高校物理 (力学)

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

これは高校物理の教科書 (力学) として、大学教員の視点から書いた小ノートである。しばらく前の話しだが、検定済みの高校物理の教科書をチェックしていたら、その内容が極端に天下り的な記述になっていて驚いたものである。そして、これにはかなりショックを受けたものだが、これが高校物理の教科書を書こうと考え始めた切っ掛けでもある。

それで、若者が物理を少しでも楽しく勉強できるようにと考えて書き始めたのであるが、予想以上に難しくて閉口している。しかし基本的には高校物理を学んで、それがやはりある程度は発展性がある事が重要であると思われる。大学で物理を学ぶ時に高校で学んだ物理がほとんど役に立たないと言うことでは、やはり高校で学ぶ物理に何か欠陥があるに違いないと考えられるものである。

力学は基本的に質点の運動の時間発展を見て行く学問なので、どうしても微分は必須となる。微分は高校数学でも学ぶとは思うが、しかし高校物理では独自に自然との関連を見ながら微分を学ぶと言う事も重要であろう。まだ中途段階ではあるが、まずはこれまで書き終えた部分をここに載せておこう。一部の若者にとってあるいは何かの役に立つかも知れないと期待はしている。

目 次

第1章　高校物理(粒子の運動)

力学の基本は粒子 (質点) の運動の時間発展を追って行く事である。従って、粒子の速度や加速度を計算したり、また力が働くとその運動がどのように変化するのかと言う問題を調べて行く事になっている。

1.1　粒子 (質点)

力学では粒子の運動を扱う。この場合、粒子とは何かと言う事をまずはっきりさせる事が必要であろう。例えば、野球のボールを考えてその運動を扱う時、これを粒子と考える事にしている。この場合、ボールには大きさがあり、これは一見、困るように見える。しかし物理ではこのボールの重心を粒子の質点と考えて議論を進めて行く。

力学で最も成功を収めたのは地球の公転を正確に予言できることである。この場合、地球は物凄く大きいのに粒子として扱って大丈夫なのかと心配するかも知れない。しかし、この場合も地球の重心を考えてその重心の運動を扱う事にしている。そして実際、非常にうまく記述できているのである。

現実問題としては、粒子は有限の大きさを持っている。粒子の有限性の効果は実際、無視できないくらい大きい場合もある。しかし大学での物理でもこの問題を正しく取り扱う事は容易なことではなく、実際、この有限性の効果がきちんと議論されることはない。従って、高校の物理で学ぶ問題ではない事は明らかであろう。

1.1.1　粒子の座標

粒子の運動を記述するために、座標系を決める必要がある。その決められた座標系において、粒子の座標を点 P(x,y,z) としよう。落下などの実際の運動は平面運動になる事がわかっているので、通常は P(x,z) として２次元平面を考えるのがよいであろう。通常は横軸を x-軸として縦軸を z-軸ととっている。

1.2　粒子の速度

粒子が直線運動をしている場合、これは１次元の運動となる。ここで粒子の座標を $x(t)$ としよう。力学における粒子の運動とはその座標の時間発展の事である。この粒子の座標は $t+\Delta t$ 後には $x(t+\Delta t)$ となる。ここで Δt とはほんの一瞬の時間差であると言う定義である。この場合、この粒子の速度 $v(t)$ は

$$v(t) \equiv \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

となり、これが速度の定義である。すなわち、時間差 Δt の間に粒子はどれだけ x-軸を動いたかと言う問題である。しばしば

$$\Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t) \tag{1.2}$$

と粒子が動いた微小距離を定義して、微分 (速度 $v(t)$) を

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.3}$$

とする場合があるが、どちらでもよい。

1.2.1　100 m 競争の速度

競技者が 100 m走をしている場合を想定しよう。この走者が $t = 5$ [s] すなわち 5 秒後の位置を $x(5) = 50$ [m] としよう。ここで [s] と [m] は秒とメートルを表している。そして $t = 5.1$ [s] すなわち 5.1 秒後の位置を $x(5.1) = 50.75$ [m] としよう。この場合、この走者の速度は

$$v(5) = \frac{x(5+0.1) - x(5)}{0.1} = \frac{0.75}{0.1} = 7.5 \ \text{[m/s]} \tag{1.4}$$

となっている。これは時速 27 [km/h] なので、相当早い選手と言う事になる。ちなみにマラソン走者が 40 km を２時間で走ったとすればその平均速度は時速 20 [km/h] となっている。また 100 m走を 10 秒で走ったら 10 [m/s] であるが、これは世界的なレベルと言えよう。

1.3 微分 (係数)

加速度を学ぶ前に、微分について簡単に解説しておこう。式 (1.1) において Δt を十分小さくする場合、これを微分 (係数) と呼んでいる。どのくらい小さく取れば良いのかと気になるかも知れないが、例えば $x(t)$ が [m] の大きさの議論をしている場合、$\Delta x \simeq 10^{-10}$ [m] を取れば十分小さい事は明らかであろう。この場合、Δx を十分小さくする事を極限を取ると言う言い方をするが、実際問題としては十分小さいとして物理学への応用の場合、問題が生じる事はない。但し、一つ重要なポイントとしては Δx がゼロになる事は決してないと言う事であろう。物理に取って、数学的な厳格さは無用であるが、しかし無限小とゼロとは全く違うと言う事である。これは x-軸の実数列を考えて見れば明らかであろう。$x = 0$ と言う点は１点であるが、無限小は無限個ある事から理解できるであろう。

今後、どの科学系の学問を学ぶにしても、微分が必ず重要になっている。これは直感的には明らかであろう。微分は『その点の傾き』であり、従ってこれは『傾向』を表しているからである。速度の場合、微分係数が正であるとは、その速度が少し大きくなると言う事を示している。これは坂道で考えたらさらに良く分かる事である。微分が正であれば上り坂であり、負であれば下り坂となる。微分がゼロの場合、道は平坦である。これが傾向である。

1.3.1 微分の定義のまとめ

まとめておくと、関数 $f(x)$ があるとして微分の定義は

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad (\Delta x \text{ は無限小}) \tag{1.5}$$

である。この微分係数は

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1.6}$$

とも書く。式 (1.5) において実際には

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) + C_0 \Delta x + \cdots \tag{1.7}$$

と補正項が出てくるが、Δx が無限小なのでこれは無視しても全く心配する必要はないと言う事である。

1.3.2　微分の公式

　微分において、定義式 (1.5) を使って計算するのは１回だけで良いと思う。その後は、微分の公式として覚える事が大切である。これは掛け算の九九とほとんど同じである。最も重要な公式は

$$f(x) = x^n, \qquad \text{の時}, \qquad f'(x) = \frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{1.8}$$

であろう。この計算は簡単なのでここに書いておこう。まず $(x+\Delta x)^n$ は２項定理により

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots \tag{1.9}$$

と展開できる。よって

$$\begin{aligned} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\Delta x + \cdots \\ &\simeq nx^{n-1} \end{aligned} \tag{1.10}$$

となって式 (1.8) が求まっている。

1.3.3　微分公式のまとめ

$$f(x) = x^\alpha, \qquad \text{の時}, \qquad f'(x) = \frac{d\,x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{1.11}$$

ここで　α は任意の実数に対して成立する。

1.4　粒子の加速度

現実の世界においては、速度が一定のまま続くと言う場合は稀にしか起ってはいない。１００m走においても、走り出しは速度ゼロだから、その後、走者は少しずつ速度を上げて行く事になっている。すなわち、速度の変化が起こっている。

1.4.1　加速度

この場合、時間差 Δt **の間に粒子の速度がどれだけ増加したかを考えて、その増加分を時間差** Δt **で割ったものを加速度** $a(t)$ **と定義する。この場合、**$v(t)$ **から** $v(t+\Delta t)$ **へ増加した増加分を**

$$\Delta v \equiv v(t+\Delta t) - v(t) \tag{1.12}$$

とすれば、加速度 $a(t)$ **は**

$$a(t) \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{1.13}$$

となっている。これが加速度の定義である。

1.4.2　100 m 競争の加速度

競技者が 100 m走をしている場合を想定しよう。この走者が $t = 1$ [s] **すなわち 1 秒後の速度を** $v(1) = 3.5$ [m/s] **としよう。そして 1.1 秒後の速度を** $v(1.1) = 4.0$ [m/s] **としよう。この時、**$t = 1$ **におけるこの競技者の加速度** $a(1)$ **は**

$$a(1) = \frac{v(1+0.1) - v(1)}{0.1} = 5 \ \mathrm{m/s^2} \tag{1.14}$$

となっている。ちなみに自由落下する場合、その粒子の重力加速度は $g = 9.8 \ \mathrm{m/s^2}$ **である。但し、この場合空気抵抗は無視している。**

1.4.3　加速度の変化？

物理では加速度の変化分を考える事はない。この理由を正確に答えることはできないが、恐らく、加速度の変化が生じた場合、それによって引き起こされる自然現象があまり知られていないと言う事であろう。さらに、ある力 F が粒子に加えられた場合、その粒子の加速度 a は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.15}$$

となっている。これが Newton 方程式である。ここで $\frac{d^2x}{dt^2}$ と言う標識は x を t で２回微分をしなさいと言う意味であり、それ以上の意味はない。昔、人々は微分することを『たたく』と言っていた。従って、２回微分は『２回たたけ』と言う事である。これは　微分公式を知っていればまさにその通りであると言えよう。この Newton 方程式が力学の基本式となっている。ここで m は粒子の質量である。力学における本来の課題はこの Newton 方程式 (微分方程式) を解く事であるが、ここでは行わない。その理由は単純で、微分方程式を解く事の難しさは微分演算と比べて数倍、難しくなっているからである。

1.4.4　速度と運動量

力学では速度が基本物理量となっている。しかしながら量子力学でも相対性理論でも基本物理量は運動量であり速度ではない。量子力学においては速度は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{1.16}$$

として求められる。一方、相対性理論においては

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \tag{1.17}$$

により求めることができる。ところが、力学の方程式は量子力学の方程式を近似する事により導出されているものである。その意味で、式 (1.16) における時間微分は量子力学から直接、求める事ができるのであるが、それ以上 (加速度の時間変化) は量子力学から直接的に求めることはできない。

1.5　ベクトル

前節で $\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{F}$ と言うベクトルを導入したが、これは例えば

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z) \tag{1.18}$$

のことでそれ以上のものではない。特に、高校の物理で学ぶベクトルの場合、ベクトルの足し算・引き算がほとんどである。この場合、成分に分けて計算した方が効率的である。ベクトルは絵を描いて計算しようとするとさらにわからなくなるので注意が必要である。

1.5.1　ベクトル演算 – 内積

ベクトルの演算には足し算・引き算に加えて掛け算が定義されている。この演算の導入はベクトルの演算を飛躍的に拡大することになっているが、確かに非常に便利である。勿論、これは便利以上の意味があるわけではないが、しかしこれがないと計算式はほぼ、無限に面倒なものとなってしまう事であろう。

ここではまず内積から解説しよう。今、２個のベクトルを

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \tag{1.19}$$

とする時、内積を

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.20}$$

と定義する。この場合、

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \tag{1.21}$$

となる。従って、例えば $|r|$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ の距離を表している。

1.5.2　ベクトル演算 – 外積

次に外積を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{1.22}$$

と定義しよう。この場合、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ は定義式から明らかであるが、非常によく使うので覚えておこう。外積は２個のベクトルの掛け算の結果がまたベクトルになっているので物理では特別な意味を持っている場合がよくある。例えば角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \quad (\text{但し，} \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \ \text{ は運動量}) \tag{1.23}$$

と定義されるが、これは非常に重要な役割を果たすことになる。また、磁場 B の下で運動する電子に対して Lorentz 力 $\boldsymbol{F}_L$

$$\boldsymbol{F}_L = e\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{1.24}$$

が働く。これら外積に関連する物理現象をきちんと扱う事は容易な事ではない。従って、高校の物理においては、例えば角運動量を定義するがその性質を詳しく議論する事はあまりないであろう。但し、力のモーメントを扱う時は少し、必要になっている。

1.5.3　単位ベクトル $[\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z]$

ここで x, y, z 座標系における単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ を導入しよう。これは

$$\boldsymbol{e}_x \equiv (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_y \equiv (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_z \equiv (0,0,1), \tag{1.25}$$

と定義されている。この時、r は

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = (x, y, z) \tag{1.26}$$

と書かれている。さらに単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ の間には

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{1.27}$$

の関係がある。また

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0, \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0 \tag{1.28}$$

の直交関係が成り立っている。

1.6 保存量

物理で最も重要な概念は『保存量』である。この定義は簡単で、ある物理量 E が保存量であるとは

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{1.29}$$

となっている事である。この式は E が時間に依らないと言っている。すなわち、E は時間に依らずずっと同じ量となっていると言う事である。そして物理ではこれを E が保存していると言う。基本的には冷蔵庫による保存と同じことであるが、今の場合、保存は絶対的である。

1.6.1 運動量の保存

質量 m の粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ はその速度を $\boldsymbol{v}$ とすると

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{1.30}$$

で定義されている。これは速度とほとんど同じではないかと思われるかも知れないが１粒子では確かに大きな差はない。しかし２個の粒子を考えて見よう。それぞれの粒子に $1, 2$ のラベルを付けると運動量は

$$\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2 \tag{1.31}$$

となる。それぞれの Newton 方程式は

$$m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}, \quad m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{1.32}$$

となっている。

1.6.2 作用と反作用

ここで

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{1.33}$$

となっている場合を考えよう。これは作用と反作用に対応しているが、この言葉が物理で使われることはほとんどない。式 (1.33) において、衝突を考える場合、この条件は実際、良く満たされている。この場合、

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0 \tag{1.34}$$

となる。これは

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0 \tag{1.35}$$

となり、全運動量 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ が保存している事を示している。

1.6.3 ２個の粒子の衝突

この運動量の保存に関しては、２個の粒子の衝突現象を扱う時に重要になる。但し、衝突の問題を動力学的に扱う事は非常に難しいため、高校の物理で扱うことはないであろう。しかしながら、衝突の問題を運動学だけで議論する事はそれ程、難しい事ではないので次章で解説を試みよう。

第2章　高校物理(静の力学)

高校物理では釣り合いの問題を良く扱っている。これは一見，易しそうに見えるが、しかしながら力学としての観点からするとかなり難しい。大学での物理でもなかなか教えきれない問題となっている。その理由は簡単で、力学は基本的に質点の運動を扱う事が主なテーマである。ところが、釣り合いを議論するときには棒とかの剛体が含まれる場合を扱う事になっている。

Newton 方程式は質量 m の質点に対する２階の微分方程式である。棒は質点ではない。どうしたら力学的に扱う事ができるのであろうか？一つの方法としては、棒の代わりに長さ ℓ の非常に軽くてしかし伸び縮しなく、さらに折れない物質を考えて、その両端に質量 m の粒子をくっつけてこの粒子の運動として扱う事であろう。しかしまずは２個の質点に対して運動量の保存と力のモーメントについて議論して行こう。

2.1　運動量の保存

運動量 $\boldsymbol{p}$ を $\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}$ で定義している．この運動量 $\boldsymbol{p}$ を用いてニュートン方程式を書き直すと

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{2.1}$$

となっている．これは明らかに保存量と直接は関係していない．しかしながら，もし力 $\boldsymbol{F}$ がゼロの時は $\boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0}$ となり運動量 $\boldsymbol{p}$ は保存量である．これは自由粒子の運動を意味している．

2.1.1 ２体系の運動量保存

ここで２体系の運動を考えよう．今，質点 m_1 の座標を $\boldsymbol{r}_1$ とし、質点 m_2 の座標を $\boldsymbol{r}_2$ としよう．この時，質点同士が衝突してそれぞれが力 F_{12} を受けたとしよう．この時のニュートン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{2.2}$$

となっている．ここで質点１が質点２に力を及ぼしている場合，そのベクトルの方向はそれぞれ逆になっている．従って， $\boxed{\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0}$ である．よって

$$\frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

である．これから

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{C} \tag{2.4}$$

が求まる．ここで C は定数ベクトルである．すなわち，２個の粒子の運動量の和は一定であることがわかる．

2.2 衝突における運動量保存

ここで衝突前後の運動量について考えてみよう．衝突を考えるため，１の粒子の運動量を p_1 として２の粒子の運動量を p_2 としよう．この時，衝突の前後での運動量保存則は衝突後の運動量を p'_1， p'_2 として

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 \tag{2.5}$$

である．ここで２の粒子は止まっていたとしよう．すなわち $p_2 = 0$ と仮定する．この時，衝突前後のエネルギー保存は

$$\frac{{\boldsymbol{p}_1}^2}{2m_1} = \frac{{\boldsymbol{p}'_1}^2}{2m_1} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}'_1)^2}{2m_2} \tag{2.6}$$

となっている．これを解くと p'_1 は p_1 で表すことができる．

2.2.1　無限に重い物質との衝突

ここで簡単なために，m_2 の質量が無限に大きいとしよう．この時，式 (2.6) より $\boldsymbol{p}_1 = \pm \boldsymbol{p}'_1$ となる．このうち $\boxed{\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}_1}$ の解のみが物理的に意味がある．すなわち，１の粒子は壁に衝突して同じ大きさの運動量を持って反対方向に跳ね返ってきたということである．

2.2.2　力積

力積という言葉が力学の教科書に出てくる事がある．しかし力積と何であろうか？この場合、ニュートン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{2.7}$$

であるが，変形すると

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta t\, \boldsymbol{F} \tag{2.8}$$

となる．この右辺を力積と呼んでいて運動量の変化分に対応している．

● 一定の力 $\boldsymbol{F}$：　力 $\boldsymbol{F}$ が一定の時，短い時間 δt での式 (2.8) は

$$\boldsymbol{p}_{(t=\delta t)} - \boldsymbol{p}_{(t=0)} = \boldsymbol{p} = \delta t\, \boldsymbol{F} \tag{2.9}$$

となる．但し，最初，この質点は止まっていたと仮定したので $\boldsymbol{p}_{(t=0)} = 0$ である．また $\boldsymbol{p}_{(t=\delta t)} = \boldsymbol{p}$ と置きなおしている．

● 粒子の初速度 $\boldsymbol{v}_0$：　この質点の質量を m としよう．この質点に力 $\boldsymbol{F}$ を加えると質点が動き始めるが，その初速度 $\boldsymbol{v}_0$ は

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\delta t\, \boldsymbol{F}}{m} \tag{2.10}$$

となっている．

2.3 力のモーメント

角運動量は $L = \boldsymbol{r} \times mv$ で定義されている．今 2 個の質点系の角運動量を

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m_2 \boldsymbol{v}_2 \tag{2.11}$$

で定義しよう．ここで $\boxed{\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}}$ を計算してみよう．この時

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + \boldsymbol{r}_2 \times m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \tag{2.12}$$

となる．但し、$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \boldsymbol{v}_1$, $\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \boldsymbol{v}_2$ より、

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = 0 \tag{2.13}$$

を使っている。ここで、それぞれの質点が

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1, \qquad m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2 \tag{2.14}$$

という Newton 方程式に従っていると仮定しよう．これより $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{2.15}$$

となっている．式 (2.15) の右辺を N と定義して力のモーメントという．よって、N は

$$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{2.16}$$

である．

2.3.1　静的な過程

ここで系が力学的な運動はしていなく静的な場合，$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$ である．従って，この時は力のモーメントは定数となっている．すなわち

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = 0 \tag{2.17}$$

である．これは釣り合いを議論するときに良く使う方程式である．

2.4　釣り合い

最も簡単な例題として，天秤の釣り合いを議論しよう．今，支点を O としてこれを原点としよう．重さが無視できる１本の棒を x 軸上に置き，支点 O から負の方向の長さは ℓ_1，正の方向の長さ ℓ_2 としよう．また，y 軸の正の方向が垂直上向きとしよう．この時，棒 ℓ_1 の左端に質量 m_1，棒 ℓ_2 の右端に質量 m_2 のおもりを置いたとしよう．この時，式 (2.17) を当てはめると

$$(-\ell_1 \boldsymbol{e}_x) \times (-m_1 g \boldsymbol{e}_y) + \ell_2 \boldsymbol{e}_x \times (-m_2 g \boldsymbol{e}_y) = 0 \tag{2.18}$$

である．よって

$$\ell_1 m_1 = \ell_2 m_2 \tag{2.19}$$

が釣り合いの条件となっている．

2.5 テニスボールの力学

テニスボールの回転エネルギーと並進エネルギーの比について考察しよう。但し、ボールの慣性モーメントの式とそのエネルギーは与えられるものとしよう。

半径 R のテニスボールを考えてその質量を M としよう。テニスボールの場合、質量は表面にだけ分布していると仮定して十分なので、そのテニスボールの慣性モーメント I は

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \tag{2.20}$$

である。一方、質量が一様に分布している半径 R の球の場合、慣性モーメント I は

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{2.21}$$

である。このためテニスボールの場合、同じ質量と半径を持つ硬球の約 1.7 倍のエネルギーを持っている。

2.5.1 回転運動のエネルギー T_r

ここでまず、半径 R のテニスボール (R=3.4 cm) の回転運動のエネルギー T_r を計算しよう。これは回転の角速度を ω とすると

$$T_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{2.22}$$

である。よって

$$T_r = \frac{1}{3}MR^2\omega^2 \tag{2.23}$$

となる。一方、速度 v のボールの並進運動のエネルギー T_t は

$$T_t = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{2.24}$$

である。

2.5.2　数値評価

それでは大雑把に具体的な数値を見てみよう。今、ボールスピードは $v = 100$ [km/h] =2780 [cm/s] としよう。また回転数 N を N =80 [回/s] と取ってみよう。この時、

$$R\omega = 2\pi NR \ [\mathrm{cm/s}] \tag{2.25}$$

が計算できる。これより回転運動と並進運動のエネルギーの比は

$$\frac{T_r}{T_t} = \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi NR}{v}\right)^2 \simeq 0.25 \tag{2.26}$$

となる。すなわちこの場合、回転運動のエネルギーは並進運動のエネルギーの２５% にもなっていると言う事である。

第3章　高校物理(仕事とエネルギー)

質点の力学で最も重要な物理量はエネルギーである。その理由は簡単で、このエネルギーが考えている力学系の保存量となっているからである。それでは仕事とは何であろうか？これは実はポテンシャルエネルギーの事である。この場合、例えば Kepler 問題を考える時、仕事と言う言葉が使われることはなく、常にポテンシャルとして表現されている。従ってここでは最初は仕事と言う表現を使うが基本的にはポテンシャルを使う事になっている。

3.1　系のエネルギー

質量 m の粒子が一定速度 v で運動している時、その運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{3.1}$$

である。何故だろうか？実はこれは Newton 方程式から導くことができる。それ以外は天下り的となる。この場合、Newton 方程式は

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{3.2}$$

であった。ここで式 (3.2) に v を掛けると

$$m\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \tag{3.3}$$

となる。ここで簡単のために $\boldsymbol{F}$ は時間にも座標にも依らない力 (定数ベクトル) としよう。この場合 $\frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = 0$ である。この時、式 (3.3) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}\right) = 0 \tag{3.4}$$

となる。ここで括弧の中は保存量となるので、これを E とおくと

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} \tag{3.5}$$

となっている。式 (3.5) の右辺の第１項が運動エネルギーとなっている。

3.2 重力場中の運動

今、高さ h の場所から質量 m の粒子を落下させる実験を行おう。この場合、垂直の軸を z-軸として、地上を原点としよう。この時、粒子に働く力は重力のみなので、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$F_z = -mg, \qquad (F_x = F_y = 0) \tag{3.6}$$

となる。ここで g は重力加速度であり、$g = 9,8\mathrm{m/s}^2$ である。何故、この式 (3.6) が求められたのかについては後程、説明しよう。ここで高さ h において、この質量 m の粒子のエネルギーは落下前の速度 v がゼロなので、式 (3.5) から

$$E = mgh \tag{3.7}$$

となっている。この場合、地上では $z = 0$ なので、その点での速度はエネルギー保存則の式から

$$E = mgh = \frac{1}{2}mv_z^2 \tag{3.8}$$

と求める事ができる。これより

$$v_z = -\sqrt{2gz} \tag{3.9}$$

となる。マイナス符号は下向きの速度だから明らかであろう。時に mgh を位置エネルギーと呼ぶ教科書があるようだが、この表現は適切でない。位置エネルギーと言う概念が物理学で使われることはない。これはポテンシャルエネルギーである。

3.2.1 ポテンシャルと仕事

ここでポテンシャルと仕事について簡単に解説しておこう。何故、仕事と言う言葉が使われたのであろうか？これは歴史的な取り扱いと関係していると考えられる。実際、力学系においては力から出発してエネルギー保存則を求める事が長い間行われてきたからである。すなわち力を $\boldsymbol{F}$ とする時、仕事 U は

$$U \equiv -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.10}$$

と定義されている。この積分 (記号 $\int$) については後程、解説しよう。実際にはこれはポテンシャルと呼ばれていて、仕事と言う表現はほとんど使われていない。この仕事と言う言葉は科学史的な表現と考えてよいであろう。

3.2.2 偏微分

ここでポテンシャル (仕事) に関して、基礎理論 (量子力学) から出発すると実はポテンシャル U が基本的な物理量となっている。そして実際、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \equiv -\boldsymbol{\nabla} U(r) \tag{3.11}$$

と定義され、求められているものである。ここで ∇ はナブラと呼ばれているもので微分演算では良く出て来るものである。これは

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) \equiv \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

と定義されている。ここで $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ とは x で微分してそれ以外の $\{y, z\}$ は定数として扱いなさいと言うもので、偏微分と言われている。関数 $f(x,y,z)$ に対する x での偏微分の定義は

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \equiv \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}, \qquad (\Delta x \to \text{無限小}) \tag{3.12}$$

である。しかしながら、この偏微分が微分と特別に異なっていると言う事はない。この偏微分を何故、導入したかと言う事であるが、これは便利だからと言えよう。
ちなみに、$\{x, y, z\}$ が時間の関数 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ となっている場合、

$$\frac{df(x,y,z)}{dt} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{3.13}$$

となる。この $\frac{df(x,y,z)}{dt}$ を全微分と言うが、しかしここでは覚える必要もないであろう。

3.2.3 ポテンシャルと力

力学は量子力学から『ある近似』をする事により求められるものである。従って、力学が基本的な理論形式であるとは言えない。より基本的なものは量子力学であるが、この量子力学においては力と言う概念は出てこない。その意味で、力と言う物理量は力学に固有のものであると言えている。この事は『仕事』と言う概念が力学の範囲内のものである事を意味している。

3.3 積分の定義

ここで積分の定義を簡単にしておこう。$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$ は関数 $f(x)$ を $x = x_a$ から $x = x_b$ まで積分しなさいと言う表記である。これは、関数 $f(x)$ と x-軸および直線 $x = x_a$ と直線 $x = x_b$ に囲まれた面積を表している。この場合、この面積は拡張されていて $\pm$ の符号を持っているものとして定義されている。直感的には積分とは和の事である。その定義は

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \equiv (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x \quad (n \text{ は無限}) \tag{3.14}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \text{但し，} \Delta x = \frac{x_b - x_a}{n} \tag{3.15}$$

である．ここで $x_1 = x_a,\ x_n = x_b$ に対応している．

3.3.1 積分と微分の関係式

積分が微分と関係づけられると言う事実がある。それは

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x')dx'\right) \tag{3.16}$$

である。証明は簡単なのでここに書いておこう。まず積分の式 (3.15) を

$$S(x) = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x \quad (n \text{ は無限}) \tag{3.17}$$

としよう。但し $x_1 = 0$, $x_n = x$ としている．この時

$$S(x + \Delta x) = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}))\Delta x \tag{3.18}$$

である。ここで $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ を使っている。よって

$$S(x + \Delta x) - S(x) = f(x)\Delta x \tag{3.19}$$

である．

ここで $f(x+\Delta x) \simeq f(x)$ としているが、これが成り立っている事は明らかであろう。この式 (3.19) の両辺を Δx で割ると

$$f(x) = \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \tag{3.20}$$

となる．今，$n \to \infty$ を実行すると $\Delta x = \frac{x-x_a}{n} \to 0$ なので

$$f(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x')dx'\right) \tag{3.21}$$

となる．すなわち，積分量を微分したら元の関数が求まっている．ここで注意点であるが、積分の中の x は変数なので x' としている。しかし混乱しない限り、そのまま x として使う事もよくある。 但し、積分区間の上限が x となっている事に注意は必要かも知れない。

3.3.2　積分公式のまとめ

関数 $f(x) = x^n$ を積分すると

$$\int f(x)dx = \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \tag{3.22}$$

となる。ここで C は定数。

3.4 地球の重力と脱出速度

地上にある質量 m の粒子に対して重力ポテンシャル $U(r)$ は地球の重心を原点とすると

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{3.23}$$

で与えられている。この式の導出は場の理論を学ぶ事により初めて可能な事であり、ここでは天下り的となっている。この場合、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(r) = -\left(\frac{\partial U(r)}{\partial x},\ \frac{\partial U(r)}{\partial y},\ \frac{\partial U(r)}{\partial z}\right) \tag{3.24}$$

なので

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{3.25}$$

と計算されている。ここで注意点であるが、この計算の場合、座標の原点は地球の重心である。しかしながら今後の計算では座標系の原点を移動した方が便利である。従って、以降の計算では座標系として地上を原点とする通常の座標系を導入しよう。この時、$F_x = F_y = 0$ なので

$$F_z = -\frac{GMm}{(R+z)^2} \tag{3.26}$$

である。ここで R は地球の半径である。地上から高さ z において、力 F_z は

$$F_z \simeq -\frac{GMm}{R^2}\left(1 - \frac{2z}{R} + \cdots\right) \tag{3.27}$$

となる。ところが $\frac{2z}{R} \ll 1$ なのでこれは無視できる。よって

$$F_z = -mg \tag{3.28}$$

が求められている。この場合

$$g = \frac{GM}{R^2} \simeq 9.8\ [\mathrm{m/s^2}] \tag{3.29}$$

となる。ここで重力定数 G と地球の質量 M と半径 R は

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ [\mathrm{Nm^2/(kg)^2}],\ M = 5.97 \times 10^{24}\ [\mathrm{kg}],\ R = 6.37 \times 10^6\ [\mathrm{m}]$$

である。これらの値は理科年表から取ってきている。

3.4.1 脱出速度

質量 m の粒子が地球の重力から脱出するためにはどれだけの初速度が必要であろうか？今、地上から速度 v_0 でこの粒子を打ち上げたとしよう。この時の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{3.30}$$

である。一方、高度が z になった時にその速度を v とすればその時の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+z} \tag{3.31}$$

である。エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{3.32}$$

となっている。ここで十分遠方 $(z \to \infty)$ での粒子の速度は

$$\frac{1}{2}mv^2 \simeq \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{3.33}$$

であり、これがゼロ以上である事が脱出の条件となる。従って脱出速度 v_0 は

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \tag{3.34}$$

となっている。具体的に数値を入れると

$$v_0 \simeq 1.12 \times 10^4 \text{ m/s} \tag{3.35}$$

である。音速が約 $v_s \simeq 340$ m/s なのでこれよりはかなり速い速度である。しかし光速は $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s なのでこれよりはかなり遅い。 地球の公転速度は $v_R \simeq 3 \times 10^4$ m/s なのでこれが一番近い速度となっている。

関連図書

[1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)

[4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)