1.5 繰り込み理論

現代物理学を解説しようとすると，一般相対論よりもはるかに重要な理論体系が一つあり，その説明を避けては通れないものとなっている．それは繰り込み理論と呼ばれている理論形式であり，同時にこれは専門家にとっても，最も難しく且つわかりにくい理論体系として良く知られている．勿論，ここでこの繰り込み理論をその基本から解説することは不可能であり，またこの本が目指している方向でもない．しかしながら，繰り込み理論を少しでもわかり易く解説できたとしたら，それは物理に関する読者の知識を確実にふやし，またその理解を深めることにもなろう．さらに，繰り込み理論について直感的にそれが大雑把にどういうものなのかがわかれば，それだけでもこの本を理解するためにかなりプラスとなることは間違いない．ここでは繰り込み理論が物理学上どのような役割を果たして来たかをストーリー形式で語って行こう．著者にとって，この繰り込み理論は天動説学派の主張と自然論学派の考えとの間に位置していて，しかし自然論学派により近いという，そのような理論形式であると考えている．しかしながら，ここの解説はどうしても専門的な用語が氾濫しているので，大半の読者にはこれは読み飛ばしても良いところであろう．

1.5.1 何故，繰り込み理論か？

現代の物理学はすべて，場の理論の言葉で書かれている．この場合，観測量の計算手法としては摂動論という近似方法しか計算のやりようがないことがわかっている．これはどの模型も厳密に解くことはできないからであるが，このことは４つの力 (量子電磁力学，量子色力学，弱い相互作用，重力) の全てに当てはまることでもある．これまで最もよく研究されている理論体系が量子電磁力学 (QED) である．この QED で繰り込み理論を展開した人達が朝永やファインマン達で彼らはその功績によりノーベル賞を受賞している．

• **無限大：** この QED において摂動計算を実行すると，ある種の物理的観測量が無限大になってしまう．この時，この無限大に対して，その原因を理論形式の中の問題として捉えるか，それとも理論形式は問わないでむしろその無限大をうまく処理する方法を考えるかで大きく道はわかれている．朝永達は後者を選び，その無限大をうまく処理して波動関数の中に押し込めてしまう手法を確立して，実際に観測量を計算できることを示した．これが繰り込み理論であり，電子の磁気能率補正の計算結果は実験と良く合っている．

1.5.2　自己エネルギーの発散：電子

場の理論において電子やフォトンの自己エネルギーを計算するとそれは無限大になっている．しかし，実は古典電磁場においても電子が作る自己電場のエネルギーを計算すると，これが無限大になることは電磁気学の教科書でも良く知られている．この電子自身が作る電場のエネルギーが発散して無限大になっていても，これが観測量ではないことからそれを特に問題視することはない．ところが，場の理論の教科書において人々はこの自己エネルギーの発散を常に問題視していて，これを何とか処理しようとする試みが教科書では紹介され，解説されている．

• **質量の繰り込み**：　特に，質量の繰り込みという物理的には意味がないと考えられる問題も議論されている．尤も，今，繰り込み理論を勉強している物理の院生からしたら「質量の繰り込みのどこがいけないのですか？」と質問されそうである．これに答えるには，まず,「電子の自己エネルギーはある物理過程を計算した結果」であることを説明することになるだろう．電子がフォトンを放出して直ちにその同じフォトンを吸収するという過程である．その後，人々はこの自己エネルギー計算の結果をまた元の Lagrangian 密度に足す作業をしている．しかしある物理過程として計算した自己エネルギーを Lagrangian 密度に足し算するとは，物理的にどう言う意味があるのだろか？実際，計算結果を Lagrangian 密度に何故，付け加えてよいのかという物理的な理由を述べることは誰もできていない．人々は２次の摂動計算でででてきた無限大を打ち消すために，カウンター項として導入すると説明するが，自己エネルギーが無限大になっても誰も困らないのである．しかし人々はそれが繰り込みの手法であると主張しているが，しかしこれは古典電磁場における自己電場のエネルギーの場合を考えて見れば，かなり無理な計算過程であると言えよう．このことを理解すれば繰り込みの処方箋自体がそのトリックとして数学的には良いのかも知れないが，物理的には正当化できない作業を重ねていることがわかる．

• **電子の磁気能率補正**：　実際には，この自己エネルギーは観測量ではないので，全く気にする必要はないし，放って置いても問題になることはない．しかしながら，電子の磁気能率補正を QED の３次の摂動計算で実行すると，この補正計算は Log 発散して無限大になってしまうのである．これは観測量なので発散したら問題であり，この発散を処理するため繰り込み理論が考案されたのである．その詳しい手法をここで解説はしないが，直感的には磁気能率補正の計算で出てきた無限大が電子の自己エネルギーと同じ形であることを利用して，この無限大を電子の波動関数に押し込めて (繰り込んで) しまう方法が

工夫された．しかし無限大は残っており繰り込み理論は「禁じ手」でもある．

• **Dirac の主張：** この繰り込み理論は一見，問題なさそうに見える．しかしながらこの計算を何度も検証して見るとその手法があまりにも人工的すぎてやはりどこかがおかしいと感じるものである．Dirac はこの繰り込み理論に対して，観測量に発散が出てきたらこれはその定式化のどこかに誤りがあるはずであるという主張を繰り返していた．１９８１年に出版された AIP 会議報告書 (恐らくは彼の最後の論文) の中で，彼はかなり厳しい口調で繰り込み理論の問題点を指摘している．しかし，現実には人々はこの繰り込み理論を受け入れてきたのである．その理由の第一として，この手法の技術的な取り扱いの簡単さがあげられるであろう．さらにそれに加えて，この理論計算が電子の磁気能率補正の実験値を良く再現していることも人々が納得して受け入れた大きな理由でもあろう．

1.5.3 自己エネルギーの発散：フォトン

同様に，フォトンの自己エネルギーも発散しているが，この場合の発散は電子の場合とは全く異なっている．電子の自己エネルギーの場合 Log 発散であったが，フォトンの場合は２次発散の形で無限大になっている．このため繰り込みの理論形式の観点からすれば，この発散は波動関数に繰り込むことができない形式になっていた．

• **ゲージ条件：** ここで人々はこれを何とか繰り込み理論の形式に取り込もうとしたため，物理的に非常に無理がある「ゲージ条件」をフォトンの自己エネルギーの計算式に課したのである．常識的に考えて見れば，自己エネルギーが発散しても別に困ることはないし，また自己エネルギーの計算結果を Lagrangian 密度に付け加えるには物理的に無理があるので，このような条件を考える理由はどこにもない．その上，このゲージ条件は物理的にも数学的にも間違いであることがわかっているが，どういうわけか，この強引な繰り込み手法が人々に受け入れられたのである．

• **繰り込み理論の迷走：** 現実には，このあたりから繰り込み理論の迷走が始まって行く．そして，一度受け入れられた概念はそれが勝手に一人歩きしてしまい，それを是正するためには膨大な努力が必要であった．その是正とは「摂動計算においては物理的な観測量にのみ意味がある」という基本事項をきちんと認識することである．この場合「真空偏極に関係する物理的観測量とは何であろうか？」という問い掛けこそが最も重要である．現実には，これまでこの

問題はほとんど議論されなかったのである．しかし最近になってこの問題が議論され始め，真空偏極に関係する物理的観測量である三角形図の計算が再検証されたのである．これらの計算は非常に面倒ではあるが，しかしそれ程難しくはなく，その結果は明解であった．以下にその解説を簡単に記しておこう．

• **三角形図：**　フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，特に気にする必要はないということは前述した通りである．しかしながら，自己エネルギーに関連した観測量の計算 (真空偏極を含むもの) が発散していたら，これは繰り込みを考える必要がある．この物理的な過程は三角形図と呼ばれていて，１９６０年代後半には計算が行われていた．最初に三角形図に関する正確な計算を実行したのが西島先生であり，実際，π^0 中間子が 2 個のフォトンに崩壊する崩壊幅が計算されていた．そしてこの計算結果は有限値で求まっていて，さらに実験値を正確に再現していることが示されていた．これは理論的には最も見事な計算の一つであった．

• **カイラル・アノマリー：**　ところが，その直後に Adler 達は三角形図の計算で重大な計算ミスを犯した論文をアメリカの有力雑誌 (Physical Review) に発表したのである．しかしながら当時，その計算ミスが問題視されることもなく，どういうわけかこれが人々に受け入れられてしまった．その後はむしろ Adler 達の仕事の方が評価されてきたが，これは彼らが非常に目新しい概念を発表したからであろう．彼らの計算では１次発散の無限大が見かけ上あらわれているのだが，それを正則化することによりカイラル・アノマリーという方程式を「発見」してしまったのである．これは「通常成り立っている保存則が正則化によって壊れた」と主張した方程式であるが，このようなことが容認されれば，それは物理の理論がその信用を失うことになるだけのことであった．実際，このためこの分野には大変な混乱が生じてしまい，例えば経路積分によるアノマリーの計算などという物理的に意味不明の論文さえも発表されてきたのである．その上，あるいはそれ故，西島先生の論文はそれ以降，完全に無視されてしまって今日に至っている．いずれこのアノマリーの主唱者達は何らかの責任を取るべきことになるであろう．

• **真空偏極の観測量は有限：**　実際には，三角形図の計算を正確に実行すると，すべての三角形図は有限で求まり，1 次発散も Log 発散もなく，無限大はどこにも現れないことが証明されている．従って，このフォトンの自己エネルギーに関連した真空偏極を含む物理過程はその観測量がすべて有限であるため，繰り込みは不要であった．これはこの理論形式が極めて健全であることを示している．そしてこのことは Dirac の主張そのものでもあった．

1.5.4 繰り込みは必要か？

これらのことより，フォトンの真空偏極に関する物理的な観測量はすべて有限で求まることがわかった．従って，フォトンの自己エネルギーに対して繰り込み理論を考える必要性は全くないことが明らかになった．今の場合，物理的な観測量で，その計算結果が無限大になるのは電子の磁気能率補正のみである．従って，この問題を検証することは極めて重要ではあるが，ここでは簡単に解説するのみとしよう．

• **電子の磁気能率へのフォトンによる補正：** 電子の磁気能率への補正の計算に関しては，まず QED の範囲内での計算を考えることになる．この計算はフォトンによる 3 次の摂動論に従っていて，この計算を実行すると無限大が出てきてしまう．しかしこれは観測量なのでこの無限大を何とか処理する必要がある．このため，この発散を波動関数に押し込めてしまう繰り込み理論が提案されたのである．実際，この手法により有限の磁気能率が求められ，またその結果は実験値を良く再現している．しかしながら，繰り込みにより発散をうまく取り除くことはできたが，しかし補正計算自体は Log 発散しているという事実は残っており，この点をしっかり認識することが重要である．

• **電子の磁気能率への重いベクトルボソンによる補正：** この QED 計算に加えて，弱い相互作用まで入れた場合を考えると，重いベクトルボソン (Z^0 ボソン) による 3 次の摂動計算も必要となってくる．実際，この重いベクトルボソンによる電子の磁気能率への補正を計算すると，驚いたことに無限大はどこにもでてこなくて，計算結果は有限なのである．しかも，この計算値は非常に小さいものであり，電子の磁気能率補正の実験値とは矛盾しない値となっている．従ってこの補正計算の場合には繰り込みは不要である．これはこの理論形式の健全さを意味している．

• **無限大はフォトンによる磁気能率補正のみ：** これはどういうことであろうか？無限大があるから繰り込みが必要であるとこれまで人々は考えてきたのであるが，物理的な観測量ではフォトンによる電子の磁気能率補正にのみ Log 発散の無限大がでている．この重いベクトルボソンによる 3 次の摂動論の計算手法はフォトンの場合とほとんど同じであるが，それにもかかわらず，重いベクトルボソンによる補正計算の結果は有限であることが示されたのである．

• **発散はフォトンの伝播関数のせい？：** この場合，フォトンによる補正計算にのみ Log 発散があるとしたら，最初に疑うべきものは何であろうか？この計算を自分でやっている人にはすぐにわかることであるが，フォトンと重いベク

トルボソンの大きな違いはその伝播関数にある．従って，やはりフォトンの伝播関数が本当に正しいのかどうかという極めて初歩的な問題を疑わざるを得ないのである．実際，通常の教科書に書いてあるフォトンの伝播関数はファインマンの伝播関数と言われるものであるが，このファインマンの伝播関数が問題を含んでいることはすでに１９６０年代には良く知られていたことである．実際，幾つかの場の理論の古い教科書では，この問題をかなりしっかり議論し検証している．しかしながらこれらの問題はまだ完全に結着されたとは言い難いものも含んでおり，また若手研究者に取って最先端の研究課題でもある事から，ここではこれ以上の議論は行わないことにしよう．

1.5.5　西島先生のコメント

昔，新しい重力理論を発展させようとして壁にぶつかった時，西島先生に議論して頂いたことがある．この時，先生から「重力における繰り込みの問題を考えなさい」というコメントを頂いた．このため，繰り込み理論の関係論文をくまなく調べてそれらを検証したものである．まずは１９３０年代の論文からチェックを始めたのであるが，特にハイゼンベルグ達の論文は非常に面白く，示唆に富んでいて教育的でもあった．ところが，１９６０年代のある論文を読んでいた時，どうしてもこの論文が理解できなかった．内容も何を言っているのかがわからなく，完全にお手上げの状態であった．

- **非可換ゲージ理論の繰り込み可能性？：**　それはロシアのグループの１９６７年の論文であった．これは非可換ゲージ理論での繰り込み可能性を証明したと主張している論文である．ところが，どのようにチェックしても理解できなく，これでは困ると思い西島先生にそのことを質問したのである．所が先生は「自分もあの論文はわからない」と答えられたので仰天したものである．西島先生は当時すでに場の理論を最も深く理解している物理学者として，その名は内外でよく知られていたのである．これは非常に深刻な問題であった．それは，この論文の主張が正しいと人々は信じていたので，非可換ゲージ理論による弱い相互作用模型の繰り込み可能性を検証する必要がないと思い込んでいたのである．実際，ほとんど誰も全く議論することなしに，非可換ゲージ理論の繰り込み可能性は問題ないと信じきっていたのである．

- **非可換ゲージ理論は摂動論が不可能：**　その後，詳しく検討して見たところ，非可換ゲージ理論では繰り込みどころか，そもそも摂動論が定式化できないことが証明されていたのである．それは非可換ゲージ理論が持っている固有

の性質と関係している．非可換ゲージ理論ではその構成要素である粒子のカラー電荷がゲージ依存であるため，それらの粒子が観測量にはなっていないということであった．このため，摂動論を展開しようとしても，そのベースである自由場が存在しないため，摂動計算が全くできないということであった．場の理論で摂動計算ができないということは，事実上，観測量も計算できないということを意味している．最初に述べたように，場の理論は厳密に解くことができないため，どうしても摂動論に頼らざるを得なかったのである．しかしこの摂動論が使えない状況では，無限大が出てくる場所もなく，繰り込み以前の問題であることがわかったのである．

• **非可換ゲージ理論の粒子は観測不能：** 実は，強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) は非可換ゲージ理論である．このためその構成粒子であるクォークとグルオンは観測量ではなく，実験的にも発見されていない．一方，弱い相互作用である Weinberg-Salam 理論もやはり非可換ゲージ理論である．従って，この理論模型の基本粒子であるベクトルボソン ($W^{\pm}$, Z^0) は観測量ではない．このため，これではどう計算したらよいかわからないはずであった．実際問題としては，彼らは非可換ゲージ理論模型におけるゲージ対称性を Higgs 機構と言う名の下に勝手に手で破って，ゲージ理論ではない模型にしている．そして最終的には非可換ゲージ理論とは全く関係ない理論形式を求めている．これは「厳密に解いたらベクトルボソンは観測量ではないが，近似をしたためにうまく観測量になった」と主張している事に対応している.「厳密に解いたら観測量なのだが，近似をしたために観測量ではなくなった」と言う事は，勿論，起こり得るが，その逆はありえない論理である．

1.5.6 重力の繰り込み問題

新しい重力理論は質量のないスカラー場で書けている．このスカラー場による重力理論は，恐らくこれまでにも多くの人達が研究してきたものであろう．ここでこの新しい重力理論を詳細に解説はしないが，何故，この理論が成功したかを簡単に説明しよう．それは繰り込み理論と密接に関連している．

• **繰り込み可能性：** 長い間，物理屋は場の理論模型における繰り込み可能性を非常に気にしてきたといえる．それは，QED における繰り込み理論の成功に大きく依っていよう．従って，何か新しい模型を作ろうとする時，常にその模型の繰り込み可能性をまず第一に検証する必要があると考えていた．さらに，QED がゲージ理論であり，ゲージ条件という非常に奇妙な拘束条件を

課したことで繰り込みが可能になったと人々は思い込んでいた．現実には，前述したように観測量において奇妙は発散が見られたのはゲージ理論のみであった．いずれにしても繰り込み理論はその観測量をどのように再現するかという問題であり，繰り込みが先にあるわけではない．従って，場を量子化しなければ，繰り込みの問題はそもそも発生しないのである．

• **ゲージ理論以外の模型：**　これまで，重力理論もゲージ理論であるべきであるという一種の強迫観念が大半の物理屋にあったと思われる．ところが，ゲージ理論で常に引力をだすような模型は存在しないことはよくしられていた．このため，重力理論の構築 (発見) が遅れたのであろう．しかし力が常に引力である場の理論模型としては，その最もシンプルな模型がスカラー場であるのは周知の事実でもあった．

• **場の量子化が不要：**　量子場の理論では場を量子化せざるを得ない現象があり，このため例えば，電磁場の量子化を行ったのである．弱い相互作用で重要な役割をする重いベクトルボソンの場もやはり量子化しない限り，自然現象を理解する事はできない．しかしそれではすべての場を量子化するべきかというと，それは必ずしもそうではない．場を量子化するべきかどうかの判断は実験からの要請を除いてはそれ程単純ではなく，自然界の要請がある場合に限って場の量子化を実行している．但し，電子や陽子などのフェルミオン場については，常にその場を量子化する必要がある．これはフェルミオンに関して「パウリ原理」が成り立つことが必要であり，この原理はフェルミオン場の量子化で保証されているからである．

• **スカラー場の模型：**　重力場の場合，それが常に引力であるという実験事実を再現することが最も重要である．その場合，場の理論模型としてはスカラー場でなければならない．さらに，重力が長距離力であることから，そのスカラー場の質量はゼロであることが条件である．これ以外には実験的な要請がなく，従って場の量子化は理論的にもその必要性はどこにもなく，むしろ古典場のままの方が理論内の整合性が取れている．従って，重力場をクーロン場と全く同じように取り扱えばよく，理論的には極めてシンプルである．さらにスカラー場であることから Dirac 方程式にポテンシャルとしてどのように入れたらよいのかという長年の問題も解決されている．さらに重力ポテンシャルの強さは相互作用する両者の質量に比例しているという実験事実は，スカラー場ならば場の理論の質量項そのものであり，非常に自然な形で定式化されている．これが新しい重力理論であり，現在までに知られている重力関係のすべての観測事実を非常にうまく再現している．

関連図書

[1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009

[5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[7] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, ”Global Positioning System”, Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)

[9] Simon Newcomb, ”Tables of the Four Inner Planets”, 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), “ Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Result

2.2 弱い相互作用の繰り込み理論

Weinberg-Salam 理論は SU(2)⊗U(1) の非可換ゲージ理論から出発して，対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である．この模型は現在ではその理論的な取扱いが間違いだらけであるため，量子場の理論として受け入れる事は出来ない．しかしながら，Weinberg-Salam 模型の最終的な Hamiltonian は CVC 理論を再現しているため，弱い相互作用の実験事実と矛盾はしていない．その意味では，Higgs 粒子を除いたり，またいくつかの修正を加えれば，利用可能な模型になりうると考えられる．

2.2.1 Lorentz 条件 $(k_\mu \epsilon^\mu = 0)$ の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 W^μ の伝播関数を求める事が必要である．この場合，まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [5]．ベクトル場 W^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M^2 W_\mu W^\mu \tag{2.8}$$

で与えられる．ここで

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \tag{2.9}$$

である． この場合，運動方程式は

$$\partial_\mu (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M^2 W^\nu = 0 \tag{2.10}$$

となる．ここで，自由粒子の解

$$W^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu(k,\lambda) \left[a_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{2.11}$$

を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式ををを求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{2.12}$$

となる．この場合，ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロとなることである．すなわち

$$\det\{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{2.13}$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \tag{2.14}$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0, \qquad \textbf{(Lorentz 条件)} \tag{2.15}$$

が求められる．これは QED では Lorentz ゲージ固定として良く知られている式である．しかし，前章で見たように QED でもゲージ固定とは無関係に同じ式が求められているが，これがゲージ理論とは関係のない弱い相互作用においても運動方程式から導かれたと言う事実は非常に重要である．

これまで何故，この運動方程式 (2.10) を解くと言う作業がなされなかったのであろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが，この場合も同じように行列式がゼロ

$$\det\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} + m\beta - E\} = 0$$

という条件によりエネルギーの分散関係式が求められている．

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

それをもとの Dirac 方程式に代入して Dirac の波動関数が求まっている．

2.2.2 ベクトル場 W^μ の自由度の数

ベクトル場 W^μ は元々４個の自由度を持っている．しかしベクトルボソンは粒子として振る舞う場合，その自由度は３個である．実際，これは W ボソンとして観測されている．自由度が１個減ったのは勿論，式 (2.15) の Lorentz 条件があるからである．QED の場合は，これにゲージ自由度があるため，もう１個減って，フォトンの自由度は２個であった．

2.3 有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定しよう．出発点となるのは S 行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場の T-積が問題となる．ここで，２個のボソン場の T-積は

$$< 0|T\{W^{\mu}(x_1)W^{\nu}(x_2)\}|0 >= i\sum_{\lambda=1}^{3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda)\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{2.16}$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda)$ の形は Lorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda) = -\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right) \tag{2.17}$$

と決定される．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{2.18}$$

と一義的に決定される事がわかる．

2.3.1 Green 関数による伝播関数

残念ながら，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものであり，これは Lorentz 条件を満たしていない．何故，このような基本的なところで間違えていたであろうか？この点に関して，詳しい解説はここでは行わない．恐らくその理由としては，これまでの教科書では Green 関数の手法により伝搬関数を決めていたからであろう．しかしながら，複数の変数がある場合においては Green 関数の手法が正しい答えを与えるとは限らない事が示されている．

2.4 弱ベクトルボソンによるバーテックス補正

レプトンに対するバーテックス補正に関しては弱ベクトルボソンの効果も考慮する必要がある．事実，Z^0 ボソンはこの補正に効いてくる事は明らかである．

2.4.1 Z^0 ボソンによる電子の $g-2$

まず電子の $g-2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算するとこれは

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_e}{M_z}\right)^2 \sim 10^{-13}$$

となっている．ここで M_z は Z^0 ボソンの質量である．また α_z は Z^0 ボソンとレプトンとの弱い相互作用の結合定数である．この場合，補正は非常に小さい事が分かり，観測値と矛盾してはいない．

2.4.2 Z^0 ボソンによるミューオンの $g-2$

一方，ミューオンの $g-2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算すると

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_\mu}{M_z}\right)^2 \simeq 8.6\times 10^{-10}$$

と求まっている．この値は最近の Fermilab によるミューオンの $g-2$ の実験値と比較する事が出来る．驚いたことに，この理論値は実験値と大きさでは一致している事が分かっている．非常に小さな物理量でもあり，今後，さらなる高精度の実験が行われることを期待したい．