymbol{r}_e$ **とし，太陽の座標を** $\boldsymbol{R}_s$ **とすると相対座標は** $\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_e - \boldsymbol{R}_s}$ **となり，これにガリレー変換を施すと** $\boxed{\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_e - \boldsymbol{R}'_s = \boldsymbol{r}_e + \boldsymbol{v}t - (\boldsymbol{R}_s + \boldsymbol{v}t) = \boldsymbol{r}}$ **となり，これは確かに不変になっている．**

● **遠心力：　座標系が回転しているとその回転座標系は慣性系ではない．回転系では新しい力が出てきてしまう．これは日常生活でも経験済みであると思う．回転している系では，まず遠心力を受ける．これは外側に放り出されるような力を受けることを意味している．この遠心力は地球が自転しているため地上でも働いているが，この大きさは赤道でも地球の重力に対して重力加速度が２%程度小さくなる補正であり，この変化を我々が感じる事はない．**

● **コリオリ力：　この力に加えてコリオリ力が働いている．しかしこの力は一般的には弱いため，日常生活で経験することはほとんどない．地球の自転によるコリオリ力の影響として，具体例はフーコーの振り子が知られている．また，地球上で物体が自由落下する場合，真下よりもほんの少しずれるのであるが，これがコリオリ力によるものである．例えば，東京で物体を** $100\ \mathrm{m}$ **上から落下させたとして空気抵抗を無視すると，その物体は** $\boxed{\text{東に } 0.018\ \mathrm{m}}$ **だけずれることになる．さらに台風の雲の渦が常に一定方向の回転となっている事はこの力に依っている．**

● 引力と斥力： Newton のりんごの話で，りんごがその木から落下するのは地球の引力によるものであるという言い方をする．この場合の引力は重力の意味で使われている．しかし物理学では一般的に「引力」とは引き合う力 (Attractive force) の意味である．電気的な力の場合，正電荷と負電荷の間には引力が働くが２個の電荷が同じの場合，その力は斥力になる．すなわち，電気的な力の場合でも「引力」という言い方を物理学では良く使っている．

● 重力はいつでも引力： しかしながら地球とりんごの間に働く力は，力の種類としては重力である．この重力は有限な質量を持っている２個の物体に必ず働く力であり，これは常に引力である．地球と太陽に働く力は重力であり，これは常に引力となっている．重力が何故，常に引力であるかという問題は長い間，理論的には未解決で非常に深刻な問題であった．しかし，この本で議論している新しい重力理論により，重力が何故，常に引力であるかが量子場の理論の言葉で明解に解き明かされている．

● 一般相対論と重力： 人々が一般相対論を重力の理論と考えていたのは，アインシュタインがそのように主張したことが最も大きな要因であろう．弱い重力という仮定で，一般相対論の方程式から重力場に対するポアソン型方程式 $\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\phi_g = 4\pi G\rho}$ が導出されている．但し，$\phi_g,\ G,\ \rho$ は重力場，重力定数，粒子密度である．ところが，この式は重力が引力と仮定して求められており，重力が引力か斥力かの最も重要な性質に関しては何も語ることができていない．重力場に対するポアソン方程式から引力の重力が求められたのは，その方程式の符号を手で調整したからである．重力の性質を議論するためにはどうしても場の理論を理解する必要があり，１９１０年代の当時の物理学では，当然のことながらそれは不可能な問題であった．

● 重力は何故，常に引力か？： しかしそれ以上に，何故，重力が常に引力であるかということ自体はアインシュタインの興味ではなかったものであろう．Newton の時代以来，重力が引力であることは自明なことであった．この重力場を理論的に扱うことは量子力学が完成され，量子場の理論が作られて始めて人々が興味を持った問題であろう．そしてそれは１９４０年代になって初めて可能になったと考えてよいが，しかしその重力理論が作られたのはつい最近のことである．それだけ重力理論は難しいものであると言えよう．

A.2.4　相対論的な力学の方程式

質点の運動 (今の場合，速度) が光速に近いくらい高速な場合を考えると，この運動を Newton 方程式で記述することは出来ない．その質点がマクロスケールの大きさの場合，相対論的な古典力学の方程式で解く必要がある．実は，この古典力学の相対論的な方程式はこれまで正確には求められていなかったのである．様々な理由はあるが，ここでその細かい議論は行わない．

● Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式へ： 最近の研究 (半澤・藤田論文) により，Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式が直接求められることが初めて明らかにされた．これは，Dirac 方程式に対してうまく期待値を取って，その期待値に対する時間発展の方程式を求めると，それは確かに相対論的な古典力学の方程式になっていることが証明されたのである．以下の数行の議論は専門家以外には不要なので読み飛ばして十分である．重力と電磁場がある場合の電子の運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \frac{m}{E}\boldsymbol{\nabla}\left(G\frac{mM}{r}\right)$$

と書ける．ここで E は粒子のエネルギーであり，この式は粒子が散乱状態の場合にのみ正しい式である．これは使用した近似式により，束縛されている場合には使えない．ここで $E \simeq m$ と非相対論近似をすると方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \simeq e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

となり，通常の重力ポテンシャルに対応している．このことは，Dirac 方程式を知らない場合，相対論的な古典力学の方程式を導出することは不可能であることを意味している．

A.2.5　古典力学から量子力学の導出は不可能

歴史的には確かに古典力学のハミルトニアンから量子力学の方程式が求められている．しかしそれはあくまでも発見ではあって，論理的な帰結ではない．従って，科学史は別にして，古典力学から Schrödinger 方程式を求める方法を学生に解説するのは最小限に留めておくべきである．当然，この発見的方法は物理学の基本方程式からすると正しい方向ではない．それは量子力学の方程式の自由度の方が古典力学の方程式の自由度よりもはるかに大きいからである．自由度の大きい方程式から自由度の小さい方程式を導くことは可能である

が，その逆は不可能である．これは自由度が情報量と関係していることを考えれば納得できるものと思う．

A.2.6　Ehrenfest の定理

これまでの量子力学の教科書の大半は，科学史的な観点から量子力学の基本方程式を導入してきたため，必ず古典力学の方程式から如何にして量子力学の方程式を導けるかという観点から議論を進めてきている．それでは量子力学から古典力学と呼ばれている普通の力学（Newton 力学）の方程式が得られるのであろうか？それに答えてくれるのが Ehrenfest の定理である．それは座標 $\boldsymbol{r}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して期待値をとると Newton 方程式になるという証明である．それらは状態を Ψ として

$\dfrac{d}{dt}\langle\Psi|\boldsymbol{r}|\Psi\rangle = \dfrac{1}{m}\langle\Psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\Psi\rangle,\quad \dfrac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\Psi\rangle = -\langle\Psi|\boldsymbol{\nabla}V|\Psi\rangle$ と求まる．ここで

$\boldsymbol{r} \equiv \langle\Psi|\boldsymbol{r}|\Psi\rangle,\qquad \boldsymbol{p} \equiv \langle\Psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\Psi\rangle,\qquad \boldsymbol{\nabla}V(r) \equiv \langle\Psi|\boldsymbol{\nabla}V|\Psi\rangle$

と定義すると運動方程式は $\boxed{m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}V(r)}$ となり，これは Newton 方程式そのものである．これには非常に重要な物理的な意味がある．長い間，Newton 方程式が物理学の基本であると考えられてきたが，この Ehrenfest の定理はそうではないと言っている．Schrödinger 方程式から出発して，座標と運動量の期待値を取ったら Newton 方程式が求まったため，Schrödinger 方程式がより基本的な方程式である事はあきらかである．これは古典力学のような決定論的な物理的世界はあくまでも近似的な描像であることを示している．

A.3　電磁気学

電磁気学は Maxwell 方程式が基礎方程式であり，その Maxwell 方程式は次の４個の方程式から成り立っている．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ここで ρ と $\boldsymbol{j}$ は電荷密度と電流密度を表す．この電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 B が場であると言う意味はこれが時空点の関数になっていると言う事である．

A.3.1　Gauss の法則

最初の方程式　$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$　は Gauss の法則と呼ばれていて，静的な電磁気学の基本方程式である．これと $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0$ の条件式で静電場が決まる．

● Poisson 方程式：　静電場の場合，電位 ϕ を $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$　と導入する事が良く行われ，この時 Gauss の法則から得られる方程式が Poisson 方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi=-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

と呼ばれている．点電荷 q が点 $\boldsymbol{a}$ にある場合，その電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r})=q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ となので任意の点 $\boldsymbol{r}$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は $\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}$ と求められる．

A.3.2　Gauss の法則の積分形

Gauss の法則の積分形は

$$\int_S E_n dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r})d^3r$$

と書かれる．ここで左辺の積分は体積 V」を囲む表面積 S 上での積分を意味し，右辺の積分は体積 V での積分を意味している．式が１個なのに電場が求められるは電荷分布が球対称性とか無限平面であるとかの特別な対称性がある場合に限っている．すなわち，電荷密度が例えば球対称を持っていればこの場合，未知変数である電場は１個の成分 E_r しか持っていない．このために，１個の方程式 (Gauss の法則の積分形) から電場が決まってしまうのである．

A.3.3　単極子が存在しない

方程式　$\nabla \cdot B = 0$　は電荷に対応する「磁荷」(モノポール) が存在しない事を示している．もし「磁荷」が存在したとするとこの方程式が時間反転不変性を破ってしまうため，この点からも磁荷の存在は否定されている．

A.3.4　Faraday の法則

方程式　$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$　は Faraday の法則と呼ばれている式で，これは磁場が時間変化すると起電力が生じると言う現象を記述する方程式である．理論的には，後で見るように，ベクトルポテンシャルを導入してその時の電場と磁場をベクトルポテンシャルで書き表すのであるが，この時 Faraday の法則はゲージ不変性を考える上で非常に重要な役割をする方程式になっている．

A.3.5　Ampere の法則

最後の式　$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$　は Ampere の法則である．しかし，Ampere の法則は右辺の第２項である　$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$　が存在しない場合であった．ところがこの最後の項が無いと，連続方程式が満たされなくなってしまうのである．連続方程式とは $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ の事であり，この連続方程式が成り立つように Ampere の法則を書き直したのが Maxwell である．Ampere の法則の積分系

$$\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 J \tag{A.1}$$

も良く使われる．この時，電流 J は $J = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$ で与えられている．この Ampere の法則の積分系により磁場が求められるのは，電流が特別な対称性を持つ場合に限ると言う事は静電場の場合と同じである．

A.3.6　電気双極子と磁気双極子

基本的な法則に加えて，現実の世界に極めて重要な役割を担う物理量が電気双極子と磁気双極子モーメントである．これを「モーメント」と呼んでいるのはそのオペレータがベクトルになっている事に起因している．オペレータを２重極，４重極そして８重極と展開する事により電磁気的な相互作用を分類して

いるからである．しかし簡略してモーメントを省略する事が多い．

● 電気双極子：　電気双極子モーメントは，正負の電荷が近接して存在する場合に作られる電場を遠くで観測した場合，あたかも 1 個の「電気双極子」が作る場として理解した方がわかり易い事によっている．負の電荷と正の電荷の距離を d としてそれに電荷 e を掛けた量 $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{d}$ を電気双極子モーメントという．この時，この電気双極子モーメントが作る電位 $\phi_p(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{A.2}$$

となる．電場は勿論 $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi_p$ により求められる．

● 磁気双極子：　磁気双極子モーメントは円電流に対応している．$x-y$ 平面上で原点を中心とした半径 a の円周上を電流 I が流れている時，その電流が作るベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{A.3}$$

と求められる．m は磁気モーメントであり，$\boldsymbol{m} = \pi a^2 I \boldsymbol{e}_z$ と書く事ができる．

A.3.7　ベクトルポテンシャル (ゲージ場)

Maxwell 方程式は電場と磁場に対する方程式になっているが，この式を別の変数で書いた方が便利である場合がある．特に，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ であるから，ここでベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入して磁場 $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と置くと，この時は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ は常に成り立っている事がわかる．さらに Faraday の法則から電場 $\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ と書ける事が容易に確かめられる．場の理論ではベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と静電ポテンシャル ϕ をまとめて 4 元ベクトル $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ と書き，ゲージ場とも呼ばれている．

A.3.8　電磁波：直感的な記述

電磁波を物理ではフォトン (光子) と言う．フォトンはスピンが 1 であり，その質量はゼロである粒子と考えてよい．まずは導入として電磁波についての直感的な解説をしよう．物質がないとき，ベクトルポテンシャルに対する方程式は

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0 \tag{A.4}$$

と求められる．この一般解が

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right) \tag{A.5}$$

で与えられることがすぐに確かめられる．ここで　$kx \equiv \omega_k t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$　と定義されている．これを式 (A.4) に代入すると　$\omega_k = c|\boldsymbol{k}|$　の関係式が求まる．これは光の分散関係式を表している．ここで $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ を偏極ベクトルと呼んでいる．これはゲージ固定条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$　より　$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0$　を満たしている．

● 電磁波とベクトルポテンシャル：　電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが，式 (A.5) そのものが電磁波に対応するわけではない．それは，この A は実数関数となっており，運動量の固有関数になっていないのである．電磁波は場を量子化して初めて理解できる事である．場の量子化とは式 (A.5) において $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$, $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ をオペレータと考える事である．この時，$c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ はフォトン 1 個を生成する演算子であるため，フォトンが作られる時は必ず式 (A.5) の第 1 項のみが現われる事になっている．すなわち

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} \tag{A.6}$$

である．これは運動量 k の固有関数になっているので，確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるものである．

A.3.9　電磁波の発振機構

電磁波の生成には場の理論の基本から出発する．まず，電磁場 (ベクトルポテンシャル A) と電子との相互作用は

$$H_I = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\, d^3r \tag{A.7}$$

である．この時この相互作用の時間変化を考えると

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = -\int \left[\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right] d^3r \tag{A.8}$$

となる．ここで電場は $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$　と書けている．よって W は

$$W = -\int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}\, d^3r + \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3r \tag{A.9}$$

となる．ここで式 (A.9) の右辺第２項は古典的な電磁場のエネルギーである．式 (A.9) の右辺第１項を W_1 として $W_1 \equiv -\int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}\, d^3r$ を計算しよう．

● 電磁波発振機構の量子論：　ここでは非相対論的な量子力学を用いるが，実際の記述としても十分良い近似である．相互作用 Hamiltonian は

$$H = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{A.10}$$

である．ここで電子の質量を m_e としている．また外場 $\boldsymbol{B}_0$ を $z-$ 軸方向にとっても一般性を失わないので $\boldsymbol{B}_0 = B_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_z$ としよう．この時，カレントは $\boldsymbol{j}$ が $\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{e}{m_e}\psi^\dagger(t,\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{p}}\,\psi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{ie\hbar}{m_e}\psi^\dagger(t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi(t,\boldsymbol{r})$ であり，これより

$$\frac{\partial\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} = \frac{e}{m_e}\left[\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\hat{\boldsymbol{p}}\psi + \psi^\dagger\hat{\boldsymbol{p}}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] = -\frac{e^2}{2m_e^2}\boldsymbol{\nabla}B_0(\boldsymbol{r}) \tag{A.11}$$

と計算される．従って電磁波を含む単位時間のエネルギー変化率は

$$W_1 = \int\frac{e^2}{2m_e^2}(\boldsymbol{\nabla}B_0(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r \tag{A.12}$$

と求められた．電磁波はこの式の最後にある $\boldsymbol{A}$ から発生する．

A.3.10　電磁場の量子化

電磁場の量子化について，これまでの場の理論の教科書に混乱した記述がよく見受けられるので，ここできちんとした解説をしておこう．

● 場の量子化：　電磁場の量子化は実験からの要請である．水素原子における $2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移の際に放出される光の場合，$2p_{\frac{1}{2}}$ の状態では電磁場の状態は真空であったのに，$1s_{\frac{1}{2}}$ 状態では１個フォトンが生成されている．これは通常の電磁場の理論では理解できない事である．そこで考案されたのが「場の量子化」である．何故，量子化と呼ばれるのであろうか？それは場をオペレータで書くからである．電磁場の量子化を式で書くと

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\left[c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{ikx}\right] \tag{A.13}$$

と自由場の解で展開して，その展開係数 $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ と $c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}$ を演算子と仮定する．量子化とはこの $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ と $c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}$ に対して

$$[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \tag{A.14}$$

$$[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = 0, \qquad [c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = 0 \tag{A.15}$$

の交換関係式を仮定する事である．この時，展開係数 $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$(消滅演算子) と $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$(生成演算子) はもはや単なる数ではなくて，演算子になっている．このため，このオペレータが作用する物理的な空間を定義する必要があり，それを $\boxed{\text{Fock 空間}}$ と呼んでいる．式で書くと，

$$c_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = 0 \tag{A.16}$$

$$c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = |\boldsymbol{k},\lambda\rangle \tag{A.17}$$

となる．最初の式で $|0\rangle$ を真空と定義し，この真空 $|0\rangle$ に $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ をオペレートして運動量 $\boldsymbol{k}$， 偏極 λ をもつフォトンの状態 $|\boldsymbol{k},\lambda\rangle$ が生成されている．

A.3.11　偏極ベクトルの物理

これまでこの偏極ベクトル $\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}$ に対して重大な見誤りがあった．それは，運動方程式を解く事なしに議論を進めた事によっている．まずはゲージを固定する前に電磁場 $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ が運動方程式を満たしている事が条件である．

- 偏極ベクトルの運動方程式 ：　電流がない時の自由電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$ (但し，$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{A.18}$$

と求められる．自由フォトンの解の形が

$$A^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda} \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{A.19}$$

で与えられるので，この式を (A.18) 式に代入すると

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{A.20}$$

が求められる．この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}$ の解が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロである．すなわち，

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \tag{A.21}$$

である．この方程式では $\boxed{k^2 = 0}$ (すなわち $k_0 \equiv E_k = |\boldsymbol{k}|$) が解である事が簡単に証明できる．ここでこの $k^2 = 0$ の式を (A.20) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{A.22}$$

の式が得られる．これは Lorentz ゲージ固定と同じ式であるが，しかしこの式は運動方程式から得られており，従ってそれ以外のゲージ固定が必要である．例えば，Coulomb ゲージ固定では $\boxed{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=0}$ となるので，これから $\epsilon_0=0$ となっている．さらには，フォトンの偏極ベクトル $\epsilon^{\mu}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ の自由度は確かに２個である事が自然な形で理解されている．

● 偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ の描像：　フォトンの偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ には

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda'}=\delta_{\lambda,\lambda'},\qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{A.23}$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している．

A.3.12　フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数として理解されるが，フォトンの状態関数は複素数である．これは電磁波の状態が

$$\langle\boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}(x)|0\rangle=\frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}}e^{-ikx} \tag{A.24}$$

と表されている事から理解される．

A.3.13　フォトンの偏光

フォトンのスピンは１であるが，その成分は２個である．生成されたフォトンはこの２つの状態が等分に混ざっている．１００個のフォトンが生成されたら，５０個のフォトンが一つの偏極状態を持ち，あとの５０個のフォトンがもう一つの偏極状態を持っている．

● 偏光板：　偏光板にフォトンを通す事により，この偏極状態を分離する事ができる．この場合，生成されたフォトンがどのような偏極状態を持つかは，偏光板の結晶構造やその電子状態に依存している．しかしフォトンが偏光板でどのような散乱を起こすのかは，理論的にはかなり難しい問題でもある．

● 原子状態の遷移：　原子状態の遷移によるフォトンの生成を考えると，その原子中の電子のスピン状態が偏極している場合，常に偏光したフォトンが観測される事になる．原子系のスピンを偏極させる事はそれ程難しくはなく，従って特殊に偏光したフォトンを作る事もそれ程難しい事ではない．

A.4　量子力学

原子の世界を記述する方程式は量子力学の方程式である．原子は中心に原子核があり，その回りを電子が回転運動している．これは太陽の回りを回転している地球の運動にそっくりであるが，しかし本質的に異なっている．電子に対してはその軌道自体が直接観測量となることはないし，また軌道には興味がない．今の場合，電子の運動を記述する物理量は状態関数 (波動関数) $\Psi(t, \boldsymbol{r})$ であり，方程式はこれを決定するものである．その際，電子状態の記述にどのような物理的な意味があるかということをきちんと考えることが重要である．これに対する回答であるが，物理的な観測量 (例えばエネルギー) はその物理量のオペレータを電子の状態関数により期待値を取る事により決定される．従って，電子の状態関数がわかっていれば，様々な物理的な観測量を計算することができるのである．

A.4.1　状態関数

量子力学における方程式は状態関数に対する方程式であり，これは Schrödinger 方程式と言われている．式で書くと時間に依らない Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\boldsymbol{r}) + V(r)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

となっている．ここで $\hbar$ は Planck 定数, m は電子の質量，$V(r)$ は電子が感じるポテンシャルである．E は電子の束縛状態のエネルギーであり，これをエネルギー固有値と呼んでいる．この微分方程式を境界条件 $\boxed{\psi(\pm\infty) = 0}$ で解くと波動関数とエネルギー固有値が同時に求まることになっている．

A.4.2　存在確率 (分布関数)

古典力学から量子力学の勉強に移ると，いきなり粒子の存在確率に関する話が出てくるため，理解する作業にギャップが生じる．このため，量子力学をきちんと理解することがかなり難しいものとなる．しかしながら，電子が状態関数で表されるということは，電子の存在が分布していることを意味している．その分布関数に対応するのが $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ である．そのためこの $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ のことを電子の存在確率と言うが，分布関数として理解する事が重要である．

A.4.3　粒子性と波動性

量子力学を勉強するとまず光の粒子性と波動性の問題がでてくる．光が波の性質を持っていることは，干渉実験とか回折現象などをとおして大方の描像は持つことができる．しかし通常の波と考えると，波を伝える媒質の存在が問題となる．しかし光は真空中を伝わってくる．その意味では光が波ではない事は明らかである．しかし波が持っている多くの性質を持っている．これが人々を混乱させた主な原因であろう．

● Planck の黒体輻射： 量子という概念を最初に提唱したのは Planck である．彼は黒体輻射の実験事実を再現するために，光がある最小エネルギーを持っていると仮定した．光の振動数を ν とするとき，光の最小エネルギー E は $E = h\nu$ であるとした．これはエネルギーが連続的に変化するという古典的な考え方を否定するものであった．それはエネルギーが連続的に変化するとしたら，必ず，そのエネルギーがゼロである場合が存在するはずだからである．この「光のエネルギーの不連続性」の仮定のもとに Planck は黒体輻射の強度の振動数依存性の実験事実を見事に再現したのである．

● 光電効果： 光の粒子性を顕著に表している現象として光電効果があげられている．光をある種の物質に照射すると，その物質に電流が流れるというものである．この現象を理論的に最初に説明を試みたのがアインシュタインであった．彼は光を粒子 (量子) ととらえて，光と電子の運動学より光電効果の現象を説明した．特に，電流の最大値がその光の強度にはよらず，光の波長によっている観測事実を説明する事ができたのである．この仕事は単純な運動学の計算ではあるが，科学史的な価値はかなり高く，恐らくは彼の相対性理論に対する貢献度よりも遥かに大きなものといえよう．

● 不確定性関係： 量子力学では不確定性関係といわれているものがある．これはある粒子 (質点) の座標と運動量の測定誤差には制限がついているというものである．しかしこの関係式は量子力学の結果である．この点を誤解している物理屋が相当数いるものと思うが，量子力学がきちんと理解できていればこのような誤解をすることはない．従って，この不確定性関係が量子力学を理解する上で重要な役割を果たすと言う事はないし，その関係式に特に深い物理的な意味があるわけでもない．ただ，直感的に質点の存在確率やその典型的な運動量などを推測する時に役に立つことはよくあるし，確かに有用ではある．また，量子論が古典的な決定論的な描像からはかけ離れていることを理解するのには，多少役立つかもしれない．

A.4.4　Pauli 原理

この Pauli 原理はフェルミオンと呼ばれる粒子にのみ有効な原理である．Pauli 原理とは，一つの量子状態にはフェルミオン粒子が１個のみが存在 (占有) できるというものであり，実験的にも充分検証されている．

● 物質形成の基礎は Pauli 原理： この Pauli 原理の法則があるから，原子が作られ，すべての物質が形成されている．従って，この世の中の存在と密接に関係している．この Pauli 原理はスピンが $\frac{1}{2}$ のフェルミオンに対して有効であり，そのフェルミオンとして安定な粒子は電子，陽子，中性子そしてニュートリノであり，これらはすべて素粒子である．

● 場の量子化と Pauli 原理： Pauli 原理は原理と呼ばれてはいるが，実際には場の量子化の結果である．フェルミオン場を反交換関係で量子化することにより，この Pauli 原理は導出されている．従って，現在では原理ではないが，しかしフェルミオン場に対して，常にその場を量子化することを要求している点で，理論的にも非常に重要であることは確かである．

● スピンと統計： 統計力学では粒子のスピンが半整数だとフェルミ統計に従い，そのスピンが整数だとそれはボーズ粒子でありボーズ統計に従うと教科書では必ず教えている．そしてフェルミ統計におけるフェルミ分布関数 $n(\varepsilon)$ は

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}$$

で与えられている．ここで $\mu,\ k,\ T$ は化学ポテンシャル，Boltzmann 定数そして系の温度である．一方，ボーズ粒子が従うボーズ統計ではその分布関数が

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1}$$

で与えられている．この統計規則に対して，素粒子である陽子や電子などがフェルミ分布に従う事は実験的にも確立されている．また，フォトンは素粒子でありボーズ統計に従う事は確かな事である．しかしながら，複合粒子に対して，この規則が当てはまるかどうかは良くわからない．少なくとも，この統計規則に物理的な根拠があるとは到底，言えない事である．例えば，ある原子の全スピンが半整数であったとしても，これは複合粒子であり，これを素粒子のように扱うことはできない．さらに，スピンが整数の原子はボーズ粒子であるという主張に対してもその根拠はない．スピンと統計のお話をさらに深く議論するのはこの本の目的ではないので，議論はここまでとしよう．

A.4.5 水素型原子

電子が外場を感じる時，その振る舞いを決定する方程式が Schrödinger 方程式である．電子が感じるポテンシャルは必ず，他の粒子によって作られている．これは，相互作用には相手がある事であり，１体問題ではない事を意味している．電子が陽子の作るポテンシャル V によって束縛される場合，その Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\boldsymbol{r}) + V(r)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{A.25}$$

となっている．ここで m_e は電子の質量である．またポテンシャル $V(r)$ は陽子が作るものであり，電気的な相互作用から求められている．その際，陽子は静止しているとしてその運動は無視している．

A.4.6 クーロン力

ここで，水素型原子の問題を簡単に議論しておこう．水素型原子の場合，ポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \tag{A.26}$$

で与えられている．ここで Ze は原子核の電荷であり，水素原子の場合 $Z = 1$ である．水素原子を議論しているのに何故，一般的な原子核の電荷を入れるのかと言う疑問を持つかも知れないが，一般的な電荷でも解けると言う事がその一番の理由であろう．さらに，その結果を覚える時には一般の Z で書いた方が覚えやすいことも，そのもう一つの理由でもある．

- デカルト座標： ここでポテンシャルを見るとこれは極座標 r の関数になっている．この Schrödinger 方程式をデカルト座標 (x, y, z) で解こうとすると非常に複雑になってしまう．実際，この微分方程式をデカルト座標で解こうとすると変数分離型にはなっていなく，簡単に解けるものとはなっていない．従って Schrödinger 方程式を極座標で書いてその座標系で解く事になる．

- 極座標での微分方程式： 極座標での微分方程式をどう求めるのかは結構，面倒でもあり，量子力学で最も難しい所であるのでここでは省略する．どの教科書にも載っているので興味がある読者は教科書を参考して頂ければ十分であ

る．ここではその結果のみを書いておこう．

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_e r^2}-\frac{Ze^2}{r}\right]\psi_{n,\ell}(r,\theta,\varphi)=E\psi_{n,\ell}(r,\theta,\varphi)$$

となっている．ここで n,ℓ は水素原子の状態を指定する量子数を表している．

- **エネルギー固有値：　エネルギー固有値 E_n は**

$$E_n=-\frac{m_e(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2},\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{A.27}$$

となっている．よりわかり易い表現は

$$E_n=-\frac{m_e Z^2\alpha^2}{2n^2},\qquad \alpha=\frac{1}{137},\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{A.28}$$

と書くことができるので，この形で覚えた方が良い．具体的に $Z=1,\quad n=1$ の場合を計算して見ると $m_e=0.511\quad \mathrm{MeV/c^2}$ より

$$E_1=-0.511\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{137}\right)^2\ \mathrm{MeV}=-1.36\times10^{-5}\ \mathrm{MeV}=-13.6\ \mathrm{eV}$$

となる，これが水素原子の基底状態のエネルギーである．この $\boxed{\mathbf{13.6\ eV}}$ のエネルギーの数字は覚えておいた方がよい．これが電子を水素原子からひっぺ返すエネルギーであり，イオン化エネルギーとも呼ばれている．

- **波動関数：　一般的な波動関数の形は**

$$\psi(\boldsymbol{r})=\psi_{n,\ell}(r,\theta,\varphi)=R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{A.29}$$

と書けている．ここで $R_{n\ell}(r)$ が動径の波動関数，$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ が角度の波動関数になっている．ここで基底状態の波動関数だけ書いておこう．基底状態を表す量子数は主量子数 n が $n=1$ である．角運動量の量子数 ℓ は $\ell=0$ である．この場合，基底状態の事を 1s 状態という．この波動関数は

$$R_{1s}(r)=\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}2e^{-\frac{Zr}{a_0}},\qquad Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{A.30}$$

で与えられる．a_0 は Bohr 半径と呼ばれているもので　$a_0=\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ である．

A.5 相対論的場の理論

物理は場の方程式により記述されている．ここで「場」という言葉 (概念) が良く使われるが，特に深い意味があるわけではない．状態関数 (波動関数) にしても，電磁場を記述する時にあらわれるベクトルポテンシャルにしても，それらは時間と空間の関数になっている．特に空間の関数になっている場合，それが場所によってその状態関数が変化することを意味している．これらのことから物理では状態を記述する物理変数を「場」と呼んでいる．それ以上の意味は特になく，むしろ，古典力学との対応関係が重要である．古典力学では質点の座標が時間の関数としてどのように振舞うかを知る事が目的であるが，場の理論ではその粒子の状態関数の情報を得る事を目標としている．

- 場とは何か？： 科学史的にみると「場」という概念は電磁気学からきている．このためこれと似た物理量のみが「場」であると考えている物理屋が少なくないかも知れない．しかし，物理の言語はその意味合いを正確に表現することが最も重要である．その意味でも，場の概念は基本的には状態関数が場所と時間に依存していることからきている事実をしっかり認識することが重要である．そうすれば「場」という概念がより深く理解できるものと思う．しかし「場の概念」の解説は結構，難しく，大半の読者には特に必要とはいえない．従って読みとばしてもこの本の理解に大きな影響はないと思う．これは主として物理学を勉強している学生・院生用として解説している．

- 非相対論との違い： 相対論的場の理論と非相対論的場の理論との違いを簡単に述べておこう．最も重要な違いはキネマティックスにあることは明らかであろう．分散関係式は当然，両者で異なっている．もう一つ重要な事として，相対論的場の理論には負のエネルギー状態の問題がある．それに対して，非相対論的場の理論ではこの問題を考える必要はない．実は，これらの違いを除くと，相対論的場の理論と非相対論的場の理論の違いはそれ程大きなものとは言えないことがわかっている．これは動力学の方程式を解いてみるとわかる事である．実際，例えば水素型原子の解では Dirac 方程式の解と Schrödinger 方程式の解は良く似ていて，運動学的にはかなり違っていても，そのスペクトルは予想以上に近い事が計算で確かめられている．

A.5.1　量子電磁力学 (QED)

電子と電磁場の相互作用を記述する理論体系が量子電磁力学である．この場合，電子の運動は Dirac 方程式によって完全に記述されている．一方，電磁場は Maxwell 方程式により正確に記述されている．この Dirac 方程式と Maxwell 方程式が現代物理学の最も基本的な方程式である．弱い相互作用も強い相互作用も重力もすべてこの量子電磁力学を基本にして理論が組み立てられている．

● Dirac 方程式：　ここで自由電子に対する Dirac 方程式を書いておこう．質量 m を持つ自由なフェルミオンの Dirac 方程式は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} - m\beta\right)\psi(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{A.31}$$

と書かれている．但し $\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ である．

● Dirac 方程式の自由粒子解：　Dirac 方程式は ψ を自由粒子解として

$$\psi_s(\boldsymbol{r},t) = u_{\boldsymbol{p}}^{(s)}\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{-iEt+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \equiv \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{-iEt+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$$

と仮定する．ζ_1 と ζ_2 は２成分スピノルである．これを式 (A.31) に代入すると

$$\begin{pmatrix} -m+E & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & m+E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{A.32}$$

となりこの行列式がゼロであるという条件より $\boxed{E = \pm\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}}$ が求まる．

● スピノル解：　これを式 (A.32) に代入すると規格化されたスピノル解 $u_{\boldsymbol{p}}^{(s)}$ と $v_{\boldsymbol{p}}^{(s)}$ が求まり

$$u_{\boldsymbol{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}+m}{2E_{\boldsymbol{p}}}}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_s \end{pmatrix},\quad v_{\boldsymbol{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}+m}{2E_{\boldsymbol{p}}}}\begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$$

となる．但し $u_{\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}u_{\boldsymbol{p}}^{(s)} = v_{\boldsymbol{p}}^{(s)\dagger}v_{\boldsymbol{p}}^{(s)} = 1$．ここで　$\boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$ (但し $\boldsymbol{n}$ は整数) $E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ である．χ_s はスピンの固有関数を表し，$s = \pm\frac{1}{2}$ である．

● 負のエネルギー解の物理：　$v_{\boldsymbol{p}}^{(s)}$ が負のエネルギー状態 $E = -\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ のスピノル解でありこれは物理的に意味がある状態として現われている．このこ

とは E が固有値であることから理解される．しかし負のエネルギー状態の存在はそのままでは問題が起こる．正のエネルギー状態は必ず負のエネルギー状態に遷移してしまう現象が起こってしまうからである．従って，このままでは Dirac 方程式の解が物理的に問題を起こしてしまうことになっている．

● 物理的真空： この困難を克服するために Dirac は $\boxed{\text{物理的真空}}$ を新しく定義した．その物理的真空とは負のエネルギー状態はすべて詰まっているという仮定である．こうすると正のエネルギー粒子が負のエネルギー状態に遷移しようとしても状態が塞がっているため Pauli 原理により遷移することが禁止されている．このため物理的真空は安定となっていることがわかる．但し，実空間では負のエネルギー状態は存在しなく，その状態に穴があいた時にそれが反粒子として物理的な状態になっている．

● 電磁場の負のエネルギー解： 電磁場の場合，負のエネルギー解はでてこない．電磁場の方程式において，そのエネルギー固有値 E^2 が固有値として１個だけ求まるからである．上述したように Dirac 方程式の場合は E に対する方程式であった．このことは Dirac 方程式が時間の１次の微分方程式であるため，時間発展が一方方向に流れていることによっている．負のエネルギー状態が詰まっていると言っても，その状態は運動量とエネルギー固有値によって指定されていることに注意する必要があろう．

● 反粒子： Dirac の真空ではそこに穴をあけた空孔を反粒子 (陽電子) と定義している．この場合，陽電子の質量は電子と全く同じであるが，その電荷の符号は電子とは逆になっている．負のエネルギー状態の粒子を１個取り出した状態のエネルギーは，負のエネルギーにもう一度マイナスをつけるため，正のエネルギーになっていることは，容易に確かめる事が出来るであろう．

● Maxwell 方程式：$\{\ \phi,\ \boldsymbol{A}\ \}$ による表記
ここで Maxwell 方程式をベクトルポテンシャル $\{\ \phi,\ \boldsymbol{A}\ \}$ で書いてみよう．

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi$$

としているので Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right) &= \mu_0 \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

と書かれる．これに Coulomb ゲージ固定条件 $\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0}$ **をつければベクトルポテンシャル** $\{\ \phi,\ \boldsymbol{A}\ \}$ **が求まる．磁荷がない事** $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0)$ **と Faraday の法則** $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0)$ **は自動的に満たされている事に注意しよう．**

● 電子と電磁場の相互作用： さらにこの電子と電磁場の相互作用ハミルトニアン H_I はわかっていて

$$H_I = e\int (j^0 A^0 - \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A})\, d^3r$$

と書かれている．これが量子電磁力学の相互作用ハミルトニアンである．

● 電磁場の量子化： この量子電磁力学の系は厳密に解くことが出来ないため，摂動論で計算することになっている．さらに，水素原子の遷移をみると，$2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ の基底状態へ光を放出して遷移する．この時，電磁場の状態からすると，$2p_{\frac{1}{2}}$ 状態では真空なのに $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態ではフォトンが生成されている．この現象は通常の量子論では記述できなく，従って電磁場 A の量子化を考えざるを得ない．それでは「場の量子化とは何か？」を言葉で説明すると，場の量，例えばベクトルポテンシャルを演算子と見なすことである．この方法により，粒子ができたり消えたりする現象をうまく表現できている．

● Dirac 場 (フェルミオン場) の量子化： 一方，Dirac 場に関しては，Pauli 原理を説明するために，フェルミオン場を反交換関係で量子化する必要がある．Dirac 場 ψ を自由粒子で展開し，その展開係数を演算子とする手法は電磁場と同じである．

● 繰り込み理論： 電磁場と Dirac 場を量子化すると，この場合，フェルミオンの自己エネルギーは発散している．この発散に対して，これを波動関数に繰り込む手法が発展させられてきた．この繰り込み理論に関しては，すでに解説してあるのでここでは説明はしないが，注意するべきこととしては物理的な観測量には発散が現れないことが証明されている点である．，結局，場の理論において人々が最も悩んできた繰り込み理論は何処にも利用される場所はなく，従って，理論形式自体が不要であることが現在はわかっている．

● 量子電磁力学の定数スケール： ここで QED における定数スケールについて議論しよう．QED の Lagrangian 密度は．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と書けている．ここで $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ である．この場合，次元がある定数は m だけであり，従って，すべての観測量は m により表現されている．

A.5.2　強い相互作用

電磁的な相互作用よりもはるかに強い力があり，それを強い相互作用と呼んでいる．原子力の現象や核融合の物理の基本はこの強い相互作用に依っている．原子力発電は原子核の核分裂の過程を利用したものであり，一方，星の内部のエネルギーは軽い原子核の核融合反応によってエネルギーを獲得している．その強い相互作用の基本理論は量子色力学と呼ばれる理論体系である．

● 量子色力学：　量子色力学 (QCD) は強い相互作用の基礎理論である．その構成要素は６種類のクォークとグルオンから成り立っている．それぞれのクォークは３つのカラー量子状態を持ち，その間の相互作用は８つのカラー量子状態を持つグルオンによっているという理論模型である．これは非可換ゲージ理論と呼ばれているが，SU(3) という群論が模型の中に入っているからである．この QCD を詳細に解説することはこの本の目標としている所ではなく，また実際，必要なことではない．むしろ結果を知っておいて欲しいと思う．

● クォーク・グルオンの閉じ込め：　これは理論模型内の結果であるが，このクォーク・グルオンともに観測できないことがわかっている．すなわち，これらの粒子はその模型を作った段階ですでに閉じ込めが起こっているのである．少し専門用語を使うと，クォーク・グルオンはカラー電荷を持っているが，この場合カラー電荷がゲージによってしまい，物理的な観測量ではないことが簡単に証明されるのである．

● QCD は摂動論が定式化できない：　このため，QCD では自由場が存在しなく，従って摂動論の定式化が不可能である．これは非常に深刻であり，摂動計算ができないために，物理量を計算する理論的な方法がない．このことより，QCD 模型が完成されたのは１９７０年代半ばであるが，しかしそれ以来，全く進展がない奇妙な理論体系となっている．しかし，これは正しい理論体系である．その理由の一つとして，電磁的な観測による実験結果と理論計算の結果が比較検討されていて，両者は良く合っている事実がある．実際，クォークは通常の電荷を持っているため，外場と電磁的な相互作用を行うことができる．このため，電磁的なプローブで測定した物理的な観測量 (例えば陽子と中性子の磁気能率) は理論計算と比較でき，実際，良く一致している．

● 核力：　核分裂の理論を研究しようとするとき，QCD は使い物にならないことは前述したとおりである．しかしながら，原子核は核子 (陽子と中性子の総称) からできているため，この核子間の相互作用を調べれば良いことになっている．この核子間の力のことを核力と呼んでいる．

● 中間子交換力による記述：　原子核の構造を理解するためには核力を理論的に再現する必要がある．この核力は核子間に中間子を交換する事により記述する事ができている．最も基本的な核力は π 中間子交換によるものである．これは π 中間子が非常に軽い中間子であることにその主な原因がある．

● 強い引力は 2π 中間子交換力：　さらに，核子間に働く引力についても２個の π 中間子を交換することで十分強い力が得られることがわかっている．この核力により原子核の基本問題を解く事が出来るが，しかし多体問題として非常に難しいため，大雑把な近似計算のみが可能となっている．

● 短距離力と長距離力：　核子間に働く核力は極めて短い距離にしか働かないものである．その距離は大雑把に言って，約 2 fm 程度である．1 fm$= 10^{-13}$cm だから，その短さがわかる．一方，クーロン力と重力は非常に長距離力である．それは力の形が $1/r$ とであることによっている．電磁的な世界と重力の世界はともにこの長距離力なので沢山の粒子がその力に影響されている．この場合，電気力の方がはるかに強い力なのだが，しかし，同じ電荷間では斥力となるため，沢山の同じ電荷の粒子が集まることは難しい．しかし，重力は常に引力しかないので，結果的にこの力が勝ってしまい，星が形成されている．

● 原子核：　原子核は陽子と中性子で構成されていて，最も軽い原子核は重陽子である．また He 原子核は陽子２個と中性子２個とで作られていて，これは α 粒子とも呼ばれている．我々の宇宙において，この α 粒子の存在比は陽子についでその比率が高いことがわかっている．これは星の内部の核融合においてその初期段階で作られる原子核である事によっている．このため，より大きな星の内部では α 粒子の整数倍の原子核の存在比が非常に多いことも観測データからわかっている．例えば，C, O, Ne, Mg, Si, S, Ar, Ca $\cdots$ などの原子核である．ちなみに，α 粒子２個の原子核である Be は残念ながら安定な原子核ではない．１核子あたりの束縛エネルギーが最大になるのは鉄 (Fe) やニッケル (Ni) あたりの原子核であるため，星の内部ではこの原子核を生成したあとは，単純な核融合ではそれ以上の重い原子核が作られることはない．さらに重い原子核はおそらくは超新星爆発時に生成されるものと考えられている．

● 原子核分裂反応：　鉄などよりもはるかに重い U などの原子核は核分裂をすることにより，その束縛エネルギーを解放することができる．例えば ^{235}U 原子核は熱中性子 (約 0.03 eV のエネルギー) を吸収することにより原子核分裂がおこる．この原子核反応ではその束縛エネルギーが解放されるため，膨大なエネルギー (電子系の束縛エネルギーの約１００万倍) が放出されている．

そしてこれを利用しているのが原子力発電である．

● 核分裂反応と臨界： 原子核分裂の反応において，生成された中性子を再利用して原子核分裂の連鎖反応が継続的に起こっている状態の事を臨界という．これは勿論，原子炉では起こっている状態ではあるが，その臨界が外力なしに自然に持続することはない．人工的にうまく中性子の再利用を制御することが必要であり，原子炉では制御棒を用いてうまく連鎖反応を制御している．

● JCO の臨界事故： 1999 年に起こった JCO の臨界事故では核分裂反応が直径 45 cm，高さ 30 cm 程度の小さな空間で現実に起こったものである．実際，硝酸ウラニル溶液を沈殿槽に移している際，それが 45 ℓ 程度になった時に突然，臨界状態になったという事である．この核分裂事故ではチェレンコフ光についての証言もあり，短い時間 (恐らくは２－３分) ではあるが確かに臨界状態に達していたものと考えられている．この場合，少しでも状況が悪化していたならば，核分裂の暴走も起こり得たものと思われる．

● 福島の原子力発電事故： これに対して，福島東京電力での水素爆発による原子力事故は核分裂反応とは無関係である．核燃料の廃棄物には大量の放射性元素が含まれており，この放射性元素からは常に $\gamma-$ 線が放射されている．従ってもし大量の水蒸気があればそれらは $\gamma-$ 線によって簡単に壊され，水素原子になっている．これらの水素原子は軽いため天井に溜まって行き，この水素に引火すれば爆発的に燃える可能性がある．この現象は良く知られていた事実でもあり，この事より福島の原子力発電事故が人災の側面を持っていると指摘されている理由でもある．

● 質量欠損： 質量欠損 (Mass defect) という言葉が使われる事がよくある．これは例えばウラン原子核が核分裂して膨大なエネルギーを放出する時に，この解放されたエネルギーの事をいっている．しかしながら，この言葉は誤解を招きやすいものであろう．質量が欠損したわけではなく，原子核の束縛エネルギーが解放されただけである．物理学において，その質量自身が欠損する事はない．原子・分子においても原子核においてもエネルギーが放出されるのはその量子状態の遷移 (変化) によるものであり，その構成要素である電子，陽子そして中性子の質量が変化することはない．その意味において，質量欠損という言葉は歴史的に使われたものであり，正しい物理用語ではない．

● 原子核内の中性子は何故，安定か？： 中性子はその寿命が１５分程の不安定な素粒子である．しかし原子核内の中性子は当然，安定である．何故であろうか？これは中性子が崩壊した場合，その新しく生成された原子核のエネル

ギー状態が崩壊前の原子核よりも高いからである．すなわち原子核の遷移の際のエネルギーバランスから，中性子の崩壊が禁止されているのである．

A.5.3　弱い相互作用

中性子はその質量が約 940 MeV/c^2 であり，電子の質量の約２千倍である．この素粒子は約１５分ほどで崩壊して $(n \to p + e^- + \bar{\nu}_e)$，陽子と電子とニュートリノに化けてしまうのである．この崩壊過程を $\beta-$ 崩壊といい，この過程や $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ などを記述する理論が弱い相互作用である．

● フェルミの４体相互作用の理論：　$\beta-$ 崩壊などを記述する弱い相互作用の理論を最初に提唱したのはフェルミである．彼はその相互作用の本質をよくあらわしている４体フェルミ相互作用模型を発表した．この模型では４個の粒子が関与する模型であり，その際，新しく粒子が生成されたり消滅されたりする現象が起こる模型となっている，この粒子生成・消滅の過程は，現在の場の理論では場の量子化という言葉で表現している．しかしながら，フェルミはこの場の量子化に対応する過程を「行列形式」を用いてうまく表している．この行列による表現はもともと Heisenberg によって提唱されたもので，場の量子化と同じである．しかしながら，このフェルミの理論だとパリティが破れる崩壊過程を記述することはできないため修正が必要であった．

● Yang と Lee の模型：　長い間 (十数年間)，弱い相互作用もパリティが保存されている形式により記述できるものと信じられていたが，Yang と Lee はパリティが最大に破れている模型を提唱した．このパリティ非保存の模型はその後，実験によっても確かめられて，弱い相互作用だけがパリティを破る相互作用であることが確立したのである．

● CVC 理論：　この Yang と Lee の模型は Gell-Mann や Feynman などにより CVC 理論 (Conserved vector current theory) として発展させられ，実験を非常にうまく説明できる理論模型となった．しかし CVC 理論には２次の摂動エネルギーが発散するという理論上の困難があり，この修正が必要であった．この４フェルミ点相互作用における発散の困難は重いベクトルボソンの交換により克服される事が知られていた．実際，非常に重い粒子の存在を示唆する複数の実験データが７０年代初めにはすでに報告されていた．

● 自発的対称性の破れ：　「自発的対称性の破れ」は南部達が主張した描像であるが弱い相互作用と直接関係しているわけではない．これはカレントとカレントを掛けた形の相互作用模型であり，確かに形は似ているとも言える．この模型で南部達はその模型のカイラル対称性が自発的に破れている状態が新しい真空であると主張した．しかしながら実際は彼らの模型計算は正しいとは言えなく，近似法を用いたために一見，対称性が破れたように見えただけである．

この計算間違いは Bogoliubov 変換を用いた事が一因であった．さらに昔から「非対称性の物理現象はその原因がない限り非対称性が現われる事はない」と言う Curie の原理が知られているが「自発的対称性の破れ」はこの原理にも抵触している．この自発的対称性の破れの考え方を応用したのが Higgs 機構である．Higgs 機構においては対称性の破れを利用して「ゲージ自由度が失われてゲージボソンが質量を獲得する」という意味不明の理論形式を採用している．

● 弱い相互作用の標準理論 ：　一方，CVC 理論の困難を克服するため，Weinberg や Salam などは非可換ゲージ理論から出発した SU(2)⊗U(1) 模型を提唱した．しかしこの模型は様々な理論上の問題を内包している．特に，彼らは非可換ゲージ理論が持っている固有の困難さを認識できていなかったため，大きな混乱をもたらすことになってしまったのである．例えば，この模型の構成粒子である $W^{\pm}$ ボソンはカラー電荷を持っている．ところがこのカラー電荷はゲージによるため，本来は観測量ではない事が知られている．このため，彼らは理論模型の途中で Higgs 機構という近似法を採用して，勝手にゲージ不変性を破っている．ゲージ対称性を破れば，確かに $W^{\pm}$ ボソンは観測量になっている．この奇妙な理論模型は「厳密に解いたら $W^{\pm}$ ボソンは観測量ではないが，近似したためうまく観測量になってくれた」と主張している．しかし，この論理が破綻している事については，これ以上議論する必要はないであろう．

● 弱い相互作用の新しい理論 ：　しかしながら，単純に，３つのウィークボソン $(W^{\pm},\ Z^0)$ を媒介とした弱い相互作用の理論模型を考えると，これは CVC 理論を導出できるし，また２次の摂動エネルギーの発散はなくなっている．さらにこの模型はバーテックス補正などの物理的な観測量に対しても発散がなく，繰り込みの点でも極めて健全な理論体系である事が証明されている．この単純な模型は Weinberg-Salam 模型で Higgs 粒子を理論から除き，更に，非可換ゲージ理論ではないとするなど幾つかの修正を実行した後の最終的な Hamiltonian による模型に対応している．この修正版標準理論の Hamiltonian は弱い相互作用の理論として十分に自然界を記述できる正しい模型となっていることがわかっている．

A.6　重力理論

質量を持つすべての物質には重力が働く．この場合,「物質」と言っているのは電子や陽子などのフェルミオンのことである．ボソンで安定な粒子はフォトンしかないので，それ以外の不安定なボソン (例えば，W や Z ボソン) に対して同様な重力相互作用が存在するのかどうかはまだ良くわからない．

星はフェルミオンでできており，従って星を形成する力は重力によっている．これは極めて弱い力なのだが常に引力であり，さらにこの力はその質量に比例しているため，沢山の粒子が集まっていると強い力が生まれてそれが星を形成する力になっている．また，星間の力もやはり重力であり，沢山の星が集まって銀河を形作っている．しかしながら，これまで重力理論においては重力ポテンシャルの導出さえも正確にはできてはいなかったのである．これは一般相対論が「重力理論」であると主張されていたからであろう．これまでに議論してきたように，一般相対論は計量テンソルに対する方程式であり，重力とはその理論の構築の段階では，まったく無関係である．従って，場の理論の言葉で重力を理解することが必要であり，これが長年の最重要課題であった．

A.6.1　重力相互作用

最近になって，新しい重力理論が量子場の理論の言葉で定式化されている．結果的に言って，重力 (Gravity) は場の理論としては最も単純であり，また任意性の少ない理論形式となっている．新しい重力理論は質量のないスカラー場による重力理論であり，重力が常に引力である事が証明されている．またこの理論はすべての観測事実を矛盾なく再現できる事が示されている．さらに，この重力場 $\mathcal{G}$ は量子化する必要がなく，電位 ϕ と同様に古典場として扱う事で自然界を記述できる事がわかっている．従って重力子 (Graviton) は不要の概念である．

- スカラー場：　粒子間の重力相互作用が常に引力であることは昔から良く知られていた．このため，どのような場によって相互作用を惹き起こしたらよいかという問題は，勿論，周知の事実であった．それはスカラー場によって粒子間の相互作用が起これば，これは常に引力なのである．さらに相互作用の形が $1/r$ であることからそのスカラー場の質量はゼロであることもわかっていた．

- 一般相対論と重力：　それではそのような簡単な重力理論が何故，作られな

かったのであろうか？これには様々な理由がある．一つには，アインシュタインが一般相対論が重力理論であると宣言していたからでもあろう．この理論で彼は重力が常に引力であることを証明したわけではないのだが，本人は結果的に重力を引力にするよう符号を選ぶことができたことから，これでよいと思ったのであろう．実際，人々も一般相対論が重力の理論であると思いこみ，後は重力の量子化を考えればよいとしていた．ところが一般相対論の方程式は計量テンソルに対する方程式でありその時点では重力と無関係である．従って量子化といっても何を量子化したらよいのか誰もわかってはいなかったのである．

● 重力波：　現在，一般相対論での重力理論を検証すると主張している人達は「重力波」という古典的な概念を持ってきてその検証をしようとしている．この重力波が物質とどのような相互作用をするかという最も重要な問題は全く議論されることはなく,「重力波」という言葉だけが暴走している．これは「重力子」ではないので粒子の伝播ではなく，むしろ「空間 (エーテル) の振動」として捉えているのであろうが，現代物理では不可能な現象である．

A.6.2　フェルミオンと重力の相互作用

重力相互作用はその粒子の質量に比例している．そうだとすると，フェルミオンと重力の相互作用をどこに入れたらよいかは自ずと決められてしまう．それは Lagrangian 密度の質量項のなかに入れることである．このことより，重力場自身の Lagrangian 密度と重力場とフェルミオン場との相互作用の Lagrangian 密度もユニークに決定されてしまうのである．それでは何故，場の理論による重力理論がこの相互作用の形によってこれまでに作られなかったのであろうか？それにはそれなりの理由がある．そのうち，繰り込み理論に関する問題が最も大きな理由であろう．すなわち，質量項に入れるような相互作用では繰り込みが不可能であろうと言う事である．これまで長い間，量子電磁力学における繰り込み理論が大きな成功を収めたと人々は捉えたため，重力の理論も繰り込みが可能な理論体系にする必要があると思い込んだのであろうか．結果的には，量子電磁力学においても繰り込みは必要ではないことが証明されているし，重力理論も繰り込み理論とは無関係であった．

● 常に引力：　重力相互作用で最も重要な点はそれが常に引力であると言うことである．このことは電磁場のようなゲージ理論ではうまく行かないことを示している．さらにそれでは常に引力であるためには，そのような場を考えたらよいかという問い掛けにも，答えは誰でも知っていることであった．すなわ

ち，交換する場はスカラー場の必要があるということである．

● 力の形が $1/r$ ：　重力相互作用の形はクーロンと同じで $1/r$ である．従って，スカラー場は当然，その質量がゼロである場となっている．これらより，重力場の Lagrangian 密度は簡単にしかもユニークに決定される．

A.6.3　重力場の量子化

これまで，相対論的な場の理論においてはその「場」を量子化することが当然であるというある種の「迷信」に人々は捉われていたと思う．一つには量子電磁力学の繰り込み理論がうまく観測値を再現したため，これが全ての基礎になるべきであるという考え方が主流になっていたからであろう．しかしながら理論的には，この場の量子化はそれ程，明確にわかっているわけではない．以下において，様々な「場」に対して，その量子化がどのようにするべきなのか，という問題をまとめて書いておこう．

● フェルミオン場の量子化：　フェルミオン場の量子化に関しては非常にはっきりしている．この場は反交換関係によって量子化される必要がある．フェルミオン場を反交換関係によって量子化すると，このフェルミオンが常に Pauli 原理をみたすことが証明されるのである．従って，フェルミオン場の量子化は絶対的な要請であることがわかる．

● 電磁場の量子化：　電磁場に対しては場の量子化は必要である．これは実験からの要請である．電磁波がその真空から生成される現象を記述するためには，ベクトルポテンシャルの量子化は必須である．

● ウィークボソン場の量子化：　これと同様に，弱い相互作用におけるウィークボソン場の量子化も必要である．理論的にも電磁場と同じ機構で作られているため，場の量子化がその理論構築から仮定されている．さらに，ウィークボソン ($W^{\pm},\ Z^0$ ボソン) が実験的に生成され，実際，観測されているため場の量子化が必要である．

● 重力場の量子化？：　一方，重力場に関しては，実験からの要請はない．さらに，理論的に言っても重力場の量子化は必要なく，むしろ量子化をしない方が理論的な整合性が取れている．従って，重力子 (graviton) は存在しなく，そもそもその概念自体が意味をなしていない．さらに言えば，もともと一般相対論はその模型が重力と関係しているという証明なしで，その模型だけが突っ走ってきたのである．その意味では．一般相対論における重力子は場の量子化

以前の問題であった．

A.7　素粒子と複合系

ここでは物理学で取り扱っている素粒子とその複合体について解説しよう．物理学を学んでいる読者には当たり前の物理用語であるが，しかしそれをきちんと知っておくことは物理の理解には必要であり大切な事である．

A.7.1　フェルミオン

この世界を形造っている構成粒子はフェルミオンである．フェルミオンとはスピンが $\frac{1}{2}$ の粒子のことであり，電子や陽子がそれである．フェルミオンには Pauli 原理という極めて重要な法則がある．それは量子状態 (座席) が一つあったとしたら，そこに入れるフェルミオンは１個しかないと言うルールであり，これは常に成り立っている法則である．

● スピンと原子生成：　この法則のおかげで，原子ができ，また原子核も作られることになっている．フェルミオンのスピンが $\frac{1}{2}$ であるという事実は大切な事ではあるが，それが日常的に現れることはない．直感的に言えば１個のフェルミオンには２つの異なった状態が存在していると考えていれば，めったに間違えることはない．例えば，He 原子において２個の電子状態をみるとそれらは共に $1s$ の状態にいることが実験的に知られている． $1s$ の状態数は１であるが電子にはスピンがあるため $1s$ の状態に２個の電子が同居できるのである．

● 山の存在は Pauli 原理のお蔭である！：　量子力学を勉強し始めたころ，その講義で「山の存在は Pauli 原理のお蔭である」と良く言われたものである．これはその通りではあるが，少し解説を必要としている．Pauli 原理のために，あるフェルミオンが一番低い状態に入ると次の粒子はエネルギーのより高い軌道に入ることになっている．原子状態ではそれが次々と続いて行くことになっている．この場合，エネルギーの高い状態は通常，その軌道が空間的にもより大きな半径を持っている．実際には，原子番号が増えるとその分，基底状態の半径が小さくなるため，より重い原子の半径が非常に大きくなっていると言う事はない．かなり重い原子でも，大雑把には $(1 \sim 2)$ Å の大きさである．山ができるのは，それらの原子が集まった場合に原子同士が重なることはなく，従って，大きな物質になって行くのである．

A.7.2　ボソン

「ボソンとは何か」と言う質問に対して，実はそう簡単には答えられるものではない．実際，安定な素粒子でボソンと言えるのはフォトンだけである．ところがフォトンは質量がゼロであり，フォトンの静止系が存在しないため，その性質をきちんと理解することは非常に難しいものである．

一方，不安定なボソンとしては $W^{\pm}$ や Z^0 ボソンが知られている．その他では $\pi^{\pm}$ も確かにボソンではあるが，しかしこれらは複合粒子であり素粒子とは言えないため，ボソンとしての特徴についてははっきりしていない．いずれにしても，これらの不安定なボソンがボソンとしてどのように振る舞うのかという問題について，これまでそれ程明確にはわかっているわけではない．一つには実験がないことがあるが，その粒子の寿命が極めて短いため，ボソンが自然界で何か特別な役割を果たしているかどうかを検証することはできそうにないことが最大の原因である．

- ボーズ凝縮：　ボーズ凝縮の実験が報告されたことがあるが，この凝縮の対象になった粒子が重い原子であることから，この実験を信用することはできない．このような複合系がボーズ粒子として振る舞うという理論的な根拠はなく，現象としても考えられない事である．実際，その実験も凝縮したと言っている内容は，ただ単に空間的に原子の集団が狭い空間 (と言ってもその原子間の平均距離は原子のサイズの１千倍以上) に「凝縮した」と言うものである．さらに，ボーズ凝縮という物理の内容は，ボーズ粒子が同じ量子状態に何個でも入れるという事実を凝縮と言っているのであり，空間的な「凝縮状態」を意味しているわけではない．一方，フォトンの場合，同じ状態に入ってもそれが大きさを持っていないため全く問題ないし，フォトンには静止系が存在しないため空間的な重なりは議論できない．これらのことから，ボーズ凝縮に関してはそれを起こすべき粒子が自然界には存在していないので研究の対象にはならないと言うのが現実である．

A.7.3　原子

一番単純な原子は水素原子である．これは陽子の周りに電子が回転している．この電子は陽子から大雑把に 1 Å の距離のあたりを主に回っているが，どこにいるかは特定できない．

● イオン化エネルギー：　電子の数が増えて行くにしたがって，段々重い原子になって行く．原子には重要な性質がある．電子の数が $\boxed{\text{２，１０，１８}}$ のところで他の原子とは異なる性質を持っている．それは電子を取り除こうとする時に特別に大きなエネルギーを必要としているのである．電子をひっぺ返すと残りの原子はイオンになるため，このエネルギーのことをイオン化エネルギーと呼ぶ．

● 周期律表：　電子の数を増やして行くとそれに応じて原子の性質は異なったものとなっている．例えば，$1s_{\frac{1}{2}}$ の状態に電子を２個入れたものが He 原子である．この He 原子は閉殻になっていると言われる．$1s_{\frac{1}{2}}$ の状態が一杯になっていて，これ以上の電子が $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態に入ることはできなく，従って，閉殻なのである．さらに電子が１個つけ加わると Li 原子になり，その場合一番外側の電子は $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態に入ることになる．このようにしてより重い原子系が作られている．この原子系のエネルギー準位の観測値は Hartree-Fock の理論計算によりかなりしっかりと再現されている．

A.7.4　分子

複数個の原子が結合することにより，分子が形成されている．例えば，２個の水素原子 [H] がくっ付いて水素分子 [H_2] になっている．この方がエネルギー的に低いため，水素分子は安定である．この水素分子に酸素 [O] が結合すると水分子 [H_2O] となる．

A.7.5　原子核

原子の中心に存在しているのが原子核である．原子核は陽子と中性子から構成されている．最も軽い原子核は重陽子であり，これは陽子と中性子が束縛状態になっているものである．

● 中性子は原子核中では何故，安定か？：　中性子はその状態が自由粒子である場合，その寿命は約１５分程度である．それにもかかわらず，中性子は原子核中では安定である．何故だろうか？これは必ず一度はしっかりと考え，理解しておく必要がある．極めて単純な事ではあるが，量子力学を理解するためにもプラスになると思われる．原子核中で中性子が崩壊する場合，その中性子は束縛状態にある．従って，中性子が $n \to p + e^- + \nu$ と崩壊するとき，原子核の状態は $(A, Z) \to (A, Z+1) + e^- + \nu$ となる．ところがこの原子核の終状態 (A,Z+1) のエネルギーが最初の原子核 (A, Z) の状態よりも高い場合，崩壊はできない．状態間の遷移において，そのエネルギー状態が低い方から高い方に移行することはない．

● 重陽子の安定性：　具体的には重陽子を考えてみよう．重陽子中の中性子が崩壊したと仮定すると $d \to p + p + e^- + \nu$ となっている．ところが，重陽子の全エネルギーが $E_d = M_p c^2 + M_n c^2 - 2.22\ \mathrm{MeV} = 1875.62\ \mathrm{MeV}$ であるのに対して，右辺の崩壊したとする全エネルギー E が $E = M_p c^2 + M_p c^2 + m_e c^2 = 1877.07\ \mathrm{MeV}$ であり，この方がエネルギーが高いため崩壊は禁止されている．但し，$M_p = 938.28\ \mathrm{MeV/c^2},\ \ M_n = 939.56\ \mathrm{MeV/c^2},\ \ m_e = 0.511\ \mathrm{MeV/c^2}$ を用いている．

● 原子核分裂：　重い原子核，特に $^{235}\mathrm{U}$ 原子核は熱中性子を吸うと核分裂して大量のエネルギーを放出する．大雑把に言って１回の核分裂反応で 200 MeV 程度のエネルギーが開放される．この場合，$^{235}\mathrm{U}$ は大体２個の原子核 (核子数が８０から１４０程度の原子核) に分裂するわけであるが，この時，同時に２個か３個の中性子を放出している．原子炉においては $^{235}\mathrm{U}$ の含有率を数%にして，核分裂の際に放出されている中性子をうまく再利用して，さらに核分裂を起こさせている．この原子核分裂反応が繰り返し定常的に起こっている状態を臨界と呼んでいる．実際，原子炉においては，原子核分烈反応をうまく制御して核分裂によるエネルギーを安定して利用しているのである．

● 連鎖反応：　何故，核分裂が危険性をはらんでいるのであろうか？これは連鎖反応が起こるからである．核分裂反応では中重核に加えて，２, ３個の中性子が出てくる．この中性子が近くにいたウラン ^{235}U に吸われるとまた核分裂

が起こる．するとこれがまた２個か３個の中性子を放出してそれがまた近くのウラン ^{235}U に吸われるという連鎖反応が起こることになる．この時間スケールは大雑把に言って 10^{-18} 秒のレベルなので，もしウラン ^{235}U ばかりだったら，これは爆発的に核分裂が起こり，大変なエネルギーが放出される．実際，ウラン ^{235}U の濃縮割合を９０%以上にしたものが原子爆弾である．

● 核融合反応：　太陽内部においては核融合反応が起こっている．軽い核の場合，$^{4}\mathrm{He}$ (α) の束縛エネルギーが特別に大きいため，例えば，２個の重陽子が $^{4}\mathrm{He}$ になれば，束縛エネルギーの差の分のエネルギーが開放されることになる．

A.8 統計物理学

統計物理学の主要目的は考えている系の分配関数を計算する事である．すなわち，$\boxed{Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \qquad \beta = \frac{1}{kT}}$ を求める事である．それは分配関数がわかっていれば，物理的な観測量が基本的には計算可能であるからである．ここで E_n は状態 n におけるエネルギー固有値であり，一般的にはこの量子数 n は非常に複雑である．固有状態がわかると例えばエネルギーの平均 $< E >$ は $\boxed{< E >= \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z}$ となる事はすぐに計算できる．逆に言えば E_n がどの様に計算されて求められているかが重要な問題になる．そしてこれは量子力学のエネルギー固有値問題を解く事によって得られる．その意味では「統計力学」という力学があるわけではなく，むしろ量子力学の結果を正確に理解している事の方が統計物理学には有用である．

A.8.1 分布関数

統計物理学における観測量は平均値 (アンサンブル・アベレージ) である．従って，どの分布関数で平均するのかと言う事だけが物理的な興味である．実際には分布関数としてカノニカル分布が決まってしまうので，その意味においては統計物理学は単純明快である．

- ミクロカノニカル集団： まず，ミクロカノニカル集団を考えて，その状態数を $W(E_t)$ としよう．この時， E_t はその孤立系の全エネルギーである．この系の中で，微小な部分を考えて，その微小部分のエネルギーを E とする．この時，この微小部分が実現される確率 $p(E)$ は

$$p(E) = \frac{W(E_t - E)}{W(E_t)} = \exp\left[\ln(W(E_t - E) - \ln W(E_t)\right]$$

で与えられる．exp 化したのは，この後，カノニカル分布が導出される事を予想しているためである．ここで重要な事は「微小部分が実現される確率 $p(E)$ の計算において $W(E)$ の関数形が E_t と $E_t - E$ で同じである」と言う仮定である．これは恐らくは E が E_t と比べて十分小さいと仮定している事から正当化されるものと考えてよい．

- カノニカル分布： E は微小量であるためその状態数が $W(E)$ で与えられるとは限らない．$W(E_t - E)$ はその関数形として $W(E_t)$ と同じと仮定して十分意味があると考えられるが，これと $W(E)$ は全く別物である可能性が高い．

実際問題として微小部分の状態数は $W(E_t)$ の関数形からは予想出来ないと言う事である．今，E が E_t と比べて十分小さいので展開すると

$$\begin{aligned} p(E) &\simeq \exp\left[\ln\left(W(E_t) - \left(\frac{\partial W(E)}{\partial E}\right)_{E=E_t} E\right) - \ln W(E_t)\right] \\ &\simeq \exp\left[-\left(\frac{\partial \ln W(E)}{\partial E}\right)_{E=E_t} E\right] \end{aligned} \tag{A.33}$$

となる．これから見ても，確かに分布関数は $\boxed{p(E) \simeq \exp[-aE]}$ の形をしており，これがカノニカル分布に対応している．この時，観測されているカノニカル分布と一致するとするならば $\boxed{a = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln W(E)}{\partial E}}$ である事がわかる．

A.8.2　エントロピー

この分布関数を熱力学に結びつける事を考える．熱力学の基本方程式は $\boxed{TdS = dE + pdV}$ であり，熱力学の第一法則である．この式と数学の微分公式より $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV = \frac{\partial S}{\partial E}dE + \frac{\partial S}{\partial V}dV$ となりこれより $\boxed{\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}}$ である事がわかる．従って，$\frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} = \frac{1}{kT}$ と比較すると $\boxed{S = k \ln W}$ の関係式が予想される．即ち，統計物理において分布関数がカノニカル分布である事を要求し，ざらにその係数 a は熱力学の公式から予測される $\frac{1}{kT}$ と同じであるとするとエントロピーが状態数の Log に比例する事がわかるのである．

- **エントロピーと観測量：**　この時, S のエネルギー依存性を考える事が重要である．即ち，

$$S(E_t) = k \ln W(E_t)$$

におけるエネルギー E はミクロカノニカルなエネルギー E_t である．従って，S 自体は物理的な観測量に直接は結びつかない．観測量に結びつくのは S の変化分 ΔS つまりその微分値のみである．従って，エントロピーの取り扱いには十分な注意深さが必要であり，余程しっかり考えないと間違える事になる．特に，カノニカル集団でエントロピーを扱う時はその微分値のみが意味がある事に注意しなければならない．統計物理学においてはエントロピー自体が観測量に直接に結び付けられる事はありえない．

A.8.3　スピンと統計

粒子のスピンが整数の場合，その統計はボーズ統計であるとどの教科書にも書いてある．これは本当だろうか？例えば重い原子系のボーズ凝縮の実験ではその全体のスピンが整数の時にボーズ凝縮が起こっていると言われている．しかし原子系の物性は電子の振る舞いにより決定されている．原子核のスピンが影響する事はまずあり得ない．それはスピン・スピン相互作用はかなりの短距離力である事がわかっているからである．もしある原子系でボーズ凝縮が起こったと考えたならば，原子核の中性子を一つ増やしたアイソトープに関しても実験してみて，今度は全スピンが半整数だからボーズ凝縮が起こらないことを証明する必要がある．しかし，このような現象は現実離れしている．原子核のスピンが影響するような現象は，余程強い磁場をかけたりしない限り現われる事はない．

フォトンとボーズ統計

フォトンは確かにスピンが１であり，これはボーズ統計に属している．Planck の黒体輻射の公式もフォトンがボーズ粒子であると仮定して求められているし，実験的にもフォトンがボーズ統計に属するとして全く矛盾がない．しかしながら，基本粒子で整数スピンを持っているのはフォトンだけである．他のボーズ粒子と言っているのは全て複合粒子である．本当に整数スピンとボーズ統計が対応しているのだろうか？さらに言えば，フォトンのスピンは確かに１であるが，しかしフォトンのスピンはスピン角運動量の性質は待っていなくスピン演算子の固有値とはなっていないのである．フォトンの偏極ベクトルは空間回転に対してランク１のテンサーとして振舞うので，そのスピンは１であるとして全く矛盾はない事も事実である．また電磁場を量子化する時に交換関係を用いて実行して矛盾がないので確かにフォトンはボーズ粒子である．しかし，それ以上の事は良くわからない．

フェルミ統計

電子や核子などのフェルミオンは確かにフェルミ統計に属している．これはパウリ原理として良く知られているし，実験的にも疑う余地はない．Dirac 方程式から始まって，フェルミオン場を反交換関係で量子化するとこのパウリ原理はしっかり理解できるものである．むしろ，ここには理論と実験の矛盾はな

いし概念的にも理解されている．しかし，これは基本粒子に対してのみ言える事であり，複合粒子に対しては成り立たない事である．

A.8.4　複合粒子のスピンと統計

それでは，原子系の統計とは何であろうか？本当に原子系の全スピンが統計に影響するのであろうか？これに対する理論的考察は皆無に近い．人々が疑う事無くスピンと統計をこれまでは信じてきた．問題ははっきりしていて，まだ信頼できる実験が何処にも無いと言う事である．さらに理論模型を作るにしても，複合系を考える場合，それが複合系である事がわかるような現象は統計力学では処理できないのである．統計力学と言っても，ダイナミックスそのものを扱っているわけではなく，状態関数によって指定されるエネルギーを分布関数に入れて平均操作をする事が統計力学のすべてであり本質である．従って複合粒子の内部構造を考える必要があるような物理現象に対しては統計力学では扱えないと言う事である．実験的にわかっている現象としては，^3He と ^4He の超流動の実験がある．この２つは質量が２５%も違うので，その意味では２つの振る舞いに実験的な影響が出てきても不思議ではない．しかし，現実はそれ程大きな差は無く，この両者の全スピンが整数か半整数かによる違いは観測されていない．すなわち，基本的な物性は当然電子によって決められているのである．

付録B　素粒子論の流行模型

これまで半世紀以上に渡り，素粒子論では数々の「新しい模型」が一時的に大流行し，そして消えていった．ここでは，それらの模型を簡単に解説しておこう．今でも，その流行した「言葉」に惑わされている読者が少なからずおられるものと思われる．そしてこの解説を読まれると「物理の理論家は自然を理解する事より，何か他の別の目的で模型を作っているのではないか」という疑念を一部の読者は抱く可能性はあろう．さらに，多くの読者諸氏は物理学のノーベル賞に対してかなり強い疑問符を持たれてしまう事も充分あり得るだろうと思う．しかし現実を直視して，物理学界における問題点を明らかにして行かない限り，今後の物理の発展はあり得ないことも確かである．このため，ここでの記述は多少，辛口になっているかも知れない．

この章では一般相対論関係の流行語 (ブラックホール，ダークマターなど) は解説していない．これらはすでに本文中で説明しているからである．但し，重力波の話は看過できない問題点を含んでいるため少し解説をしておこう．

B.1　大統一理論

そもそも弱い相互作用と電磁的な相互作用は完全に異なった自然現象を記述している模型である．それにもかかわらず，この二つの理論模型は同じ様な基礎をもつ理論体系によって統合されるべきであるという奇妙な論理が，ある時期に流行してしまった．この理由の一つには繰り込み理論の成功があるものと思われる．１９５０年代に提案された繰り込み理論は量子電磁力学 (QED) において，大きな成功を収めたと考えられていたのである．その際，この QED はゲージ理論であったため，ゲージ理論こそが基本的で正しい理論体系であるという強い思い込みが大半の物理学者の間に蔓延していたのである．

B.1.1　統一理論

電磁場と弱い相互作用を統一する模型として提案されたのが Weinberg-Salam 模型として知られている非可換ゲージ理論である．しかしこの模型ではその構成粒子が物理的観測量ではないため，弱い相互作用の理論としては使い物にならない模型である事が現在はわかっている．ところが当時，非可換ゲージ理論が持っている模型特有の困難を指摘する人はほとんどいなく，現実には最近までこの理論模型が標準理論として君臨していたのである．この標準模型が実験を再現できたのは，その模型が最終的には CVC 理論に帰着されるように調整されていたからであった．そしてこの CVC 理論は弱い相互作用に関係するほとんどすべての観測事実を正確に再現している優れた模型である．しかし実際問題としては，この標準理論の提唱者達の方がノーベル賞を受賞している．

B.1.2　大統一理論模型

量子電磁力学と弱い相互作用を「統一」するだけでは物足りなく思ったのか，これに強い相互作用をするクォークまで含めようとして考え出された模型が大統一理論である．もはや，お話にはならないレベルの理論体系であるが，これに結構，人々は引き付けられたものである．この理論によれば，陽子が崩壊する可能性があるとして，ある時期には「陽子崩壊」の実験まで計画され，実行されたのである．しかしながら，現在までのすべての実験結果は，陽子は崩壊しないことを示していて，陽子崩壊は完全に否定されている．

B.1.3　超新星爆発のニュートリノ

ここでこの陽子崩壊実験に関係するコメントであるが，KAMIOKANDE における陽子崩壊の実験では，その実験の試運転中に超新星爆発により放出されたと考えられる複数個のニュートリノを偶然に観測することができたのである．これは数百年に１回爆発するかどうかという銀河系内の超新星爆発をニュートリノによって観測できたと言う意味では重要な実験となった．しかしこれは偶然の発見であり，このニュートリノの観測事実を過大評価することは科学の進展にとってプラスにはならないことも注意する必要がある．

B.2　ゲージ理論

量子電磁力学では摂動計算により物理的な観測量が良く再現されている．そのなかで，電子の異常磁気能率の計算ではバーテックス補正に発散が出てくるため，この無限大の処理の処方箋として繰り込み理論が提案された．この繰り込み理論については本文中で解説しているのでここでは省略しよう．むしろ，その繰り込み理論の結果を利用した新しい計算手法が提案されたのであるが，それが繰り込み群方程式であった．

B.2.1　繰り込み群

繰り込み理論は摂動論によって計算されたものであるが，この結果を使って導出された繰り込み群方程式は摂動論を少し超えている理論であるという奇妙な触れ込みがなされた．このため，繰り込み群はある時期に一世を風靡したほどであった．しかしながら，繰り込み理論はどのように計算したとしても所詮，摂動論の範囲内であり，それ以上の物理的な結果を得る事は勿論，あり得ないことである．さらに言えば，最近になって量子電磁力学においては繰り込み自体が必要ではない事が証明されたため，繰り込み群方程式による模型計算はその根拠を完全に失ってしまったのである．

B.2.2　Wilson の繰り込み群

物性理論では Wilson が独自の方法で繰り込み群方程式を発展させている．これは一見，繰り込み理論とは異なるように見えるが，実際には摂動で計算した結果が，元の相互作用の形に戻るという要請から求められており，繰り込み理論と良く似た原理に基づいている．この模型は相転移現象に応用されたが，その模型の計算過程には飛躍が大きすぎて，物理的に受け入れることは非常に難しいものである．相転移は多体問題をきちんと解いてはじめて理解される問題であり，繰り込み群方程式のような，相互作用をある種の近似で評価して得られた方程式で理解されるような問題ではない事と関係している．物質と電子との散乱過程をどれだけ詳細に計算できるかと言う問題であろう．

B.2.3　漸近的自由

強い相互作用を記述する理論模型は量子色力学 (QCD) であるが，これは非可換ゲージ理論であるため，自由場の Hamiltonian がゲージに依存してしまい，摂動計算ができないことが証明されている．このことは，クォークとグルオンが閉じ込められている事と関係していて，実際，クォークもグルオンも自由粒子としては観測されていない．ところが，この QCD において無理矢理に摂動計算を実行して，その結果，繰り込み群方程式を導出した模型計算がある時期，流行したことがあった．この模型計算によると，クォークが大きな仮想的運動量を持っていると，そのクォークはほとんど自由粒子的になると主張したものである．しかしこれは物理的には何を言っているのか全く分からないものであった．ところが人々はこの主張を受け入れて，漸近的自由の概念がある時期に流行したものである．それどころか，この理論の提唱者達はノーベル賞を受賞している．

B.2.4　次元正則化 (Dimensional Regularization)

ゲージ理論 (特に QED) においてフェルミオンやフォトンの自己エネルギーを計算すると無限大が出てきてしまう．特に，フォトンの自己エネルギーを計算するとどうしても２次発散の無限大が現れてしまうのである．ところが，この２次発散があると繰り込みができないため，何とかこの２次発散を消去したいと当時の理論屋は考えたものである．それで様々な「正則化」を用いて，何とかこの２次発散を消去することを考案したのであるが，その中でも次元正則化と言う手法は非常に奇抜なアイデアに基づいている．それは運動量積分を実行するとき，d^4p の積分を d^Dp (但し，$D = 4 - \varepsilon$) の積分にするすると言うものである．こうすると２次発散は消えてしまい，繰り込み可能な形が得られると言う主張であった．これは単純な数学なので簡単に検証できるのであるが，この２次発散が消えた理由は数学の公式の使い方が間違っていただけであった．今となっては，フォトンの自己エネルギーは観測量ではないので，２次発散しても全く問題はない．しかし当時は，繰り込み理論に対する理解がひどく浅かったためか，２次発散が自然に消えることは「重大な発見」として捉えられた．現在では，フォトンの自己エネルギーに関連するすべての観測量に発散がないため，繰り込み自体が不要である事が証明されている．そしてこの次元正則化は一体，何だったのかという疑念だけが残っている．ちなみにこの次元正則化の提唱者２人もノーベル賞を受賞している．

B.2.5　格子ゲージ理論

空間を格子にして，その格子上で場を定義して，その離散化された場によって経路積分を行う方法が格子ゲージ理論模型である．これは摂動計算を超えるものとして，ある時期にはかなり流行したものである．しかしながら人々は，経路積分の定義内容をきちんと検証するわけでもなく，場の理論における経路積分の定式化をそのまま鵜呑みにしてしまい，計算を実行してしまったのである．現実には，場の理論において，空間を格子状に切ってその点における離散化された「場」の量についての経路積分は，物理的にはまったく無意味であることが証明されている．この格子ゲージ理論で深刻な事は，計算が膨大な数値計算で実行されるため，ともするとその計算結果の物理的な議論がおろそかになってしまうことであろう．いずれにしても「通常の Hamiltonian 形式で不可能な非摂動計算は他の計算手法でも同様に不可能である」と言う事は物理学の基本事項でもある．

B.2.6　Wilson ループ

一時期，Wilson ループという計算法が爆発的に流行したことがあった．これは，例えばクォーク間のポテンシャルを計算するときにゲージ不変な物理量として Wilson ループを考えればよいという提案である．しかしこの手法は，ちょっと調べればすぐにわかる事であるが，その模型の連続極限をとると元の理論 (例えば，QED) には帰着されない事が証明されるのであった．従って，Wilson ループで計算した量がどのような物理量に対応しているのか不明である．結果的には，経路積分を使って求めた計算結果は単純に「幾何学的」なものであり，これは勿論，物理とは無関係である事が示されている．ところが，当時 Wilson はこの Wilson ループの計算によりクォークの閉じ込めの実験事実を証明したと主張したのである．このクォークの閉じ込めは線形閉じ込めであるとしているが，そこで使われた理論は実は QED 模型であり，QCD ではなかったのである．電子が閉じ込められてしまっては，物理的に無意味な結論である事は自明である．ところがどういう理由からか，人々はこの理論を受け入れてしまったのである．これは「物理七不思議」の一つとも言えよう．ちなみに Wilson は相転移の業績でノーベル賞を受賞しているが，ある時期，ヒッピーになったとも言われている変人であった．

B.3　自然界の対称性

物理学においては，対称性が極めて重要な役割を果たしている．自然界において，系が持っている対称性が自然に破れたり，その系の保存則が外力なしで壊れたりすることはない．しかし一時期，対称性が自然に破れてしまうと言う理論や場の理論が持っている保存則が正則化をしたら自然に破れてしまったと言う模型計算が流行してしまったのである．

B.3.1　自発的対称性の破れ

南部達が提唱した「自発的対称性の破れ」の模型に関しては，この本ですでに充分詳細に説明しているので，ここでの解説は最小限にしておこう．自発的対称性の破れとは，カイラル対称性がある場の理論模型において，正しい真空はその対称性を失った状態が実現されていると言う主張である．しかし，これは単純な計算ミスであり，現実には「カイラル対称性は自発的に破れることはない」と言う事が証明されている．この理論が単に彼らの模型計算の主張だけで終わって他の模型に応用されていなければ，それ程重大な問題を惹き起こす事はなかったことであろう．

B.3.2　ヒッグス機構

この自発的対称性の破れの考え方がヒッグス機構という新しい模型に発展して行き，さらにそれが弱い相互作用に応用されるに至って，様々な深刻な問題を惹き起こす原因になってしまった．ヒッグス機構とは，自発的対称性の破れのためゲージ自由度が失われてゲージ粒子が質量を獲得するというお話である。しかしこれは理論的な整合性は皆無である．さらに言えば、この模型が応用された Weinberg-Salam 模型は非可換ゲージ理論であり、その構成粒子であるウィークボソンはそのカラー電荷がゲージ依存であるため厳密に解いたら観測量ではない。しかしヒッグス機構という近似をしたら、これらのボソンがうまく観測量になったと言う模型であるが、この奇妙な論理を信奉してきた物理屋が大半であったと言う事実は驚きでもある。ちなみに，この自発的対称性の破れの理論とヒッグス機構の提唱者はノーベル賞を受賞している．

B.3.3　カイラル・アノマリー

カイラル・アノマリーに関してもこの本である程度の解説をしているので，説明は最小限にしよう．カイラル・アノマリーとは，質量のないフェルミオンの模型において通常成り立っているカイラルカレントの保存則が，アノマリーのため破れてしまうという主張である．このアノマリーは１次発散を正則化した時に現れる有限項のことである．しかし，アノマリー導出で用いられた１次発散は見かけ上現れたものであり，非物理的であることが証明されている．実際，物理的な三角形図の計算には１次発散は存在しなく，見かけ上の１次発散は単純な計算間違いを犯したために現れたものであることがわかっている．現実にはアノマリーなど何処にも存在していないし，保存則が外力なしで破れる事は自然界ではあり得ない事である．

B.3.4　超対称性

フェルミオンとボソンを同じ群の基底として取り入れる模型が超対称性理論として流行したことがある．これは弱い相互作用のボソンである W^- ボソンの電荷と電子の電荷が同じであると言う事が出発点であった．しかしながらこの電荷という概念が粒子の量子数であるという認識を持っていれば，ボソンの電荷とフェルミオンの電荷が同じであることは極めて自然であり，不思議なことではない．実際，電荷に対応している結合定数は W^- ボソンと電子では全く異なっている．ところが，当時はこのボソンとフェルミオンを同じ群の仲間として取り扱うことにより，電荷の同一性を導き出そうとした理論が流行したのである．これが超対称性理論である．しかし，基本粒子としてのボソンはウィークボソン ($W^{\pm}$, Z^0 ボソン) のみであり，この超対称性理論を支持する実験事実は何処にも存在していない．

B.3.5　超弦理論

この超対称性と一般相対論を基礎にして，さらにアノマリーを考慮した理論体系が超弦理論である．すなわち，ボソンとフェルミオンでアノマリーが打ち消し合う模型を作り，さらに一般相対論も含んでいると主張する超弦理論の理論体系が，ある時期に大流行したのである．ところが，一般相対論は正しい理論ではない事が証明されており，さらにアノマリーの存在も否定されたため，この超弦理論模型が依拠していた重要な理論的根拠はすべて消えてしまった

のである．従って，この模型は今となっては最も無意味な理論体系と言えるものである．現実に，超弦理論を標ぼうする人達は，この問題が発覚する前から「超弦理論模型でどのような物理的観測量が計算できるのか興味がない」と主張していたものである．この事は，この理論模型が最初から物理学の模型とはなり得ない事を示していたのである．

B.4　重力波

最近になって，重力波の事が話題になっている．これには驚きを超えて，あきれるばかりである．重力波とは，一般相対論における「波の方程式」から類推したもので，媒質を伝播する「古典的な波」の事である．従って，これは重力子とは無関係であり，重力波の伝播は空間 (エーテル) の振動として捉えている．このため，これが相対性理論と矛盾することは良く知られている事実でもある．慣性系の空間は相対的であり，絶対的な空間 (エーテル) は存在しない事は１００年以上に渡る，膨大な検証実験や理論的な進展により，完全に確立している．そしてそれは現代物理学の基盤ともなっている．

- 何故，重力波か？：　それにもかかわらず，重力波の話が出てくるのは何故であろうか？一つには，この重力波実験を行っている相当数の物理屋は，一般相対論を信じようとしているからであろう．この理由として，彼らは一般相対論が特殊相対論を超える理論であるという「妄想」に取りつかれているからであると考えられる．さらに言えば，この手の実験家は，自然を理解しようとする事よりも，科学で何か一発当てる (大発見する) と言う事にのみ重きを置いている人達であることが主な原因であろう．

- エーテルの亡霊：　重力波はエーテル仮説を復活させない限り存在できない代物である．そのあり得ない重力波を測定しようと没頭することは，悲劇的でもあるが同時に喜劇的でもあろう．そしてその人達が個人的な趣味として重力波の測定を考えることは，科学の世界に取って特に問題を惹き起こすことにはならないであろう．しかしながら，今回の実験のように，膨大な予算を浪費している場合は，そのまま野放しにしておいて良い問題ではない．それは地味ながら堅実な研究をしている他の分野の予算を強奪している事になっているからである．

付録C　一般相対論と重力理論

一般相対論に関して，簡単なコメントをしておこう．一般相対論は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．従ってこれは慣性系の座標系に対する方程式となっている．しかし物理学は座標系を自分で決めてその中で質点の運動を記述して自然界の現象を理解しようとする学問である．このため，その座標系に対する方程式とはどういう意味があるのか，これは物理学としては理解不能である．従って，数学の方程式としては何ら，問題があるわけではないが，Einstein 方程式は物理学の方程式にはなっていない．

C.1　一般相対論は重力理論と無関係

それにもかかわらず，一般相対論がこれまでかなり多くの人々に受け入れられて来たように思われる．何故であろうか？これにはいくつかの理由があると思うが，その内で最も重要と思われる物理的な理由が一つある．それは Einstein がこの一般相対論は重力理論と関係していると主張したからである．そして『ある仮定』を置くと確かに重力と関係づけられるように見えたのである．それは計量テンソル $g^{(00)}$ が重力場 ϕ と

$$g^{(00)} \simeq 1 + 2\phi \tag{C.1}$$

と書かれるとした仮定である．実際には，この仮定が物理的に正当化できないし，完全に間違っている事が分かっている．それは，この計量テンソルは未知変数なのでその形は方程式を解いて始めて決められると言うものであり，その形をあらかじめ決める事は出来ない．さらに，この計量テンソルは座標系の変数であり，これが力学変数である ϕ と結びつくと言う仮定は物理的に無意味なものとなっている．従って，式 (C.1) が方程式として物理的に有意な意味を持つことはない．

C.2　無関係性の一般的証明

また計量テンソルが重力場とは無関係である事の一般的な証明はさらに簡単である．これは Einstein 方程式を吟味すればすぐにわかるものである．Einstein 方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \tag{C.2}$$

と書かれている．ここでこの方程式の左辺は Ricci テンソル ($R^{\mu\nu}$) とよばれる量で書かれているが，この Ricci テンソルは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の２回微分で書かれている．従って，左辺はすべて計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれていて，これが未知変数である．

C.2.1　右辺の計量は誰が決めたか？

まず，問題となるのは Einstein 方程式 (C.2) の右辺の計量はどのように決められたかと言う単純な疑問である．これは恐らくは Minkowski 計量が仮定されているのであろう．従ってこの方程式は右辺にある星の分布関数が決定された場合，それに応じて計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の関数形が決まると主張しているものである．

C.2.2　右辺の $T^{\mu\nu}$ はどう計算されたか？

ここで深刻な問題は右辺に現われている物理量 $T^{\mu\nu}$ がどのように計算され，求められているかと言う事である．これは未知変数である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とは無関係である．この星の分布関数は重力場の方程式を解いて決められている．従って，ここではすでに重力場とその運動方程式の存在が仮定されているのである．すなわち，この Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が重力とは全く無関係であることをこの式自身が示している．従って，どのように頑張ってみても，一般相対論を重力と関係付ける事には無理がある．そのためこの方程式が物理学でどういう役割を果たしているのかは不明である．

C.3　一般相対論は物理で応用されていない！

一般相対論は重力理論とは全く無関係である事が示されている．このためこれが物理的にどういう意味合いで作られたのか，今となっては分かる術がない．しかし現実問題として，この一般相対論が物理学のどの分野においても利用されたり使われたりしていると言う事実はない．従って一般相対論が物理学において特に何らかの問題を惹き起こしていると言う事実もない．

C.3.1　重力波の問題

但し『重力波』などの一般相対論がらみで単発的に無意味な主張をしている物理屋がいる事は事実である．これは確かに問題で，何とかしないといけないであろう．それは彼らが膨大な科学予算と人件費を浪費しているからである．しかしながら，どうしたら良いか自分にはわからない問題でもある．

付録D　Non-integrable Potential

When the non-integrable potential appears as the small perturbation on the Newton equation, what should be the best way to take into account this small potential effect?

D.1　Non-integrable Potential

Here we discuss the physical effects of the non-integrable potential. The additional potential from the new gravity model has the shape of $\frac{B_0}{r^2}$, and, therefore, we can write the non-integrable potentials into the simple shape in the following way

$$V_a(r) = \frac{q}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{D.1}$$

where

$$q = \begin{cases} -6 & \textbf{for General Relativity} \\ 1 & \textbf{for New Gravity} \end{cases} . \tag{D.2}$$

In this case, the differential equation for the orbit with the additional potential becomes

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{q}{\ell^2 c^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2}. \tag{D.3}$$

This equation can be solved exactly and the effect due to the correction appears in $\cos\varphi$ term and is written as

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{D.4}$$

where A_g and L_g are given as

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2}, \quad L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{qG^2M^2m^2}{c^2}} \equiv \ell\sqrt{1+\eta} \simeq \ell\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right). \tag{D.5}$$

Here, the η is defined as

$$\eta \equiv \frac{qG^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{D.6}$$

which is a very small number. It is around 10^{-8} for the planet motion such as the earth or Mercury.

D.1.1 Effects of Non-integrable Potential on Solution

The solution of eq.(D.4) has a serious problem in that the orbit is not closed. This is quite well known that the potential with the non-integrable shape such as $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ gives rise to the orbit which is not closed. It is, of course, clear that this type of orbits should not happen in nature.

The abnormal behavior of the solution eq.(D.4) can also be seen from the following term

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi). \tag{D.7}$$

It should be interesting to see that this term cannot be described in terms of the cartesian coordinates of $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. In fact, $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ term becomes

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r}\cos\frac{1}{2}\eta\varphi - \frac{y}{r}\sin\frac{1}{2}\eta\varphi \tag{D.8}$$

and there is no way to transform the $\cos\frac{1}{2}\eta\varphi$ term into $x,\ y$ coordinates even though we started from this cartesian coordinate. This is very serious since the solution expressed by polar coordinates cannot be written any more in the cartesian coordinates. This is related to the fact that the orbit is not closed due to the non-integrable potential effects.

D.1.2 Discontinuity of Orbit

The effect of the non-integral potential can be further seen as the discontinuity of the orbit trajectory since the orbit is not closed. In

order to see this discontinuity of the orbit, we first start from the orbit solution with the non-integral potential, which is eq.(D.4)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}.$$

In this case, we find the radius r at $\varphi = 0$ and $\varphi = 2\pi$ as

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0 \tag{D.9}$$

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\pi\eta}, \qquad \varphi = 2\pi. \tag{D.10}$$

Therefore the difference Δr becomes

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2} A_g \pi^2 \eta^2 \varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \tag{D.11}$$

for the Mercury orbit case of the general relativity as an example. This means that the orbit is discontinuous when φ becomes 2π. This is not acceptable for the classical mechanics, and indeed it disagrees with the observation. In addition, eq.(D.4) cannot generate the perihelion shift, and this can be easily seen from the orbit trajectory of eq.(D.4).

D.2 Perturbative Treatment of Non-integrable Potential

Here we should present a perturbative treatment of the non-integrable potential. This must be the only way to reliably treat the non-integrability in classical mechanics.

D.2.1 Integrable Expression

The equation for the orbit determination becomes

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2m\alpha}{\ell^2 r}-\frac{1}{r^2}-\frac{q}{\ell^2c^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2\sqrt{1+\eta}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}}. \end{aligned} \tag{D.12}$$

Therefore, we can rewrite the above equation as

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}}}. \tag{D.13}$$

Here we note that $\eta = \frac{q}{\ell^2c^2}(GmM)^2$ is a very small number which is of the order $\eta \sim 10^{-8}$. Now in order to keep the effect of the non-integrable potential in terms of integrable expression, we should make an approximation as

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi \simeq d\varphi. \tag{D.14}$$

The reason why we should make this approximation is because we should consider the dynamical effect as the perturbation while the η in the right hand side of eq.(D.13) should only change the value of constants such as E or α in the differential equation. In this way, the equation to determine the orbit becomes

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}} \tag{D.15}$$

which gives the right orbit solution. Now the orbit is closed, and the solution can be written as

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{D.16}$$

where A_g is given as

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1+\eta). \tag{D.17}$$

Note that the ε is also changed due to the η term, but here we can safely neglect this effect since it does not play any role for physical observables. Therefore, the effect of the additional potential is to change the radius A_g of the orbit even though this change is very small indeed. Now eq.(D.16) clearly shows that there is no perihelion shift, and this is very reasonable since the additional potential cannot shift the main axis of the orbit.

D.2.2 Higher Order Effect of Perturbation

Here we should estimate the higher order effect of the perturbation in eq.(D.13). Denoting the solution of eq.(D.16) by $r^{(0)}$

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

and the perturbative part of the radius by r' ($r = r^{(0)} + r'$), we can write the equation for r' as

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \tag{D.18}$$

where the right side depends only on φ. Here, we should make a rough estimation and only consider the case in which the eccentricity ε is zero. In this case, the right side does not depend on the variable ε, and thus we can prove that the right side is zero. Therefore, the higher order correction of r' should be proportional to the eccentricity ε and can be written as

$$r' \simeq C_0\eta\varepsilon A_g \tag{D.19}$$

where C_0 should be some numerical constant. For the earth revolution, the value of ε is very small ($\varepsilon \simeq 0.0167$) and thus we can safely ignore this higher order perturbative effect.

D.3 Period Corrections from General Relativity

Here we discuss briefly the period corrections generated by the additional potential of the general relativity. The gravitational potential together with the additional potential from the general relativity is given as

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2. \tag{D.20}$$

Therefore the Newton equation becomes

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3} \tag{D.21}$$

where L_g^2 is defined as

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2M^2m^2}{c^2}. \tag{D.22}$$

The solution of the differential equation is given by taking into account the perturbative treatment of the non-integrable potential

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{D.23}$$

where A_g is given as

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2}. \tag{D.24}$$

Therefore, the period T can be determined when we integrate $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ over the orbit period as

$$\frac{\ell}{m}\int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A_g^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} d\varphi \tag{D.25}$$

which can be calculated to be

$$\omega T = 2\pi(1 - 2\gamma). \tag{D.26}$$

In this case, the correction ΔT to the period can be written as

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{GR} \simeq -2\gamma. \tag{D.27}$$

D.3.1 Earth Revolution Period

For the earth revolution around the sun, the correction to the period T due to the general relativity becomes

$$\Delta T_{GR} = -3.8 \quad [\text{s/year}] \tag{D.28}$$

which is in the wrong direction as compared to the observation in terms of the leap second delay. In addition, this value is, by far, too large compared to the leap second, and in fact, the observed value of the leap second is around 0.62 [s/year]. Therefore, the correction to the earth period from the general relativity should be completely ruled out from the observation.

D.4 Gravitational Wave

It is really a shame as a theoretical physicist that we have to make a brief explanation about the gravitational wave. It is beyond imagination that some group of people insisted that they observed a signal of the gravitational wave. Those people who claimed a "discovery" of the gravitational wave should be far from physicists, and their standard of understanding physics must be lower than the fourth grade student of university. The physical observation can be done only if the object should have any interactions with matters whatever it can be. However, the gravitational wave which is a classical wave has no interaction with any physical objects. This means that its observation of their claim does not make sense.

When a physical object can propagate in vacuum, then it must be a particle like photon whatever it may be, even though massless. This is confirmed from the vast amount of experiments, and by now, "the ether hypothesis" is completely excluded. In fact, all modern physics is based on the relativity principle, and there is no experiment which contradicts the relativity.

Therefore, unless the "graviton" were measured, any gravitational wave cannot be observed. However, the strength of gravity is 10^{-35} times smaller than the strength of electromagnetic force, and there-

fore, it is simply impossible to measure the graviton. This is well known to physicists and therefore, generally, any physics text books do not make the explanation of the gravitational wave.

D.5 Predictions of New Gravity Model

By now, a new gravity model is constructed, and as a byproduct, there appears the additional gravitational potential. This is a very small term, but its effect can be measurable. Indeed, this is the relativistic effect which becomes

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \tag{D.29}$$

for the earth revolution around the sun. On the other hand, the leap second of the earth revolution is found to be

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \sim 2 \times 10^{-8} \tag{D.30}$$

which is just the same order of magnitude as the relativistic effect. Therefore, as we see later, it is natural that the leap second value can be understood by the additional potential of the new gravity model.

D.5.1 Period Shifts in Additional Potential

In the new gravity model, there appears the additional potential in addition to the normal gravitational potential. In the case of the earth revolution around the sun, this potential is written as

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{D.31}$$

where the second term is the additional potential [3]. Here, G and c denote the gravitational constant and the velocity of light, respectively. m and M correspond to the masses of the earth and the sun, respectively.

• Non-integrable Potential :
As discussed in the previous chapter, the additional potential should be a non-integrable, and therefore, the treatment should be done in terms of the perturbation theory. In this case, the Newton equation

with the perturbative procedure of the additional potential can be solved and the period T of the revolution is written as

$$\omega T \simeq 2\pi(1+2\eta) \tag{D.32}$$

where η is given as

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2}. \tag{D.33}$$

Here, R is the average radius of the earth orbit. The angular velocity ω is related to the period T by

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{D.34}$$

The period shift due to the additional potential becomes

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{D.35}$$

which is the delay of the period of the revolution [2, 3].

D.5.2 Period Shifts of Earth Revolution (Leap Second)

In the earth revolution, the orbit radius, the mass of the sun and the angular velocity can be written as

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7}. \tag{D.36}$$

In this case, the period shift becomes

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8} \tag{D.37}$$

Therefore, the period of the earth revolution per year amounts to

$$\Delta T_{N.G.} = 0.621 \quad [\text{s/year}] \tag{D.38}$$

which is a delay. This suggests that the corrections must be necessary in terms of the leap second.

- **Leap Second :**

In fact, the leap second corrections have been made for more than 40 years. The first leap second correction started from June 1972, and for 40 years, people made corrections of 25 second. Therefore, the average leap second per year becomes

$$\Delta T_{N.G.}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \quad [\mathrm{s/year}] \tag{D.39}$$

which agrees perfectly with the prediction of eq.(D.38).

• Definition of Newcomb Time :
Newcomb defined the time series of second in terms of the earth revolution period. However, the recent measurement of time in terms of atomic clock turns out to deviate from the Newcomb time [9]. This deviation should be due to the relativistic effects, and indeed this deviation can be understood by the additional potential of gravity.

付録E　Planet Effects on Mercury Perihelion

In this Appendix, we discuss the Mercury perihelion shifts which should come from the gravitational interactions between Mercury and other planets such as Jupiter or Saturn. This calculation can be carried out in the perturbation theory of the Newton dynamics, which is rather new to the classical mechanics. Here, we should comare the numerical results with those calculated by Newcomb in 1898.

E.1　Planet Effects on Mercury Perihelion

The motion of the other planets should affect on the Mercury orbits. However, this is the three body problems, and thus it is not easy to solve the equation of motion in an exact fashion. Here, we develop the perturbative treatment of the other planet motions. Suppose the Mercury and the other planet are orbiting around the sun and in this case, the Lagrangian can be written as

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\boldsymbol{r}_w}^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_w|} \tag{E.1}$$

where $(m,\ \boldsymbol{r})$ and $(m_w,\ \boldsymbol{r}_w)$ denote the mass and coordinate of the Mercury and planet, respectively. The last term in the right side of eq.(E.1) is the gravitational potential between the Mercury and the planet, and therefore it should be much smaller than the gravitational force from the sun.

E.1.1 The Same Plane of Planet Motions

Here, we assume that the motion of the Mercury and the planet must be in the same plane and therefore we rewrite the Lagrangian in terms of polar coordinates

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r_w}^2 + r_w^2\dot{\varphi_w}^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} \\ &+ \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w)}}. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Therefore, the Lagrange equation for the Mercury can be written as

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{E.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w\sin(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{E.4}$$

$$m_w\ddot{r_w} = m_wr_w\dot{\varphi}^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{E.5}$$

$$\frac{d}{dt}(m_wr_w^2\dot{\varphi}) = -\frac{Gm_wMrr_w\sin(\varphi_w - \varphi))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}}. \tag{E.6}$$

E.1.2 The Motion of Mercury

If we ignore the interaction between the Mercury and other planets, then the Mercury orbit is just given as the Kepler problem, and the equations of motion become

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \tag{E.7}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{E.8}$$

Here, the solution of the orbit trajectory is given as

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{E.9}$$

where A and ε are written as

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad \textbf{with} \quad \alpha = GMm \tag{E.10}$$

which should be taken as the unperturbed solution of the revolution orbit.

E.2 Approximate Estimation of Planet Effects

Now we should make a perturbative calculation of the many body Kepler problem by assuming that the interaction between the Mercury and other planets is sufficiently small. In this case, we can estimate the effects of other planets on the Mercury orbit. Here we write again the equation of motion for the Mercury including the gravity from the other planets

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}}. \tag{E.11}$$

Now we replace $r,\ r_w$ by the average orbit radius $R,\ R_w$ in the last term of the right side, and thus, the equation becomes

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(R - R_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}}. \tag{E.12}$$

Below we present some approximate solution of eq.(E.12).

E.2.1 Legendre Expansion

First we define the last term of eq.(E.12) by F as

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x))^{\frac{3}{2}}}, \qquad \textbf{with} \quad x = \cos(\varphi - \varphi_w) \tag{E.13}$$

and we make the Legendre expansion

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w(R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}}\, x + \cdots\ . \tag{E.14}$$

Therefore we obtain the equation of motion

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w(R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}}\cos(\varphi - \varphi_w) \tag{E.15}$$

where the constant term is irrelevant and thus we do not write it above.

E.2.2 Iteration Method

Now we employ the iteration method in order to solve eq.(E.15). First we make use of the solution of the Kepler problem

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \tag{E.16}$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \tag{E.17}$$

and thus eq.(E.15) becomes

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{E.18}$$

where b, β can be given as

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \tag{E.19}$$

E.2.3 Particular Solution

In order to solve eq.(E.18), we assume that the last term is sufficiently small and therefore r may be written in the following shape as

$$r = r^{(0)} + K \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{E.20}$$

where $r^{(0)}$ denotes the Kepler solution of $r^{(0)} = \frac{A}{1+\varepsilon \cos\varphi}$. Now we insert the solution of eq.(E.20) into eq.(E.18) and we find the solution of K as

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \tag{E.21}$$

Therefore, we obtain the approximate solution as

$$r = r^{(0)} - \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \tag{E.22}$$

E.3 Effects of Other Planets on Mercury Perihelion

Therefore we should put the Kepler solution for $r^{(0)}$ and thus the Mercury orbit can be written as

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}\beta^2}\cos(b+\beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2-2R^2)}{R(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}(\omega-\omega_w)^2}\cos(b+\beta t)} \end{aligned} \tag{E.23}$$

where we take $A \simeq R$ and also $\beta = \omega - \omega_w$. Here as for ε_w, we take

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2(\omega-\omega_w)^2}\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{E.24}$$

and using $b + \beta t = \varphi - \varphi_w$, we obtain

$$r \simeq \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)}. \tag{E.25}$$

This equation suggests that the Mercury perihelion may well be affected by the planet motions.

E.3.1 Numerical Evaluations

Now we calculate the Mercury Perihelion shifts due to the planet motions such as Jupiter or Venus. In order to do so, we first rewrite $\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)$ terms as

$$\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w) = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\varphi+\delta) \tag{E.26}$$

where c_1 and c_2 are defined as

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w\cos\varphi_w \tag{E.27}$$

$$c_2 = \varepsilon_w\sin\varphi_w \tag{E.28}$$

where

$$\cos\delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}. \tag{E.29}$$

Here ε_w is much smaller than ε and thus eq.(E.29) becomes

$$\cos\delta = \frac{\varepsilon + \varepsilon_w \cos\varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_w \cos\varphi_w)^2 + (\varepsilon_w \sin\varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2\varphi_w \tag{E.30}$$

E.3.2 Average over One Period of Planet Motion

Now we should make the average over one period of planet motion and therefore we find

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi_w \, d\varphi_w = \frac{1}{2} \tag{E.31}$$

Thus, δ becomes

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\,\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\frac{GM}{R_w^2}\frac{1}{R(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &\simeq \frac{R_w\,\omega_w^2}{\sqrt{2}\,\varepsilon R\,(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \tag{E.32}$$

where the planet orbits are taken to be just the circle, for simplicity.

E.3.3 Numerical Results

In order to calculate the effects of the planet motions on the δ, we first write the properties of planets in Table 1. Here numbers are shown in units of the earth.

Table 1

	Mercury	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Earth	Sun
Orbit Radius	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
Mass	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
Period	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
ω	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

In Table 2, we present the calculations of the values δ for one hundred years of averaging and the calculations are compared with the calculated results by Newcomb.

Table 2 The values of δ for one hundred years

Planets	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn	Sum of Planets
δ by eq.(E.32)	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
δ by Newcomb	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

As one sees, the agreement between the present calculation and Newcomb results is surprisingly good [9]. Here we do not review the calculation of Newcomb for the other planet effects on the Mercury perihelion shifts, and instead we simply employ his calculated results.

E.3.4 Comparison with Experiments

The observed values of the Mercury perihelion shifts are often quoted in some of the old textbooks. However, it should be very difficult to find some reliable numbers of the Mercury perihelion

shifts since these values are determined for 100 years of observation period in 19 century. In this respect, the comparison between the calculation and observation should be a homework problem for readers.

付録F New Derivation of Dirac Equation

Here, we should present a novel method to derive the Dirac equation without making use of the first quantization. It is shown that, from the local gauge invariance and the Maxwell equation, we can derive the Lagrangian density of the Dirac field without involving the first quantization.

F.1 Derivation of Lagrangian Density of Dirac Field

Dirac derived the Dirac equation by factorizing the dispersion relation of energy and momentum such that the field equation becomes the first order in time derivative. Now, we can derive the Lagrangian density of the Dirac field in an alternative way by making use of the local gauge invariance and the Maxwell equation as the most fundamental principle.

F.1.1 Lagrangian Density for Maxwell Equation

We start from the Lagrangian density of the Maxwell equation

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{F.1}$$

where A^μ is the gauge field, and $F_{\mu\nu}$ is the field strength and is given as

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{F.2}$$

Here j_μ denotes the current density of matter field which couples to the electromagnetic field. From the Lagrange equation, we obtain

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g j^\nu \tag{F.3}$$

which is just the Maxwell equation.

F.1.2 Four Component Spinor

Now, we can derive the kinetic energy term of the fermion Lagrangian density. First, we assume that the Dirac fermion should have four components

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{F.4}$$

This is based on the observation that electron has spin degree of freedom which is two. In addition, there must be positive and negative energy states since it is a relativistic field, and therefore the fermion field should have 4 components.

- **16 Independent Components**

Now, the matrix elements

$$\psi^\dagger \hat{O} \psi \tag{F.5}$$

can be classified into 16 independent Lorentz invariant components as

$$\bullet \begin{cases} \bar{\psi}\psi : & \text{scalar}, \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi : & \text{pseudo} - \text{scalar}, \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi : & 4 \text{ component vector}, \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi : & 4 \text{ component axial} - \text{vector}, \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi : & 6 \text{ component tensor}, \end{cases} \tag{F.6}$$

where $\bar{\psi}$ is defined for convenience as

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0. \tag{F.7}$$

These properties are determined by mathematics.

• Shape of Vector Current

From the invariance consideration, the vector current j_μ must be written as

$$j_\mu = C_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \tag{F.8}$$

where C_0 is a constant. Since we can renormalize the constant C_0 into the coupling constant g, we can set without loss of generality

$$C_0 = 1. \tag{F.9}$$

F.2 Shape of Lagrangian Density

By making use of the local gauge invariance of the Lagrangian density, we see that the following shape of the Lagrangian density can keep the local gauge invariance

$$\mathcal{L} = C_1 \bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{F.10}$$

where C_1 is a constant. At this point, we require that the Lagrangian density should be invariant under the local gauge transformation

$$\bullet \begin{cases} A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \\ \psi \longrightarrow e^{-ig\chi} \psi \end{cases} \tag{F.11}$$

where χ should be an arbitrary function of space and time. In this case, it is easy to find that the constant C_1 must be

$$C_1 = i. \tag{F.12}$$

Here, the constant $\hbar$ should be included implicitly into the constant C_1. The determination of $\hbar$ can be done only when we compare calculated results with experiment such as the spectrum of hydrogen atom.

F.2.1 Mass Term

The Lagrangian density of eq.(F.10) still lacks the mass term. Since the mass term must be a Lorentz scalar, it should be described as

$$C_2\bar{\psi}\psi \tag{F.13}$$

which is, of course, gauge invariant as well. This constant C_2 should be determined again by comparing the calculated results of hydrogen atom, for example, with experiment. By denoting C_2 as $(-m)$, we arrive at the Lagrangian density of a relativistic fermion which couples with the electromagnetic fields A^μ

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{F.14}$$

which is just the Lagrangian density for the Dirac field interacting with electromagnetic fields.

F.2.2 First Quantization

It is important to note that, in the procedure of deriving the Lagrangian density of eq.(F.14), we have not made use of the quantization condition of

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to -i\boldsymbol{\nabla}. \tag{F.15}$$

Instead, the first quantization is automatically done by the gauge condition since the Maxwell equation knows the first quantization in advance. This indicates that there may be some chance to understand the first quantization procedure in depth since this method gives an alternative way of the quantization condition of the energy and momentum.

F.3 Two Component Spinor

The derivation of the Dirac equation in terms of the local gauge invariance shows that the current density that can couple to the

gauge field A^μ must be rather limited. Here, we discuss a possibility of finding field equation for the two component spinor. When the field has only two components,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{F.16}$$

then we can prove that we cannot make the current j_μ that couples with the gauge field A_μ. This can be easily seen since the matrix elements

$$\phi^\dagger \hat{O} \phi \tag{F.17}$$

can be classified into 4 independent variables as

$$\phi^\dagger \phi : \quad \text{scalar}, \quad \phi^\dagger \sigma_k \phi : \quad \text{3componentvector}. \tag{F.18}$$

Therefore, there is no chance to make four vector currents which may couple to the gauge field A_μ. This way of making the Lagrangian density indicates that it should be difficult to find a Lagrangian density of relativistic bosons.

付録G　何故、一般相対論は無意味か？

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

G.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

G.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{G.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

G.1.2　Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

G.1.3　Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{G.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{G.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{G.4}$$

としている．この時，$dx^\mu,\ dx_\mu$ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{G.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

G.2　一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (G.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

G.2.1　$(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが，$(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

G.2.2　$(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{G.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

G.2.3　$g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (G.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

G.3　一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [11]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (G.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

G.4　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

[２０２３年４月加筆]

付録H　運動系の時間刻みは遅れるか？

光速に近い速度で動いている運動系の時間が地上における時間と少しずれるように見える．しかしこれら $t,\ x$ は変数であり観測量ではない．以下では思考実験における観測量である時間差 Δt により系の時間の遅れが本当に起こっているかどうかを検証しよう．

H.1　Lorentz 変換

ここで２個の慣性系を用意しよう．そしてこれらを $R-$ 系 $[R(t,x,y,z)]$ と $S-$ 系 $[S(t',x',y',z')]$ としよう．今，$S-$ 系が $R-$ 系に対して $x-$ 軸方向に速度 v で運動しているとしよう．この場合 Lorentz 変換は

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{H.1}$$

であり，γ は $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式は Maxwell 方程式が $S-$ 系でも $R-$ 系でも同じ形の微分方程式になると言う要請を充たすように求められたものである．

H.2　間違いの思考実験

以下に，これまで良く議論されてきた思考実験を行いながらこの時間の刻みがどうなるのかを解説して行こう．まず速度 v で等速直線運動をしている電車 (運動する慣性系) を考えよう．この場合，線路は当然，直線である．ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう．

H.2.1　地上の系からみた電車の系の時間刻み

まず，電車の中にいる観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう．この場合，この電車の観測者は自分が動いているかどうかはわからないものと考えられる．そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 $(2\Delta\tau)$ を正確に測定できたと仮定しよう．この場合

$$\ell = c\Delta\tau \tag{H.2}$$

である．一方，地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる．この場合，その時間を $(2\Delta t)$ としよう．従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - \ell^2} = v\Delta t \tag{H.3}$$

となっている．この式から

$$\sqrt{c^2 - v^2}\ \Delta t = c\Delta\tau \tag{H.4}$$

が求まる．よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t \tag{H.5}$$

となり，電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている．

H.2.2　電車の系からみた地上の系の時間刻み

それでは，今度は同様の思考実験を電車の人から行ってみよう．地上が電車に対して動いているように見える速度は $(-v)$ となっている．それは Lorentz 変換を逆に解いてみれば良くわかるものである．今の場合，式 (H.1) から

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{H.6}$$

となっていて確かに $(-v)$ となっている．しかしそれ以外は式 (H.1) と全く同じである．今度の場合，地上において鏡に向かってレーザービームを放ち，それを計測して時間を測る．この場合，電車の人から見るとこれまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta\tau \tag{H.7}$$

となる．

H.3　時間刻みの矛盾

これは一体，どうした事であろうか？この結果である式 (H.5) と 式 (H.7) はお互いに矛盾している．Δt と $\Delta\tau$ は思考実験における観測量になっているので，これは何かが間違っている事は確かである．しかしながら，相対性理論の立場からしたら，どの系も同等であることから合理性はあるようにみえるのである．

H.3.1　思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の何処に間違いがあったのであろうか？これは式 (H.1) を見てみると良くわかるものである．t 秒後の電車の座標が $x' = x + vt$ としてしまった事が間違いの原因であった．電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は, Lorentz 変換の式 $x' = \gamma(x + vt)$ で与えられる．従って

$$v\Delta t \Longrightarrow \gamma v\Delta t, \qquad c\Delta t \Longrightarrow \gamma c\Delta t \tag{H.8}$$

と書き直す必要がある．すなわち式 (H.5) は

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t \\ &= \Delta t\end{aligned}$$

となり，時間の遅れがない事が証明されたのである．従って，どちらの系の時間も変更を受ける事はないと言う事で矛盾がいとも簡単に解決されている．

H.3.2　高速運動の慣性系の時計が遅れる事はない！

この考察でわかったことは『どの系の時計も遅れる事はない！』と言う事実である．物理学においては，この時計の遅れの話は直接，観測量とはなっていないため，ほとんど影響はないと考えている．

H.4　時間に関する直感的な理解

これまで思考実験を考えて，運動系における時間刻みが静止系の時間刻みとどう関係しているのかに関して、様々な考察を行ってきている。しかしながら、実はこの事は極めて単純な事である事が以下に示されている。

実際は、運動系の時間刻み $\Delta\tau$ が静止系の時間刻み Δt (例えば１秒) と同じである事は簡単に証明できる事である．それは時間刻み $\Delta\tau$ にしてもミューオンの寿命 τ にしてもこれらは定数である．実際，１秒は地球公転周期 T から決められている．従って，これら定数は Lorentz スカラーであるため，Lorentz 変換の影響を受ける事はない．つまり運動系の $\Delta\tau$ は静止系の Δt と全く同じである事が分かる．

[**２０２３年４月加筆**]

関連図書

[1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009

[5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics",
(McGraw-Hill Book Company,1964)

[7] J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (addison-Wesley,1967)

[8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, "Global Positioning System", Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)

[9] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), " Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Result

[11] "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie," A. Einstein, Annalen der Physik vol. 49, pp. 769−822, März. 1916.