アインシュタインへの伝言

物理は単純明快である．もしその理論の解説が不明瞭で理解不能な場合，ほとんどは，その解説者の理解が不十分かまたはその元の理論が間違っているかのどちらかである．

藤田　丈久

はじめに

アインシュタインが２０世紀初頭に発表した３編の論文は，物理学上の業績として偉大である事は説明するまでもない事である．特に，光電効果の仕事は物理学に極めて重要な影響をもたらした事は疑い得ない．当時 Planck が提唱し，しかし Planck 自身本当には信じていなかった量子仮説をいち早く光電効果を説明するために応用したセンスは際立っているし，アインシュタインが新しいアイデアと豊かな発想を持っていた事を如実に示している．

しかしながら，一方において，アインシュタインが等身大をはるかに超えて，あまりにも有名になり，過大評価されてしまったために，２０世紀後半の理論物理学に対して負の遺産を残してしまった事も事実である．この半世紀間の理論物理学においては，アインシュタインの呪縛により人々の自由な発想がかなり奪われ，制限されてきたのである．そして，この事は予想を超えて重大な影響を理論物理学に与え続けており，それがアインシュタインの本意では無いにせよ，この事実は極めて深刻である．具体例として，近年の素粒子論および宇宙物理学はこの呪縛により，正しい方向性を大幅に失いつつある．例えば最近の超弦理論では，その研究者達自身が物理的観測量を再現する事に関心が無いと言って平気でいる程である．さらに宇宙論は一点から爆発したというビッグバン模型が全てであるという根拠のない「信仰」にがんじがらめになっていて，この宇宙が閉じた宇宙か開いた宇宙かなどというおよそ非物理的な問題を深刻に議論している．ついに，最近では宇宙の真空からエネルギーが生み出される可能性があるなどと，全く非物理的なレベルの議論さえされている．

この呪縛とは何か？，それはアインシュタインの一般相対論の事であり，この奇妙な理論が理論物理学の正常な発展を阻害し続けてきたのである．アインシュタインの一般相対論は１９６０年代までは，理論物理学が比較的正常な発展をしていたために，物理学的にはほとんどまともに扱われる事はなかった．勿論，一般相対論に対する数学上の関心とそれに関連する進展がなされてきた事は事実であるが，これは物理学と関係する自然現象に応用しない限り，何も問題を起こさないのである．ここで正常な発展と言っているのは，１９６０年代までは，物理学上で理論を発展させた時には，常に実験と比較しながら検証を重ねてきたと言う意味を含んでいる．その当時までに，少数ながらも心ある物理学者達は，一般相対論は水星の近日点移動の物理的観測量を正しく予言出来ていない事を知っていたものと思われる．後で見るように，この検証

はNewton力学をきちんと解けばよく，それ程難しい数学を使う事無くできるものであり，学部生でも十分可能である．従って，物理学における観測量は何かと言う問題をしっかり考える物理屋は当然，この水星の近日点移動の問題を検証した可能性があり，従って，観測値は一般相対論では理解出来ない事がわかっていたものと思われる．

しかしながら，１９７０年代に入ると，ほとんど当然のように一般相対論が信じ始められ，その一般相対論の理論的検証となるとぱったりと止まってしまった．この「一般相対論信仰」の一つの根拠になったのが宇宙の背景輻射である．この宇宙は光(電波)で満ちていると言う観測事実自体は大変面白い事であり，発見した二人がノーベル賞を受賞したのも当然である．しかし，この宇宙の2.7度K輻射はある時点で宇宙が非常に熱い時があったと言っているだけであり，それ以上の事を宇宙の背景輻射から学ぶ事は出来ていないし，また良くわからない．

さらに困った事に，現代物理においては，アインシュタインの一般相対論を批判する事がほとんどタブーにさえなっている．しかしながら，アインシュタインが一般相対論を作るにあたり出発点としているのは，Gedanken Experiment (思考実験）なのである．これは科学において最も重要な基本姿勢である「実験を基礎として理論を作る」という大原則をくずしてしまった事に対応している．実際，以下に見るように，一般相対論が基礎を置いている等価原理は相対性原理と矛盾している．そして，彼が量子力学を理解しようとする事よりも一般相対論にこだわってきた事実を見る限り，アインシュタインが相対性原理を深く理解していたとは到底考えられないのである．まずはアインシュタインの呪縛をといて新しい物理学を作って行く事がこれからの理論物理学の緊急課題となっている．その際，現代の我々物理屋にとって重要な事は,「昨日までの専門家が明日も専門家である保障はない」という当たり前の事を常に頭に入れておく事であると思われる．恐らくこの事は，どの分野でも等しく当てはまる事であり，常に新しい事を考えそして理解し続けるためには余程謙虚である事が重要であるという当然の事を忘れてはならないという事であろうと思われる．

この本では若い人達がアインシュタインの呪縛から解放され，自由に物理を考えるための一石になる事の願いを込めて書いている．一般相対論の数学は微分幾何を駆使しているため，かなり複雑である．しかし，その物理は単純である．さらに，一般相対論ではなく，通常の場の理論の言葉で，重力を理解し，また光が重力と場の理論的に相互作用するという事も解説して行きたい．そして，できる限り平明にして学部の３年生でも，さらには高校生でもしっかり考えればその本質は理解できるように解説して行くつもりである．これはある意

味で，アインシュタインへの伝言でもある．

具体的な内容として，まず宇宙論を紹介しビッグバン模型の問題点を指摘する．次に，相対性原理の持っている意味を解説し，何故それが必要であったかを明確にして行こう．そして，この事を踏まえて，一般相対論の問題点をしっかり理解出来るようにしたい．さらに，新しい重力理論を解説して行き，それに基づく新しい宇宙論にも触れてゆきたい．特に，宇宙論の具体的な問題に関しては，今後の若手の研究を待つ事になる問題が多くある．最後に，今後の物理学の展望を議論する．特に，何が物理学で基本原理として信頼して良いかと言う問題を取り上げている．いずれにせよ，この本を読みそして相対論について考える事により，新しい理論体系をしっかり作ってゆくための基礎的な頭のトレーニングになる事を願っている．

物理の非専門家にとっては，この本の一部を理解しその他は読み飛ばしても必ず何か得るものがあるようにと，本の構成を考えている．細かい数式は理解できなくても，現代物理が抱えている問題点は理解して，さらには将来の物理の方向も見据えられるように理解を深めて貰いたいと思っている．数式を使った解説は基本的には付録に入れてある．付録はある程度物理の素養がないと読んで面白いと思う事は難しいかも知れない．しかしながら，付録の一部が若い物理屋にとって新しい問題を見つけるための「雑談場所」として活用されたら最高であるという思いはある．いくつかの問題で，さらに研究されるべき問題点を挙げてあるし，それらが将来発展的に理解される事を望んでいる．

この本を読み進む前に，本の内容とは直接は関係しないのだが，一つコメントをしておきたい．この解説書は，前述したように若い人達が一般相対論に代わる新しい量子重力の物理を出来るだけしっかりと理解できるために，基本的な物理学をわかり易く説明するべく最大限の努力をしている．しかし，これは物理学において,「自転車の乗り方」を教える事に対応している．この「自転車の乗り方」を正しく理解する事は当然若い人達にとって重要である．しかしながら，だからと言って簡単に物理がわかるわけではない．ここで一つお話しを紹介しよう．昔，何人かで「自転車の乗り方」の議論をしていた時に，友人の一人が滔々と自転車の乗り方について詳細な解説をした．これに対して，もう一人が「○○さんは自転車に乗れるのですか？」と尋ねたところ，彼は怒ったように「僕が自転車に乗れる訳がないでしょう．歩いていても人にぶつかるくらいだから」と言ったという，愉快な本当の話である．この自転車の乗り方の解説は非常に論理的であったが，しかしそれが本当に正しいかどうかは乗ってみないとわからない面もある事は確かである．この話しと直接関係はないが，物理がしっかりわかって実際に正しい計算が出来るようになるためには，自転

車で言ったら「自転車にきちんと乗れる事」が必要である．この本を読んでみて，具体的な計算をしてみたくなり，実際それが出来るようになったら，それは物理学において「自転車に乗れた事」に対応している．恐らくは，物理で自転車に乗れるレベルまで行くためには，もう少しアドバンストな教科書を読み，その内容を自分で検証する事が必要になる事と思われる．しかし，誤解しないでほしいのは，物理学の理解は数学の理解とは違う事である．数学における式の変形は複雑な場合が多いが，それは困れば誰かに，例えば数学者に聞けば良いのである．むしろ物理屋にとって，数学関係で必要な事は単純計算（掛け算とか三角関数の変形とか）をいつもしっかり行い，その体力をつけておく事である．物理学の理解はやはり自分でその現象をまずしっかり理解して，自分の頭の中で絵を描く事である．正しい絵を描ければ，たとえ数学での計算が多少間違っていたり，式の変形が遅かったりしても，全く問題なく物理学を深く理解でき，そしてその楽しさが良くわかるものである．常に，自然現象に対する正しい絵を描く直観力を大切にして欲しいものである．

これまで，物理学における日本の「秀才学生」とは，どちらかと言えば,「翻訳者的」な人達が主流であった気がする．少なくとも，大学受験に強い事は必ずしも物理の理解力と関係あるとは言えなく，それどころかじっくり考える力と言う観点からすれば，むしろマイナスになっていると思った方が良い程である．実際，現在においても，教科書の理解が速かったり，試験においても正確で速く答を出す事が，秀才である事の条件であった様に思われてならない．しかし，研究者になった途端，現実は全く逆で，遅くてもいいから，じっくりしかも深く物理学を理解する事しか，面白くて新しい研究は出来ない．この理由は明らかである．物理を理解すると言う事は自分の中に，自分独自のしっかりした「ピクチャー」を作る事である．新しい事を理解する時には，その自分のピクチャーとの整合性を取る事になるため，当然，時間が掛かってしまうのである．一方，秀才は自分のピクチャーを作らないで，常に新しいキャンバスを用意して解説された事をそのまま書き入れて，そしてそれを直接に言葉として他人に説明する．これは物理の理解と言う点では「自転車に乗れていない」事に対応している．実際，物理の教授達を見ると，物理では「自転車に乗れていない」のだが，しかし理解していると思い込み，これまでの古い知識だけに頼って教えている人達があまりにも多いという現実に驚かされる．しかしながら，これからの若い人達は自分の「ピクチャー」をゆっくり作って行き，常に物理で「自転車に乗れる」ように頑張り，楽しく物理学を勉強していって欲しいものである．そして物理における考える力をしっかり身につけて行く事を切に望んでいる．

この本は科学を学ぶ研究者の立場から書いている．一見，当然に見える事ではあるが，科学とは自然を理解しようとする学問である事を常に認識する事が重要である．科学の研究はとてつもなく面白く楽しいものである事は確かであるが，しかし，科学の研究には重大な「限界」が存在している．それは研究対象であるその「分野」が一度理解されてしまうと，その分野は第一線の研究対象では無くなるという事実である．実はこの事と向き合う事は非常に難しいし，勇気の要る事である．研究者は誰でもその分野で「専門家」になると何時までのその分野にいたがるものである．たとえその研究対象が分かってしまっても他の新しい分野の研究を始める事は至難の業である．このため，自然現象を理解する事をやめて科学を「エンジニアリング」（科学を作る事を）しようと考える研究者があとを絶えない．これだと自然現象のチェック（実験との整合性）が入らないため，何でもありの世界になっている．ブラックホールや超弦理論などの研究者の多くはその典型である．その意味においても，物理学は常に難しい局面にいるものであり，この事を理解した上で，自然科学の研究を遂行して欲しいものである．

なお，ある程度理論物理学を理解している若い人々のために，数式を使った新しい重力理論と場の理論についての解説を付録に入れてある．数式は言葉と同じでそれに慣れていないとなかなか自分の中に入ってくる事は難しいとは思う．逆に言えば，慣れればその方が簡単であるということを意味している．さらに，これから物理を学ぼうとする若い人達用に，力学，電磁気学，量子力学，場の理論といった基本的で重要な物理学を解説してある．これら基本的な物理学をぶれる事無く，しっかり理解して行けば，一般相対論の問題点だけではなく，今後の物理学をしっかりした物にして行く上において，若い研究者には必ずプラスになると考えている．しかしながら，専門的な記述はどうしても不十分になっているので，もしこのレベルを超えてより具体的な詳しい専門書が必要な場合，拙著「Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory」(第２版，Nova Science 社，2011) と「Fundamental Problems in Quantum Field Theory」(Bentham Publishers, 2013) を参考にして頂ければ幸いである．但し，前者の場合，かなり専門的で難しい部分も含まれているので，院生諸君にとっては理解できない部分があっても気にすることはないと思われる．一方，後者の本に関してはそれ程難しい記述は入れてなく，場の理論におけるシンプルな部分のみを解説しているので，院生は勿論，学部４年生でもきちんと理解する事は十分可能であると考えている．

目 次

第１章　宇宙は点から創生？

宇宙は広大である．その広大さは，銀河の広がりを見て判断している．およそ１千億個程度の銀河がこの宇宙には存在していると考えられている．銀河は星の集団であり，およそ１００億個程度の星から成り立っていると考えられている．これらの星および銀河の運動は基本的には４つの力により記述されるものと考えて良い．星が粒子 (核子と電子) の集団から形成され，銀河が星の集団で形成されて，そしてこの宇宙が銀河の集団で形成されている．従って，またこの宇宙がさらに大きな集団 (Mugen Universe) の一部であるとしても不思議な事でもないし，十分ありうる事であると考えられる．但し，我々の世界との相互作用は恐らくは無視できるほど小さいであろうから，観測は不可能であろう．しかしながら，現在の宇宙論はこの我々の宇宙が全てであるという描像を取っている．それはアインシュタインの一般相対論を基礎にしたビッグバン模型が宇宙論の中心であり，宇宙の描像はそれから作られているからである．しかしながら，この不思議な模型のために，宇宙物理学が物理屋にとって科学として受け入れがたく，なかなか「物理学」になれない一つの原因であると思われる．多くの学部学生が一度は宇宙物理学に興味を持つ事がよく見られるが，それは宇宙物理学には夢があるからであると思われる．しかし，ちょっと油断すると単なる夢に終わってしまい，科学になり得ない「お話」のレベルになっているため，本当に宇宙物理を物理学として研究したいと思う学生は大半が失望してしまうのである．科学は SF ではない．だから，どんな些細な現象の理解でも証明でもほとんどの場合はひどく難しく大変なのである事は言うまでも無い．

宇宙物理学においては，観測を強化して，出来るだけ多くの「同じ状況の現象」を見つけて行く事であろう．科学の本質は，一つの実験に対して，正しく実験を行ったら必ず同じ結果が再現されると言うものである．しかし，宇宙物理における「再現性」とはどういう定義をしたら「実験による再現性」との整合がとれるのかと言う問題をしっかり考えておく事が大切である．

1.1　ビッグバン模型

現在，物理屋の大半はビッグバン模型を信じていると考えられる．しかしながら，その「お話」はとても科学になっているとは言えないものである．つまりはビッグバン模型が物理になっているとは到底言えない模型であるが，しかし基本的にはこの宇宙が膨張している観測事実を基にして，それを時間的に元に戻してゆくと１点に凝縮するではないかという素人的な発想がその出発点である．このような，宇宙が何も無いところから新しく作られるという発想には，西洋社会が慣れ親しんできた「天地創造」の考え方の影響が多分にある気がする．全てのものは何か新しく創生されるという固定概念にとらわれている結果，このビッグバン模型が受け入れられ，そして信じられて来たのではないかと考えられる．一方において，東洋の思想はこれとは異なり，物は形を変えながら繰り返してゆくという思想の方がより受け入れられていると思われる．この思想の科学的な根拠は勿論あるわけではないが，しかしこの宇宙の創造に関しては，繰り返しの考え方に近いものであるとした方が矛盾がなく，ビッグバン模型はやはり「神話」であったと言える事がこの本を読み進みそして理解して行けば，明確になるものと思う．科学的な立場からすれば，このどちらもそれなりの意味を持っているのだが，科学はむしろその独自の立場から自然を理解して行く事を優先して行く事になり，思想との整合性はその後に行う事が最も自然な事である．

ビッグバン模型が出発点としている事，すなわち「何かが爆発して宇宙が膨張したという事」は観測事実であると考えられるが，だからといって宇宙が一点から爆発して膨張したと短絡するのは科学者の考える所ではない．そもそも一点から爆発して膨張したとする時のその一点のエネルギーは何処から来たのか全く分からない．それはこれまで知られているエネルギー源には無いからである．このような御伽噺程度の理論を何故，人々が信じる事になったのであろうか？その根拠になっているのが一般相対論である．実際，アインシュタインは一般相対論を作るにあたり，恐らくは，電磁場と同じような方程式を重力場に対しても作りたいと思った事が出発点であろうという事は想像出来る．しかしながら，電磁場を場の理論として深く理解すると言う事が必ずしも十分ではなかった１９１０年代であるため，この一般相対論には様々な問題点があり，およそ信頼できるという理論形式ではない．さらに言えば，アインシュタインは自然界において，一般相対論で何を具体的に記述したかったのであろうかと言う，その対象が存在していない．従って，一般相対論は宇宙全体を記述したいと言うような荒唐無稽で抽象的な問題になっているため，自然現象を記

述するという物理にはなっていないのである．このため，一般相対論は数学は複雑，物理は簡単という奇妙な理論になっていると言える．しかし，この事はあとで詳しく解説して行く事にして，まずは観測事実から検討して行きたい．

1.1.1　宇宙の背景輻射

我々の宇宙は光 (電波) で満ちている．これは携帯電話の電波が地球上に飛び交っていると言うレベルの話ではない．　この宇宙の背景輻射に対応している電波は Penzias と Wilson により１９６０年代に偶然発見されたものである事は良く知られている．彼らは人工衛星からくる電波をより精度良く観測しようとして検出器の改良を重ねていた．当時の人工衛星から発せられる電波は非常に弱く，それをいかに正確にキャッチするかという純粋に技術的な問題で大変な努力をしていた．しかしながら，どの様に検出器を改良してもついにノイズを消す事が出来なかったのである．すなわち，この宇宙は何処から来たかわからない電波で満ちており，そしてそれが宇宙の背景輻射と呼ばれるものである．現在までのところ，この宇宙の背景輻射は完全に等方的である，つまり，宇宙のどの方角から来ているとは言えなく，どこからも来ているという事が観測事実となっている．さらに，この背景輻射の温度分布を測定する事が出来ていて，それが絶対温度で約２.７度Ｋとなっており，この温度分布も光が来る方角には依っていない事が観測されている．

1.1.2　ヘリウム原子のアバンダンス (存在比)

宇宙に存在する原子核を見ると，当然の事ながら陽子が 9 割を超えている．そして次に多いのがヘリウムである．そして原子量が増えるにつれて急速に存在確率は減って行くのである．何故ヘリウムが多いと不思議なのか？それは原子核の作られ方に依っている．もし原子核の生成が星が燃えて行く過程で行われるとするならば，その過程ではヘリウムはほとんど燃えてしまう事がわかっているので，ヘリウムの量は少ないはずである．ところが，観測事実は宇宙に存在するヘリウムの量は陽子についで多いのである．そして，ヘリウムよりさらに重い原子核はより少なくなって行くのが観測されている事実でもある．

この事を理解する最も手っ取り早い方法は，宇宙初期に何か熱い状態を仮定して，その暑い内にヘリウムを作ると言うものである．その状態の温度が十分熱い場合で，熱的な平衡状態にある時は，中性子と陽子はほぼ同じ割り合いで

存在するはずである．宇宙が膨張して温度が下がり始めると，中性子が崩壊し始める．この寿命は１０分少しである．この間にまずは重水素を作る必要がある．近くに陽子と中性子が存在する限り，重水素は簡単に出来る．そして，重水素が沢山作られるとそれらは次々とヘリウムになって行くのである．しかし，宇宙が爆発 (膨張) している限り，温度は下がって行き，ヘリウムを作れなくなる．さらに，ヘリウムが２個融合するとベリリューム８になるのだが，これは安定な原子核ではないのでここから先の原子核が簡単には出来ない．このベリリューム８が不安定であるという事が，ヘリウム原子がこの宇宙に数多く存在している最も重要な原因になっていると考えられる．恐らくは，これより重い原子核は星の内部における核融合反応で作られて行くものと考えられている．この宇宙において，エネルギー源として存在しているものに主として３つある．一つは核融合・核分裂等の原子核の束縛エネルギーの開放と関連するものである．もう一つは重力エネルギーである．この重力によるポテンシャルエネルギーはいかなる質量を持った粒子に対しても常に引力であるために，全体としては巨大なエネルギーになっている．最後に，もう一つのエネルギーを挙げよう．これは素粒子のもつ運動エネルギーである．例えば，フォトンは物質に吸収されない限り，常に一定の運動エネルギーを持っている．波長が十分大きくて電波領域のエネルギーになってこの宇宙にフラフラと存在しているのが，宇宙の背景輻射のフォトンである．この場合，電波領域のエネルギーは通常の原子による吸収ではかなり困難である．すなわち，自然界に存在する無機質による吸収は実質的にはかなり困難であると考えられる．従って，ひとたび生成された背景輻射のフォトンはこの宇宙に長い間，漂い続ける事になると思われる．

1.1.3　双子の星

現在までにいくつかの双子の星 (クェーサー) が見つかっていると考えられている．その星達から来る光のスペクトルが良く似ており，この双子の星は同じ星を見ていると考えられた．しかしながら，最近の宇宙物理学における観測では，双子の星は実際に別々の良く似た二つの星ではないかと言う議論がされている．現実に星の生成を考える場合，その領域における分子雲の構成粒子となる陽子および原子核の分布状況は大雑把に言ってほとんど同じものだとしても矛盾する事はない．従って，双子の星がその生成物質を良く似た別々の星達であるしても，それ程不思議な現象では無いのかもしれない．

1.2　ビッグバン宇宙論への反証

それでは，一点から爆発したというビッグバン宇宙論に対して，何らかの観測上の反証は存在しているのであろうか？

1.2.1　銀河形成

実は最も基本的で観測との整合性が取れない問題として，銀河形成がある．ビッグバンは一点から爆発したと考えているので，当然その後のエネルギー放出は等方的であり，また極めてユニフォームであるべきである．この場合，それではどうしたら対称性を壊して銀河形成ができるのであろうか？その答えは，勿論「不可能」である．総計的なゆらぎから銀河を作る事が出来ない事は良く知られているし，直感的にもそれが難しいであろう事は想像に難くない．

最近では，銀河系集団の分布にかなり奇妙は構造がある事が知られている．これは「宇宙の大規模構造」と言われているものであり，何か壁のように並んでいる銀河系集団が発見されている．この様な銀河系集団の構造は，ビッグバン宇宙論ではどのようにしても説明不能である．この銀河系集団の大規模構造こそが，新しい宇宙論を考える上で重要な参考になるべきものである．くり返し言う事になるが，理論の模型は常に観測から出発するべきであり，宇宙論もその例外ではあり得ない．但し，宇宙物理が科学として難しいのは，繰り返しの実験が不可能である事によっている．従って，観測された事実から，整合性を保つ事ができる理論を構築してゆくしか他にしようが無いのである．

1.2.2　反物質世界がない

ビッグバンにおいて宇宙が一点から爆発したとすると，その最初の物質は明らかにエネルギーだけの塊である．従って，それはバリオン数で言ったら，バリオン数はゼロの世界である．ここで，バリオン数とは陽子や中性子の状態を１として定義している量子数であり，従って質量数 A の原子核のバリオン数は A となる．しかし，我々の宇宙は物質の世界 (バリオン数がプラス) である．これはどうして可能なのであろうか？現在の所，バリオン数を破る力は実験的に見つかっていない．理論的には，ある時期に「大統一理論」という不思議な理論が流行していた事があったが，この理論は自発的対称性の破れの物理を正しく理解できていなかった頃に作られたものであり，２つの問題点がある．一つは，自発的対称性の破れを応用しているのであるが，基本的なところで完全

に間違っている．場の理論において系が持っている対称性が自発的に破れると言うような事はなく，場の理論の真空（負のエネルギー状態）が，ある種の対称性を持つ場合，それに付随する保存電荷がゼロの場合の真空エネルギーと比べて有限電荷をもつ真空の方がエネルギー的により低くなり，真の真空として実現される事があると言っているのにすぎない．真空が自発的に対称性を破る事など実際には勿論起こっていなくこれは単純な間違いである．２つ目の問題点として,「繰り込み群」の応用がある．この「繰り込み群」は繰り込み理論を誤解した事により作られた理論に基づいており，全く意味の無い理論体系である．実際，フォトンの自己エネルギーは繰り込み不要であり，繰り込み群の元の式が存在していない．これらの事より，今となっては，大統一理論に関して言えば，信頼できるできない以前の問題である．１９７０年代の素粒子理論は極端に言えば，新しければ何でも良いという風潮があったように思われてならない．

実験の観点からしても，バリオン数を破る力は陽子崩壊の実験事実から言って，ほぼ否定されたと見て良いと思われる．直感的にも，陽子崩壊の実験を考える時，１万トンの水の中には約 3×10^{32} 個の陽子がある．もし陽子の寿命が 3×10^{32} 年だとしたら，１年間この水を観測したら１個の陽子崩壊が起こる事に対応している．最近の実験データはすでにこの寿命を超えており，陽子崩壊は起こらない事を示している．また，理論的な必然性はさらに無く，全く必要ないものである．

一方，反物質の存在に関しては，観測の方からすると，現在までにおいて反物質の世界の存在を示す証拠は何処にも見つかっていない．宇宙線の中に反陽子は見つかっているが，これは高エネルギーの宇宙線が他の物質と衝突して生成された反陽子が地球周辺で観測されたものと考えられている．

1.2.3　フォトン・バリオン比

宇宙の背景輻射で見たようにこの宇宙には光（電波）が非常に多い．実際，フォトンの方がバリオンと比べて個数で行って１０億倍程多いと考えられている．この観測データをどのように解釈したらよいのであろうか？

理論的にはフォトンは常に真空から作られるのに対して，バリオンは最初にあったものからトータルでは増える事はない．その意味では，フォトンは常に増え続ける事になっている．特にエネルギーの低いフォトン（電波領域）は物質に吸収される可能性が低くて，一度生成されるとそれが消滅する事はかなり難しい事になっている．

さらに，フォトンは重力と無視できない強さの相互作用をする事がわかって来ているので，フォトンがバリオンと比べてどの程度の比率が合理的なのかは今後の課題である．しかし，この疑問自体が物理的に意味がある設問かどうかは，実は良くわからない．この事はバリオン自体が何処で作られたかと言う設問と同じ問題となる．この本で取り扱っている新しい宇宙論によれば，この宇宙の存在自体が無限に遠い過去から存在していたと言う事に基礎を置いている．一般相対論ではバリオンもこの空間もビッグバンと共に作られたと言う思想である．しかし物理学では，時間や空間自体の存在は仮定し，その上で物理学を作る事はできるが，時間と空間を認識し理解する事ができない．従って，空間が作られたと考える事には飛躍があり過ぎ，これは科学ではない．

1.2.4 無限に遠い過去

無限に遠い過去にすでにこの宇宙が存在していたという仮定に関しては,「無限に遠い過去」という時間が物理の研究対象にはならないと言う事に基づいている．理解不能である事を議論する事ほど愚かな事はない．従って，この宇宙に存在しているバリオン数は，元々あったものであるとする事が，我々ができる唯一の科学的方法であると考えている．一方において，フォトンは常にできたり消えたりするために，フォトン・バリオン比が本当に物理学の対象になると言い切る事ができるかどうか自信はない．しかし，観測事実はそれなりに意味があり，その観測量から何らかの有意な物理的な情報を引き出せるかどうかは今後の研究に待ちたい．

1.3 時間と空間

物理学により自然を記述しようとする場合，必ず，時間と空間がその全ての基礎となっている．宇宙論を議論する時もこの宇宙の広がり（空間）や宇宙の年齢 (時間）が研究の対象になっている．しかし，この場合，時間と空間とは一体何者であろうか？良く考えてみるとその時間と空間を理解する事が不可能である事に気付かされる．哲学者の言葉を借りるまでもなく，例えば空間と言っているのは，物質の広がりの事である．物質が存在しない場合,「空間」の認識は出来ない．時間に関してはもっと深刻である．我々は時間と言ってもその瞬間しかわからないのであり，それは時間を認識できた事にはなっていなく，従って時間がわかった事にはならない．恐らくは，時間の流れの認識に関しては，何かをあらわす記号により時系列を作り，これにより過去・未来を認識しているものと考えられる．従って，空間の広がりよりもより抽象的な形で時間を認識していると考えて良いと思われる．

物理学では，この時間と空間はパラメータである．すなわち，物質の状態を記述するために必要なパラメータと考えて良く，それ以上の事はわからない．Newton 力学では，物質（正確には質点，すなわち物質の重心）の座標の運動を記述する方程式になっている．この場合，質点の座標が時間と共にどのような変化をするかを記述する学問である．この場合，明らかに空間の座標は質点の座標であり，空間そのものを表しているわけではない．

自然界における物理法則を考える時，常に座標系 (慣性系）を導入してその中で物理法則を記述する事になる．その場合，座標系自体を物理学の研究対象にする事は出来ない事である．座標系に対して一つ言える事は，どの慣性系も同等であると言う事であろう．これは相対性原理の基礎になっているが，勿論，証明は出来ない．しかし，現在までのところこの慣性系の同等性の仮定と矛盾している現象は見つかっていない．

このように自然界を記述する物理学は，物質の状態 $\Psi(t, \boldsymbol{r})$ に対して基本方程式をたてて，それによりあらゆる物理現象を記述しようとする学問である．この場合，時間と空間はパラメータであり，それ自体が研究対象にはなっていない事は前述したとおりである．それは，その物理現象が時間・空間内で起こっており，時間・空間を座標系として利用する事はしても，我々が理解できるのはその物理現象そのものであるという事によっている．

場の理論を正確に理解したならば，アインシュタインの一般相対論が物理学における「理論模型」にはなっていない事が良くわかるものである．アインシュタインは物質が存在すると，その近辺の時間・空間が影響を受けると言う

事を考えて理論体系を作ったが，これが自然現象とはかけ離れている事は場の理論を理解したものにとっては明らかな事である．繰り返すが，時間・空間はあくまでもパラメータであり，物理量は状態 $\Psi(t, \boldsymbol{r})$ で与えられるからである．

この「時間・空間」と「物理現象」の関係は，演劇における「舞台」と「役者の演技」の関係に似ていると思われる．物理現象は時間・空間の舞台で起こっている自然の演技であり我々はそれを理解するべく努力しているのである．そして，大切な事は物理学においては自然の演技を理解し評価する事が全ての仕事であり，それ以上の事は不可能であるという事である．時間・空間自体を認識し理解しようとする事は，科学では可能な事ではなくて，それ以外の手法，例えば哲学の問題として考える事になるという事である．しかしながら，Kant の哲学を読む限りにおいては，彼自身も空間の認識は物質があって初めて可能である事を主張している事でもあり，科学的な認識に非常に近いものと考えられる．いずれにせよ，科学においては何を解明しようとしているのかという問題が出発点であり，そこから何が解明できるかをしっかり見て行く事が最も重要である．あとで述べるように，一般相対論における「時空のスケール」の変化という様な問いかけは，科学においては意味をなしていない事がいずれ明確になってくるものである．

第２章　相対性原理と特殊相対論

物理学の基本は相対性原理にある．原理と言うからにはそれ自体は証明出来ない事である．相対性原理とは何か？それは，地球上で発展させられた物理の理論がそれと等速直線運動をしている他の系（慣性系）においてもやはり同じ法則が成り立ち同じ観測量が得られるべきであると言う事である．例えば地球上でバネの実験をしたとする．その時その振動数や振幅が求められる．ここで相対性原理とは等速直線運動をしている電車に乗って同じバネの実験を同じ条件でしたとするとやはり地球上と同じ振動数と振幅が観測されるべきであると言う物である．もしこの事が成り立たないとすると，一体，地球上で発展させられた理論は何だったのかという事になる．地球上だけで通用するような理論を作っても嬉しくも何ともない事になる．その意味においても確かに相対性原理は仮定ではあるが，しかしごく合理的なものである事がわかる．

この相対性原理で最も重要な事はそれぞれの系でそれぞれの「時間と空間」が定義されていると言う事である．１つの系で座標系を定義できると言う事は，その系に観測者も同時に定義出来るという事を意味している．これは非常に大切なポイントであり，特に一般相対論の問題点をしっかり理解するために重要であり，自分の言葉に焼きなおして理解する必要がある．このような事こそ，余程しっかり考えないと本当には理解できないものである．これからもこの本では繰り返し言う事になるが，じっくり考え抜いて自分の物にする事はそう簡単な事ではないが，しかしそれこそが物理の本当の面白さである．

2.1　相対性原理

相対性原理を解説するためにはどうしても2つ以上の「系」を考える必要がある．ここで「系」とは何かを説明しておいた方が良いだろう．我々が住んでいる所，これは地球上である．今の議論には，地球が回転している事は忘れても十分である．この地上で静止している系を「静止系」(または 「R− 系」) と呼ぼう．これは慣性系でもある．一方，この静止系に対して等速直線運動をし

ている電車に乗っている人も地上の「慣性系」と同等の慣性系を持つ．この電車の系を「S− 系」と呼ぼう．お互いに相手は等速直線運動をしている系となっている．ここで相対性原理の仮定とは何か？それは「どの系でも物理法則は全く同じであり，またすべての観測量は同じである」というものである．この場合，それぞれの慣性系にそれぞれの観測者が定義されて全ての実験・観測を独立に行う事ができる事，さらにそれらの観測結果は全て一致する事である．これは原理であるから証明は出来ないが，現在までのあらゆる観測事実はこの原理が正しい事を示している．従って，これは原理として信用して十分良い．

2.1.1　特殊相対論

アインシュタインが相対性理論を「特殊」と「一般」に分けた理由は恐らくは一般相対論が重力理論を含んでいると思い込んだからであろう．相対性理論に一般も特殊もあるはずが無いのだが，この辺も彼がどの程度，相対性原理を理解していたかわからない理由でもある．しかし，ここでの言葉の定義は物理の理解には本質的なことではないので，これまでの慣習通りに使って行く事にしよう．

いずれにせよ，特殊相対論とは相対性原理に基づき，どの慣性系でも物理法則は同じであるという事を意味している．今，慣性系 R− 系に対して，もう一つの慣性系 S− 系が速度 v で等速直線運動をしているとする．この時，２つの系の間の変換則は速度 v が光速と比べて十分小さければ，非相対論的変換則（Galilei 変換）となり，速度 v が光速と同じ程度になった場合は，相対論的変換則（Lorentz 変換）となる．まずは，速度 v が光速と比べて十分小さい場合の非相対論的変換（Galilei 変換）について解説して行こう．

2.2　ガリレオの相対性理論

科学史的に厳密な事は別にして，基本的な相対性理論はガリレオにより作られている．今，電車の系である「S− 系」が静止系に対して一定速度 v で運動しているとする．この時，電車が走る方向はどちらでも良いからこれを $x-$ 軸としよう．ここで大切な事はそれぞれの系に座標系を定義する事が出来るという事である．そしてその座標系には観測者も定義する事が出来る必要がある．これは経験からして，電車の中に人が乗ってれば十分であると考えられる．こ

の時，電車の中の時間も空間も地球上と同等の定義が出来る事が最も重要になる．空間も時間も人間がどれだけ理解し認識出来るか哲学的には難しいところではあるが，慣性系には固有の時間と空間があるとして議論を進めていっても，今の所問題になる現象は見つかってはいない．

今，静止系の座標と時間を $R(t,x,y,z)$ と表記しよう．この時，電車の系の座標を $S(t',x',y',z')$ と表記しよう．但し，電車はゆっくり動いていると考える．ゆっくりという時は，常に何と比べてであるかを考える必要がある．物理で相対性理論を議論する時は，比較する速さは光の速度 c である． 光は地球を１秒間に７週半回るくらい速い．従って，光の速さは $c \simeq 6400 \text{ km} \times 2\pi \times 7.5 \simeq 3 \times 10^8$ m/s である．この時，時間はどの系でも同じであり，従って $t = t'$ となっている．２つの座標系には次の関係式がある．

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \tag{2.1}$$

これを Galilei 変換という．これは２つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい．バネの力学を記述する方程式は Newton 方程式である．今の場合，地球上 (R− 系) でバネの先に質量 m の質点をつるしてバネの振動の実験をしたとする．適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x とすると $m\ddot{x} = -kx$ が運動方程式になる．ここで k はバネ定数．$\dot{x}$ は Newton 力学の時によく使われている座標の時間微分の表記で $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ であり，従って $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ となる．この場合，座標は質点の座標を表しているので，座標が時間によっている事になっている．

Galilei 変換から明らかなように，電車の系 (S− 系) でも同じバネの実験をすると，この時は運動方程式が $m\ddot{x}' = -kx'$ となる．ここで x' は適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x' とした事に対応しており，これは地球上で行ったバネの実験と同じである．この２つの方程式を見ると形が同じである．数学では方程式の形が極めて重要な役目を果たしている．２つを並べて書くと

$$\begin{aligned} &\text{R− 系:} \qquad m\ddot{x} = -kx \\ &\text{S− 系:} \qquad m\ddot{x}' = -kx' \end{aligned}$$

であり，この時，確かに形が同じになっている．従って，この微分方程式を解いた答えも同じ形になっている．すなわち，２つのバネの振動は全く同じになっているというわけである．この微分方程式の解き方はどの教科書にも書いてあるのでここには書かないが，大切な事は結果を覚えておく事である．ちな

みに結果だけ書いておくと

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad \text{但し} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.2}$$

という振動になる．ただしこの時，初期条件 ($t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$) をつけている．当然の事だが，x' に対しても全く同じ解になる．

相対性理論はこれ以上の事は何も言っていないし，物理学における理論としてはこれで十分である．この例を見てもわかるように，それぞれの系で観測者の存在を仮定しているのだが，これが相対性理論の本質である．すなわち，どの慣性系でも観測者が独立に定義される事である．

このガリレオの相対性理論では，それぞれの慣性系における時間は全く同じものとしている．これは我々の経験から言っても当然の事として理解できる事である．しかし同時に，空間だけ変えても本当にそれで良かったのかという疑問は残る．それぞれの慣性系に観測者を定義したら，それぞれの観測者が時間を持っていても良さそうな気がする．実際，粒子の運動が光速に近い程に速い場合の相対性理論ではこの時間の事が重要になる．

2.3　相対性理論

話を進めて行こう．現実の電車だともはやその系が地上の系から見て光の速度に近く走る事はあり得ないことである．実際，恐らく最も速いと思われるロケットの速度は $v \sim 10$ km/s 程度であるが，これは光速と比べて 1 万倍以上遅いのである．しかし現実の物理でも光速に近い系を考える必要が出てくる場合がある．それは大気圏に突入する素粒子である．これはしばしば光速に極めて近い速度を持っている場合が観測されている．この場合この粒子は相対論的であると言う．ここで相対論的という言葉は，非相対論的という言葉と対比して使われている．粒子の運動が光速と比べて小さい場合を非相対論的と言うからである．

2.3.1　座標の Lorentz 変換

いずれにしても，S− 系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている．今度の場合，R− 系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時，S− 系

の座標は $S(t',x',y',z')$ となり，時間は別のものになる．それは，どの系でも観測者が定義されないといけないので，ある意味では当然である．しかし我々の日常の経験とは一致していない．この場合 Lorentz 変換は

$$x=\gamma(x'+vt'),\quad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\quad y=y',\quad z=z' \tag{2.3}$$

となっていて，ここで γ は $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式がどうして出てきたのか？それは簡単で，この Lorentz 変換の式のみが電磁場の方程式である Maxwell 方程式が S− 系でも R− 系でも同じ形の微分方程式になって欲しいという要請を充たすからである．逆にいえば，Maxwell 方程式は Galilei 変換だと S− 系と R− 系では全く異なった形の微分方程式になってしまうのである．但し，ここで言っている Galilei 変換は形が同じで v をそのまま光速に近づけた場合の事である．

Lorentz 変換の式を見ると直ちにわかる事は，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x\simeq x'+vt',\quad t\simeq t',\quad y=y',\quad z=z' \tag{2.4}$$

となっていて，Galilei 変換の式と一致している．その意味では Lorentz 変換の式は Galilei 変換の式を含んでいる事になっている．従って，普段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱ってもめったに間違える事は無いものである．

2.3.2 相対論における速度の和

相対論における速度の和は通常我々が持っている常識では考え難いものになっている．その原因は主として，どの系でも光の速度が一定であるという相対性理論の基本仮定と関係している．逆に言えば，光速を超える事はどの様な場合においてもあり得ないという事である．この事は現在では勿論実験事実として十分証明されていて，この「光速不変」の仮定と矛盾する実験事実は全く見つかっていないし十分信じて良い事である．

ここで相対論における 2 つの速度 V_1 と V_2 の和を求めて行こう．まず Lorentz 変換から

$$x=\gamma(x'+vt'),\quad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right) \tag{2.5}$$

であるから，変換された系での速度は

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} \tag{2.6}$$

となる．言い換えると速度 V_1 と 速度 V_2 の和である速度 V は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \tag{2.7}$$

となっていて単なる和ではない．勿論，２つの速度が光速と比べて十分小さい場合，この式は我々が日常よく知っている式 $V = V_1 + V_2$ になっている．

面白い事にもし一方の速度 V_1 が光速である時，速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c \tag{2.8}$$

となり，やはり光速になっている．すなわち電車から光を放つとその光の速度はやはり光速 c であるという事を示している．さらには両方の速度が $V_1 = c$ および $V_2 = c$ と光速である時もやはり和の速度は光速 $V = c$ となっている．このような状況は自然界に実現される事はあり得ないであろうが，理論的には光速を超えないという事実を良く表している．

粒子の速度が光速を超えない理由は，速度の定義式からみたら当然の事である事がわかる．すなわち相対論での速度の定義はどうしても運動量を用いて行わざるを得ない．この事は相対論では運動量が物理量になっている事と関係している．相対論での速度の定義は

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} \leq 1 \tag{2.9}$$

である事から質点の速度が光速を超える事はあり得ないのである．

2.3.3 運動量の Lorentz 変換

古典力学では質点の速度が物理量になっていて，速度の時間微分が加速度になり，これが Newton 方程式と直接関係するため速度は常に重要な役割をしている．ところが相対性理論を扱う時は質点の運動量が重要な役割をする．というよりも，速度が物理的に重要になっているのは実は古典力学だけである．量子力学では運動量が重要になっているがこれも相対論的量子力学がより基本的な方程式であるからである．

それでは質点の運動量はLorentz変換に対してどの様に影響されるのであろうか?この場合, 運動量とともに常にエネルギーも一緒に考える必要がある．それは，座標では時間と空間座標を一緒に考えていた事と同じである．今，R−系での質点のエネルギーと運動量を $(E,\boldsymbol{p})$ としよう．この時，R−系に対して $x-$ 軸に沿って速度 v で動いている $S-$ 系においては，この質点のエネルギーと運動量 $(E',\boldsymbol{p}')$ はどうなるのであろうか？ これはLorentz変換により与えられる．すなわち

$$p_x{}' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma\left(E - vp_x\right), \quad p_y{}' = p_y, \quad p_z{}' = p_z \tag{2.10}$$

である．この時，$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2$ を計算すると

$$E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 \tag{2.11}$$

となり，一定値となる．この一定値は何であろうか？これは系の変換によらない量であり，質点を考える場合，その質量しかあり得ない事がわかる．従って，これは

$$E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \tag{2.12}$$

と書く事ができる．ここで，運動量 $\boldsymbol{p}$ がその質量と比べて十分小さい場合,

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \boldsymbol{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots \tag{2.13}$$

となり，確かに非相対論の「分散関係式」が得られている事がわかる．ここでコメントであるが質点のエネルギーがその運動量とどの様な関係式で表されているかを示す式が分散関係式と呼ばれるものである．これは物理では非常に重要な関係式となっている．

後で書くように，この時エネルギーと運動量を一緒に書いた４元運動量はかなり便利である．但し，この時光速 c を $c=1$ とした単位系を用いる．これは単に簡単にする事以上の意味はない．しかし，とても便利であり，また間違いを避けるのにはベストである．以下でもしばしばこれを採用して行く事になる．必要に応じて戻して行けばよい．この時 ４元運動量を $p^\mu = (E,\boldsymbol{p})$ と定義して，また４次元の内積を

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{2.14}$$

と定義すると，結局

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 \tag{2.15}$$

となり，相対論での分散関係式が簡単な形で覚える事が出来るのである．

2.3.4 微分量のLorentz変換

Lorentz変換はMaxwell方程式を不変にするために考えられた変換式である．この場合

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \tag{2.16}$$

の変換に対して，その微分系の変換は公式

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.17}$$

を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.18}$$

と変換される．これは解き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(v\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) \tag{2.19}$$

となる．ここで

$$p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}, \qquad E = i\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.20}$$

と定義してみると

$$p_x = \gamma\left(p_x{}' + \frac{vE'}{c^2}\right), \qquad E = \gamma\left(E' + vp_x{}'\right) \tag{2.21}$$

となり，座標の変換則と一致している．さらに，

$$Et - p_x x = E't' - p_x{}'x' \tag{2.22}$$

が簡単に示す事ができ，４次元の内積 $px \equiv Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}$ が

$$px = Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = p'x' = E't' - \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}' \tag{2.23}$$

のように不変である事がわかる．

2.4 相対性理論の具体例

どのような場合に Lorentz 変換の式が必要になってくるのであろうか？一般に運動方程式を考えた時，Lorentz 変換に対して方程式の「形」が不変である事が最も重要である．ここでは，もっと具体的な問題として Lorentz 変換が必要になるいくつかの場合を以下に議論しよう．

2.4.1 大気圏で生成された μ-粒子測定

恐らく，最も良い例は大気圏に突入した高エネルギー陽子が空気と衝突して，結果的に μ-粒子（ミューオン）を生成した場合であろう．このミューオンは１００万分の２秒程度の寿命を持つ不安定な素粒子である．この素粒子は電気的な相互作用しかしないので，大気と衝突しないで地上で観測される可能性がある．この時，このミューオンが光速で走っていたとしても，計算してみれば明らかなようにミューオンが走る距離は $\ell \simeq c \times 2.2 \times 10^{-6}$ s であるから，最大でおよそ７００mしか飛べない．しかしながら，実際は地上で観測される事があるのである．これは何故であろうか？理由は簡単である．ミューオンは地上の観測者に対して等速直線運動をしている．このミューオンの系を，勿論，慣性系とする事が出来る．そうすると，ミューオンの系での時間は地上の観測者の時間とは異なっている事になる．それは Lorentz 変換の式が告げている．我々が慣れているのは Galilei 変換であり，時間が遅れるという事はかなり考え難いのであるが，これはしかしながら,「光速がどの系でも一定である」と言う事が普段の常識と合わない事に関係している．前述したように，Maxwell 方程式が理論の中心である限り，相対性理論は正しい理論である．実際，ミューオンの系では時間が γ 倍だけ遅れている事がわかり，ミューオンが光速に近いと確かにかなり時間が遅れ，その分ミューオンの寿命がのびており，従ってミューオンが走る距離もその分だけ伸びてしまい，地上で観測されることが可能となる．具体例として，形成されたミューオンのエネルギーが $E = 1$ GeV であったとしよう．この程度のエネルギーのミューオンが上空で作られる事は，ひどく稀な現象とは言えない程，高エネルギー陽子が宇宙から地球の大気圏に飛んできている．いずれにせよこの時の Lorentz 変換の式における γ はミューオンの運動量が $p = \sqrt{E^2 - m_\mu^2 c^2}/c \simeq 0.994$ GeV/c (但し，m_μ はミューオンの質量で $m_\mu = 0.1056$ GeV/c^2) となる事から

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(p/E)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1-0.994^2}} \simeq 9.5 \tag{2.24}$$

となり，従ってミューオンの系では時間が 9.5 倍だけ遅れることがわかる．この事から，地球上の系ではミューオンが走る距離が 9.5 倍伸びる事になり，地上でミューオンが観測される事が可能になっている．ちなみに，この現象は高エネルギー加速器実験では日常的にわかっているし，また利用されている事でもある．

2.4.2　光のドップラー効果

相対性理論の場合，もう一つの慣性系が光の速度に近いもので近づいたり遠ざかったりする場合，日常我々が持っている常識と矛盾するので，驚く場合が出てくる．例えば，その慣性系から光を放つとその光の速度はやはり光速 c である．ただし，そのエネルギーが変わるため，近づいてくる慣性系から放たれた光はその波長が小さくなり，逆の場合は大きくなるのである．それは，光のドップラー効果としてよく知られている事であるし，また観測もされている．基本的には，音のドップラー効果と同じであるが，音の場合よりもよりシンプルであり，わかり易いものである．その理由は簡単で，音の場合は地球上にある空気という系がすでに指定されているため，音源と音の受け側以外に，もう一つ地上という系があり，これが音のドップラー効果を複雑にしている．それに対して，光の場合は光が粒子として伝播して来るために，常に光源と光の受け側の 2 つしか系が存在していないので，単純に Lorentz 変換式でドップラー効果が理解できるのである．宇宙物理で良くお目にかかる式なので，ここに書いておこう．Lorentz 変換の式は粒子の持つエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ に対しても成り立つものである．すなわち

$$p_x{}' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma\left(E - vp_x\right), \quad p_y{}' = p_y, \quad p_z{}' = p_z \tag{2.25}$$

となっている．但し，ここでは星が地球から遠ざかって行き，その星から発せられた光の波長が変化する事を示して行こう．星が波長 λ の光を発するとその運動量は $p = \dfrac{\hbar c}{\lambda}$ となる．従って，星が速度 v で遠ざかっているとすれば，地球上で観測する光の運動量は

$$p' = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right) = \gamma\left(p - \frac{vp}{c}\right) = \frac{p\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} = p\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{2.26}$$

となり，光の運動量は減少して見えるのである．これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \tag{2.27}$$

となるので，光の波長は大きくなり，これを赤方遷移という．波長が大きくなる事を「Red Shift」というのは，ただ単に可視光においての光の性質から来ている．可視光では，その範囲の波長帯において赤っぽいのは波長が長く，青っぽいのが波長が短いからである．ついでにコメントしておくと，場の理論で赤外発散，紫外発散という言葉が良く出てくるが，これは発散は運動量の積分から来ていて，運動量がゼロのところで何かの積分が無限大になる時，これを赤外発散と呼んでいる．一方，運動量が無限大になる所で何かの積分が無限大になる時，紫外発散と呼んでいる．これは単なるネーミングであり，物理的な意味は全く無い．

2.5　相対性理論の適用範囲

ある理論や理論の模型を作った時に大切な事は，その理論の適用範囲を常にしっかり理解して抑えて置く事である．これはどんな場合でも重要であり，特に相対性理論においてはその適用範囲を吟味しておく必要がある．前述したように，不安定粒子が光速に近い速度で走っている場合はその粒子の持っている時間がゆっくり進む事からその寿命が延びるために，地球上で観測にかかる物理量を見る事が出来る．しかしながら，双子のパラドックスのような物理的な観測量が不明瞭な場合は，物理学の議論の対象にはなり得なく，意味が無い設問である．

相対性理論は「キネマティクス（運動学）」であるため，物理の「ダイナミックス（動力学）」を理解する事とは直接の関係はない．しかし，理論の模型を作ってそれを自然の記述に応用しようとする時，キネマティクスは必ずしっかり満たしている必要があり，満たさなければ模型の意味はない．例えば，ある自然現象を記述するための理論模型を作った時に，その模型の運動方程式は当然 Lorentz 変換に対して不変である必要がある．これが破られていると，系を決めて計算を実行した時，その系毎に異なった結果が出てしまうのであり，物理的に意味はない事が明らかである．しかしながら，Lorentz 変換に対して不変である模型は，どの系で計算しても物理的な観測量は同じになる．従って，

計算を実行する時はなるべく簡単になるような系を選ぶ事が大切である．

さらに，ある種の物理現象において，そのダイナミックスが時間発展に影響しない場合は，キネマティクスだけで全て解けてしまう事がよくある．この場合，逆に言えばキネマティクスはただ単に変換しただけだから，ここから新しい物理が発見される事はまずあり得ない．キネマティクスをいじって何か新しい事が出て来たとしたら，それは計算が間違っているか，または見方が新しくなってこれまでとは見かけ上異なるような結果が現れたものと解釈する事になるものと思われる．しかし，後者の場合，それが結構重要になる事もあるので，それはそれで注意する必要がある．

これまで見て来たように，相対性理論の数学は簡単であるし，その物理も明解であると考えられる．しかし，最も重要なところで良くわからない点がある．それは系の変換として使っている速度 v である．これが物理的にはどう理解できるのか自分にははっきりしていない．速度の概念は古典的なものであり，場の理論の枠組みとどのように整合性を取って行けるのか，これは今後の問題である．

第３章　一般相対論とその問題点

この章では一般相対論の方程式をまず紹介し，その物理における問題点について解説して行こう．一般相対論の数学的な詳しい説明はここでは省く事になる．専門書がいくらでもでているのでそちらを参考にしていただきたい．

物理学は自然現象を理解するために，その自然の一部を単純化して重要部分を取り出し，その自然現象を理解できる理論体系を構築する学問である．その最もよい例が Maxwell 方程式である．この理論も含めて，物理のすべての理論体系は現象を再現できるような現象論として作られている．ところが一般相対論に限って，残念ながらアインシュタインは実験ではなくて「思考実験」を原理として出発して理論体系を構築したのである．このため，一般相対論は自然界において何を記述しようとしたのかと言う対象（自然現象）が不明瞭であり，従って現実性が無い理論となっている．

この章では，一般相対論における概念的な困難についてしっかり見て行きたい．また，一般相対論が物理量として予言している水星の近日点移動の問題も具体的な数値とともに解説して行こう．観測との比較でも一般相対論による水星の近日点移動の予言値は観測値とは一致しないことが示されている．さらに決定的な現象として「うるう秒の問題」がある．水星の近日点が移動するならば，当然，地球もそれに応じた変化をするべきである．この当たり前の事が，現代技術の進歩，特に正確な時間測定の長足な進歩により，測定されてきた事は意味深いものがある．実際，地球の近日点移動と同じ現象がうるう秒として非常に正確に観測されていたのである．しかも，この地球の公転の遅れは一般相対論の予言では全く合わないのに対して，ここで紹介している新しい重力理論は水星の近日点移動の観測値の再現とは比較にならないほどの高い精度で観測データと完全に一致している．それは地球の公転が最も正確に観測されていると言う事を考えれば，理論との正確な一致は当然でもある．

3.1　一般相対論の方程式

アインシュタインが一般相対論の方程式を構築した際，その主要目的は電磁場と同じように重力場に対する方程式を導出したいと言う点にあったと考えられる．恐らくは，アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式から出発したものと思われる．それは

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi_g = 4\pi G_0\rho \tag{3.1}$$

と書かれる．ここで，ϕ_g は重力場であり，ρ は物質の密度である．この式自体は基本的には正しいと考えられる．それは勿論，実験的に重力場 ϕ_g が $\boxed{\phi_g = -\frac{MG_0}{r}}$ と書かれているからである．ただし，これはあくまでも大雑把に正しいと言っているだけであり，この Poisson 型方程式を導出する Lagrangian 密度がわかっていたわけではない．ここでは，アインシュタインによる一般相対論の方程式がどの様に導かれたのかを直感的に理解して行くための解説をして行きたい．一般相対論の方程式の物理を理解するためには，細かい数学は実は不要である．むしろ，いかなる物理現象を一般相対論の方程式により記述しようとしたのかをしっかり理解する事こそが最も重要であり，この事により物理をより深く理解するための一助になればよい．

3.1.1　一般相対論の直感的導出

一般相対論の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \tag{3.2}$$

と書かれている．ここで $g^{\mu\nu}$ は計量テンソルを表し，$R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソルとよばれる量で計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれている．また， $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものである．この式は，もともと重力場に対する Poisson 型方程式を一般化する事を目標にして，求められたものであろうと思われるが， 彼が何故一般化を目指したかったのかの物理的な理由は不明である．恐らくは， Poisson 型方程式だけでは重力場に関して不十分であるとアインシュタインは考えて，結局は電磁場の方程式と同じような式にしたかったのであろうか．ここで

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi_g \tag{3.3}$$

$$T_{00} \simeq \rho \tag{3.4}$$

と仮定することができたとすれば，確かに直感的にはアインシュタインの一般相対論の方程式が導かれる事が納得できるものではある．

3.1.2 一般相対論と重力場

このように，式 (3.3) を仮定すると，この式から確かに重力の Poisson 型の方程式 (3.1) $[\boldsymbol{\nabla}^2\phi_g = 4\pi G_0\rho]$ が導出されている．これは非常に重要な物理的な意味を持っている事は明らかである．実際，この事により「一般相対論の方程式は重力場に関係している」と人々は受け入れたのである．従って，この仮定された式 (3.3) が本当に成り立っているのかどうかと言う問題をきちんと検証する事が極めて重要であるのは言うまでもないことである．

• **式 (3.3) の物理的な意味は？：** しかしながら以下に見るように，一般相対論を重力の理論と関係つけることは容易なことではない. ここでアインシュタインは「弱い重力場の極限」では式 (3.3) $[g_{00} \simeq 1 + 2\phi_g]$ のように置くことができると主張したのである．しかし計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は方程式の未知関数であり，何故，それが重力場 ϕ_g と関係つけられてこのようにおけるのかという議論はなされていなく，またその理論的な根拠を見つけることはまったくできていない．さらに進んで，$g^{00} \simeq 1 - 2\phi_g$ とおくと重力場が斥力になってしまうことがわかる．この不定性からみても「一般相対論は重力理論である」という主張を理論的に正当化することはほとんど不可能であることがわかる．

• **致命的な欠陥：** さらに致命的な欠陥として，この式 $[g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g]$ 自体が，実は物理的に意味をなしていないのである．g^{00} の右辺の１は座標系の単なる数字である．ところが，ϕ_g は力学変数であり，この足し算は成立しない．これはカテゴリーの異なる量を無造作に足し算している事に対応している．

もう少し具体的に言えば，これは数字の１に新幹線の速度２５０ (km/h) を足せと言っている事に対応していて，お話にならない低レベルの間違いである．しかしこの式 $g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g$ を認めたため，一般相対論が重力理論であると長い間，人々は思い込んできたものであり，この誤解の事実はどうしようもない程に重いものである．実際問題として，このような基本的な考察が一般相対論関係では行われていなかった事の方がより深刻な問題であり，一般相対論に対して現象論的そして実証的な検証が欠如している事と関係している．

3.1.3 エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

一般相対論の式で右辺に現われているのは，エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ であるが，実はこの物理的意味はあまり明確とはいえない．物質が作っている物理量ではあるが，物質による密度 ρ と言うスカラー量からテンソル量を作る物理的な理由はない．さらに，このエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は，フェルミオンの「場の理論」を知らない限り定義するのが難しい．実際，粒子描像でのエネルギー・運動量テンソルが物理的に明瞭に定義できるかどうかは良くわからない．一般相対論では，$T^{\mu\nu}$ は星の分布関数から作られると仮定されている．その意味では，$T^{\mu\nu}$ を現象論的に作ることは可能でも，これが基本的な物理量にはならないことに注意する必要がある．これは電磁場の方程式と比較するとより明確になる．Maxwell 方程式の右辺にでてくるカレント ρ と $\boldsymbol{j}$ は物質が作る電荷密度と電流密度であるが，これらは量子力学の方程式をフェルミオンの多体問題として解くことにより原理的には求められる．これに対して，$T^{\mu\nu}$ は方程式の中での役割がこのカレントに近いものではあるが，しかしその物理的な意味合いはほど遠いものである．$T^{\mu\nu}$ は星の分布関数から作られており，その分布は重力下の運動方程式により決定される．従って一般相対論においては，その方程式以外に星の分布関数を決めるための「重力下の運動方程式」が暗黙の裡に仮定されている．

3.1.4 一般相対論の数学は複雑，物理は単純

物質があった時にどのような重力場ができるかと言うのが重力場に対する Poisson 型方程式であったのに対して，一般相対論の方程式は物質があった時に空間を測る計量テンソル $g^{\mu\nu}$ がどうなるかと言う事を決める方程式になっている．重力場を求めるべき所なのに，何故，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を求める問題にすりかわってしまったのであろうか？さらに，アインシュタインは何故そのような事をしたかったのであろうか？この疑問に対しては，ここでは答えはない．恐らくは科学史的にはある程度答えられる事なのかもしれない．いずれにしてもアインシュタインにとって，重力が Poisson 型方程式を満たす単純なスカラーであろうとはとても考えられなかったのであろうか.

3.1.5　計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の問題点

計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が座標に依存していると仮定されているが，この座標は何処から測られるのであろうか？これは一般相対論の方程式を見ればわかるように物質場の重心からである．従って，物理的には物質全体が作る重力場を通して計量テンソルが決定されるものとなっている．この事を Maxwell 方程式と比較して考えてみよう．Maxwell 方程式においては，電荷密度と電流が存在した時，それに応じて電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が求められるが，この時，電場と磁場の座標系は常に電荷密度と電流をあらわす座標系を起点として測られている．従って，電場と磁場は物質の重心を原点として測られているのであり，この事で物理的に問題になる事は勿論，あり得ない．それは Maxwell 方程式がどの慣性系でも成り立ち座標の取り方には依存しないからである．

しかしながら，この時，それが計量テンソル $g^{\mu\nu}$ だとすると話は別で，これは問題になる．それは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空を測る物差しに対応していると考えているため，物質が存在している「時空」がその計量を変えてしまうと，それは最も重要である相対性原理と明らかに矛盾する事になっている．これはまさに，等価原理が相対性原理と矛盾するという事と同じ意味合いである．この等価原理については，後程，詳しく議論して行くので，その内容をしっかり考えて理解して貰いたい．

• **時間と空間座標は独立**：　ここで座標についてであるが，一般相対論の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ やエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の時間と空間座標は独立である．しかしながら，Newton 方程式では質点の空間座標が時間の関数になっている．このため，その質点を区別することはできなく，従って $T^{\mu\nu}$ を表現することはできない．一方，場の理論では空間と時間は独立であり，粒子を表すのは状態関数であるため確かに，$T^{\mu\nu}$ を表現することは可能である．

• **座標系の時間とは何か？**：　計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時間の関数であるとしているが，その時間は座標系の時間である事になっている．しかし座標系の時間とは物理的にどう言うものなのであろうか？通常の感覚では，これは観測者の時間である．そして質点の運動を記述するときの時間は観測者がその質点の座標を時間の関数として記述するので，時間の起点は観測者が決める事ができる．

しかし今の場合，$g^{\mu\nu}$ の時間の起点はどのように選べばよいのであろうか？一般相対論の方程式 (3.2) を見る限りでは，その起点は右辺の質量分布が与えられたときを時間の起点にしているのであろう．そうだとすると，右辺は一般相対論とは無関係に決定されているので，時間の起点は無限の過去と言う事になっている．しかしながら，方程式の時間の起点の問題さえもはっきりとはわ

かってはいない状態でその方程式を解いたとしても一体，人々は何を理解したいのであろうか？

3.1.6　物質に対する方程式の欠如

アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式だけでは，何かが不十分であると思ったのであろう．前述したように，それは恐らくは，電磁場の方程式の事が頭にあったからだと考えられる．そのために，テンソル型の方程式に持って行きたかったのであろう．しかしながら，一般相対論の方程式だけでは，物理学としては不十分なのである．この一般相対論の枠組みでは，物質が高速で運動して相対論的になった時に，その物質が重力の影響をどの様に受けるかの方程式が欠如している．そして，これこそが最も重要な問題である．

• **相対論的粒子に対する方程式：**　すなわち，高速で運動する陽子が重力場の下でどの様に運動するのかと言う基本的な問題が設定されていない．具体的に言えば，重力ポテンシャルがあった時に，相対論的なフェルミオンが Dirac 方程式によりどの様に決定されるのかと言う基本的な問題が解かれていないのである．しかしながら，この一般相対論が作られた当時は，フェルミオンに対する Dirac 方程式どころか，Schrödinger 方程式も知られていない．従って，物質に対しては Newton 方程式のみが基本方程式でありこれは場に対する方程式になっていないので，ある意味での困難さがでて来ているはずであった．一つには，Newton 方程式では座標が質点をあらわしているが，これだとその質点を区別したい時にどうして良いかわからなくなっている．さらには，計量テンソルにあらわれる座標はその空間の点を表しているのであろうが，その点が質点とどのような関係になるのかが不明になる．場の理論では，空間と時間は独立であり，それらが関係する事は無い．そして場によって粒子を表す時に，その場が空間と時間に依存しているのである．一方において，Newton 力学は粒子の座標が時間とともにどのように動くかを表しているのである．従って，空間座標と時間の区別の仕方が場の理論とは全く異なり，同じ理論体系の中に組み込む事は，基本的に不可能な問題である．その意味では，時代背景から考えて，アインシュタインが一般相対論を考えて，このような場に対する基本方程式を作ろうとした事自体がもともと無理があったという事である．

3.2　等価原理

アインシュタインは一般相対論を構築する際，実験から出発しないで，等価原理という思考実験により考案した「原理」から出発してしまった．もし彼が Newton 方程式を相対性理論に合うように，高速粒子に対しても成立するべき方程式を作ろうとしたならば，それ程大きな間違いは犯さなかったと思う．物理学において，一般相対論を除く全ての理論は実験事実を記述する事を目的として方程式を作っている．Newton 方程式は質量 m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ をかけるとその質点に対する方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ あり，これが古典力学の物理現象をうまく記述してくれる事がわかっている．また， Maxwell 方程式は４つの微分方程式から成立しているが，それぞれの方程式は電磁気的な現象を記述する方程式を統合したものである．例えば，Gauss の法則は電場 $\boldsymbol{E}$ に対する方程式であり，電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ に対して $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$ と書かれているが，これはクーロン力を良く記述しているし全ての実験と矛盾がない．さらに，水素原子における電子のエネルギースペクトルは Dirac 方程式によってほぼ完璧に再現されていて, 相対論的量子力学の正しさは証明済みである.

• **等加速度運動系：**　それでは「等価原理とは何か」が問題となってくる．原理というからにはそれを証明する事は出来ない．さらには，この原理は何かの観測量として実験的にわかっている事ではない．何が等価であるのか？それは,「一様重力場での物理と等加速度運動をしている系での物理が同じである」と言うのが仮定である．これは非常に強い要請になっている．例えば，一様重力場での粒子の加速度は $\ddot{z} = -g$ であるから，確かに重力場における加速度と重力定数は同じになっている．しかし，これは Newton 方程式そのものであり,原理でもなんでもない事になり，ここからは新しい物理は出て来ない．ところが，アインシュタインは等加速度運動系という非現実的な系を仮定してしまった．実際，エレベーターの系を考えて，その系での物理を考えるとどうしても光が曲がるか空間が歪むかのどちらかの結果を考えざるを得なくなり，この原理に従ったら，当然重力場において空間が歪むという奇妙な仮定を置かざるを得なかったのである.

• **エレベータの箱とその空間：**　もう少し専門的に言えば，エレベータの系と言っても，空間が動いているわけではなくエレベータの箱が動いているだけである．それは明らかで，箱が存在しないエレベータの系は定義できないからである．一方，慣性系の場合，空間がその系ごとに定義できており，またその慣性系における観測者の存在も定義される．等速直線運動をしている電車において，その電車の箱を取っ払ったとしてもその空間は定義されている．このた

め，観測者の存在を仮定することができるのである．これらの事はアインシュタインが相対性原理 (どの慣性系でも観測量は同じである) をきちんとは理解してはいなかったのではないかと疑わざるを得ないものとなっている．

• **空間と座標系：**　ここで「慣性系の空間」とは何かをもう少し詳しく解説しよう．今，地上の静止系を座標系 A として導入し，観測者 A は原点にいるとしよう．この時，等速直線運動をしている電車を考え，その電車の運動座標系 B を定義して，観測者 B はその座標系の原点にいるとしよう．ここで物理において使われている「空間」とは，座標系 B が動いているためその空間が一緒に動いているという言い方をしている．この時，電車の箱が取り払われたとしても観測者と座標系は何も影響を受けない．そしてそれぞれの系で同じバネの実験をするとすべて同じ観測量が得られることがわかり，これが相対性原理の根幹となっている．一方，等加速度運動系で同じことをしようとしても，ある速度 (加速度) で箱が取り除かれると，観測者はその系に存在することはできない．従って，物理で使う空間とは，結局，慣性系で定義された座標系とその観測者の事だと考えれば間違えることはない．

• **Gedanken Experiment (思考実験)：**　物理学で最も大切な事は，常に実験から出発してその観測事実を如何に整合性を保った理論で理解できるかと言う事である．これに対して，一般相対論においてアインシュタインは「Gedanken Experiment (思考実験)」を基にした「原理」から出発してしまったのである．実際，エレベーターの系を考えてそこで光が曲がったり空間が歪んだりしたら，それは仮定した「原理」が正しくない事を意味していると考えるべきであった．この事は，物理の専門家ではない人達や若い人達がむしろ正確に理解できるのではないかと思われる．しかし，それ以上に「Gedanken Experiment」から理論を構築しようという姿勢は科学者としては絶対に避けるべきものである事は言うまでもない．科学は自然を理解しようとする学問であり，物理学の理論は自然現象を数学の言葉を使って理解を深める事を目的としているからである．

3.3　重力ポテンシャルと Dirac 方程式

現在知られている基本的な相互作用は電磁気的な力，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．力の強さを示す結合定数と言う言葉でいうと，重力は最も弱い．実際，弱い相互作用と比べても重力は３０桁以上も小さい．重力の次に弱いのが弱い相互作用である．この力は，中性子が β 崩壊する時や π 中間子が崩壊してミューオンとニュートリノになって行く過程を記述する事ができる．これらの相互作用と比べると，電磁気的な力はかなり強い相互作用であると言える．実際，我々の物質の世界は基本的には電磁気的な力で支配されている．原子や分子が出来ているのも，全て電磁気的な力である．最後に，最も強い力として強い相互作用があり，これは原子力エネルギーや太陽のエネルギー源になっている．星の内部で起こっている核融合はまさに強い相互作用による核子間の束縛エネルギーをうまく利用する事により得られている．

重力は星の生成に大きな影響を与えているが，それは何故であろうか？重力は力の強さとしては一番弱いのであるが，しかしながら２つの重要な性質のために，大きな影響を星の形成では発揮する事になるのである．その２つの性質とは，力の到達距離が $\frac{1}{r}$ である事および常に引力である事である．特に，重力は常にどんな場合でも引力であり，おまけにその力は遠距離まで及ぼすため，いずれは全ての核子は引き寄せられて星を形成して行く事になっている．

• **量子数と電荷：**　重力以外の力は基本的に電荷に対応する「量子数」が重要な役割をする．電子と陽子の間のクーロン力は引力である．これは，電子がマイナスの電荷という量子数を持っているのに対して陽子はプラスの電荷の量子数を持っている．同じ電荷の場合には斥力であり，異なる電荷間では引力になっている．一方，重力の場合は常に引力であり，粒子間の重力はその質量にのみ依存している．従ってその力は弱くても常に引力で長距離力であるため，結局，最後には重力が他のどの力よりも勝ってしまうのである．

• **相対論的な陽子：**　粒子が高エネルギーになると相対論的な陽子の運動を重力場の中で考える事が必要となる．ところが重力ポテンシャルを Dirac 方程式のどの部分に入れたら良いのかという基本的な問題が未解決のままであった．この事は１９７０年の始め頃までは深刻な問題として人々の興味を引いていたが，その後パッタリと議論が途絶えてしまった．その主な原因は一般相対論への信奉であろう．ところが一般相対論は場の理論ではなく，その方程式は計量テンソルに対するものである．従って，正常な場の理論の枠組みの中に重力を入れる事が，結局，現代物理の最も重要な課題である事は当然である．

3.4 重力問題の方向性

ここで問題を整理してみよう．まず，Newton 力学では重力がある場合の方程式は良くわかっていて，実際，Kepler の法則にしても重力下での Newton 方程式を解けば問題なく理解されている．そしてその Newton 方程式はどのように導かれるのかというと，これはよく知られているように Schrödinger 方程式からきちんと導かれるものである．Schrödinger 方程式は場に対する方程式であるから，Newton 方程式を導くには何らかの近似をする必要がある．直感的にわかりやすいのは Ehrenfest の定理として知られているように，演算子 (座標と運動量) の期待値を取る事である．この手法により，Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導かれる．そして Schrödinger 方程式は非相対論の近似をすれば Dirac 方程式から求められる事から，結局，Dirac 方程式から，Newton 方程式が導かれる事を意味している．

• **Dirac 方程式と重力ポテンシャル：**　逆に言えば，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れられないとしたら，それは最もよく知られている重力ポテンシャルの場合の Newton 方程式が求められない事を意味している．この事より，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れた方程式を考えるのは一番最初にされるべき最も重要な事である．この問題が未解決のままで重力の問題を考えてきたために，重力の問題解決に対する正しい方向性を見失っていたと言える．恐らく，１９６０年代の多くの物理屋はこの問題をかなり深刻に考えていたと思われるが，ゲージ理論信仰の魔物により，この手の研究はすべて退けられてしまったものと考えられる．

• **クーロン場の Dirac 方程式：**　ここで少し数学を使ってこの問題を見て行こう．まず，重力ポテンシャル中の Dirac 方程式を議論する前に，クーロンポテンシャル $V_c(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ 中の質点 (質量 m) に対する Dirac 方程式を書くと

$$\left(-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = E\Psi \tag{3.5}$$

となっている．一方，重力ポテンシャル $V(r) = -\frac{G_0 mM}{r}$ の場合，もしクーロンと同じだとすると, 式 (3.5) と同様に

$$\left(-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{G_0 mM}{r}\right)\Psi = E\Psi \tag{3.6}$$

となる．この場合，非相対論化をしてもクーロンと同じで影響はない．

• **重力場の Dirac 方程式：**　実際問題として正しい方程式は

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{G_0 mM}{r}\right)\beta\right]\Psi=E\Psi \tag{3.7}$$

であることがわかっている．しかしながら，これまでこのような重要な問題を未解決のまま放置していた事自体が最も深刻な問題であると言えよう．

• **スカラー場によるポテンシャル：**　第４章で詳しく議論するように，新しい量子重力理論によって，式 (3.7) の Dirac 方程式が導出されている．すなわち，電磁場の場合とは異なっていたのである．この事は水星の近日点移動の問題を取り扱う時に，重大な効果を引き起こす事になる．それはクーロンポテンシャルの場合，非相対論の極限をとっても全く影響する事はなかったが，スカラーポテンシャルとして入ってくると，非相対論の極限において重力の付加ポテンシャルを新しく生み出すことになっている．これはベクトルポテンシャルによる Zeeman 効果の場合と同じ機構である．この新しい付加ポテンシャルが水星の近日点移動の問題を見事に解決している事がわかっている．

• **繰り込み理論：**　何故，スカラー場によって重力相互作用がうまく記述されるのかと言う問題はかなり難しく，実は繰り込み理論と密接に関係している．実際，この繰り込み理論を深く理解することが，この新しい重力理論を理解するための必須条件である．繰り込み理論とは，量子場の理論で摂動計算した時に現れる無限大をうまく処理して，観測量を有限量として求めて実験と比較する数学的な技法である．具体的には，場の量子化を実行すると，２次の摂動計算であるフェルミオンの自己エネルギーに Log 発散の無限大が現れてしまう．自己エネルギーは観測量ではないのでそれが無限大になっても気にする必要はないが，問題は観測量に無限大が出た場合である．特に，量子電磁力学における異常気能率補正を計算するとその計算結果に Log 発散が現れることが知られており，これが最も深刻な問題点であった．そしてこの無限大をうまく処理して，電子の異常気能率の実験値を正確に再現したのが繰り込み理論である．しかしながら，この繰り込み理論にも様々な問題点が浮上している．特に，観測量である電子の磁気能率補正の計算において，その計算手法に一部，誤りがあることが見つかっている．そして現在の量子場の理論において摂動計算を実行した場合，どの観測量に対しても繰り込みが不要であるという可能性が指摘されている．この問題は第５章でもう少し詳しく議論して行こう．

第4章　新しい重力理論と宇宙論

この章では新しい量子重力の理論を紹介し，またそれに基づいた宇宙論を解説して行きたい．従って，この章は少し難しくなっているかも知れない．とはいっても，この解説は到底厳密とはいえないレベルなので，もっとしっかりした物理の内容は参考文献を読んで理解してもらう事としよう．

4.1　新しい量子重力の理論

重力の量子論を作るという事は何を物理的には意味しているのかをまず考える必要がある．最も基本的な意味は明らかである．それは，まずは，重力ポテンシャルがある時の Dirac 方程式をどのように書けるかという事である．これがすべての出発点になる．逆に言えば，これさえも出来なかったら，それ以上の重力理論を考える物理的な意味は無い．

しかしながら，現在良く使われている量子重力は重力場の量子化という意味を含み，そちらの方がより本質的であると考えている物理屋が多いように見受けられる．ところが，一般相対論は重力場に対する方程式ではなく，計量テンソルに対する方程式であり，そもそもその物理的な意味が不明である．その物理的に不明瞭な場の量を量子化するといっても，なんの事かわからないのは当然である．まずは量子重力に関してその物理を明確にして行こう．そしてそのためには，粒子間の重力ポテンシャルを与える Lagrangian 密度を求めてこの Lagrangian 密度からの Lagrange 方程式から重力ポテンシャル中での粒子の運動を記述する Dirac 方程式を求めるという事が，最も重要な課題となっている．

さらには，重力ポテンシャル中での新しい Dirac 方程式が求められた事に対して，その非相対論的な極限の方程式を求め，それを古典力学の方程式に持って行く作業を実行する必要がある．実際，このようにして Newton 方程式を求めたところ，新しい重力として付加ポテンシャルを含めた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{4.1}$$

と求められる．この第２項である重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動，GPS 衛星の遅れ，そして地球の公転によるうるう秒の是正の問題をすべて解決している．また，この重力付加ポテンシャルは長い間，Newton 方程式のなかで議論されてきた重力ポテンシャルを修正した新しいポテンシャルとなり，これは１９世紀半ば以来の変更と言えるものと考えられる．

ここで注意しておきたい事が一つある．歴史的に言って相対論的効果を最初に具体的に検証したのは，Michelson-Morley の実験である．この場合，地球上で観測できる最も速いものは地球の公転速度であり，Michelson-Morley はこれを利用して光の速度が地球の公転速度の影響をどのように受けるかを検証したわけである．結果は良く知られているように，光速は地球の公転速度の影響を受けていなく，光速不変の法則へと発展して行くのである．この時の相対論的効果は

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \tag{4.2}$$

である事が光速 c と地球の公転速度 v を入れれば求められる．一方，水星の近日点移動 ($\Delta\omega/\omega \sim 5 \times 10^{-8}$) も地球の公転によるうるう秒の効果 ($\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$) も，ともに丁度，相対論的効果の大きさそのものである．従って，直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は，至極当然の事と納得できるものである．

4.1.1 古典場と量子場

場の理論を考える時，その場が普通の関数 ($c-$ 数) である場合を古典場という．例えば，Schrödinger 方程式を考える時，状態 $\psi(t, \boldsymbol{r})$ を波動関数と呼んだり状態関数と呼んだりする．この $\psi(t, \boldsymbol{r})$ は座標 $(t, \boldsymbol{r})$ によっている事からわかるように「場」そのものである．しかし，この $\psi(t, \boldsymbol{r})$ は関数ではあるが，オペレータではない．このように場が $c-$ 数の関数である時，古典場であるという．これは勿論，量子場を考えているから，古典場という言葉を使っているが通常の波動関数の事である．

それではどのような時に量子場を考える必要があるだろうか？これは電磁場で考えるとわかり易い．Maxwell 方程式に出てくる電場と磁場は古典場である．この式の中では，場を量子化する必要がない．しかしながら，水素原子において，電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ へ遷移する時，光が放出される現象が知られている．これは，電磁場の理論の立場からすると光が全く存在しない状

態から，突然光が生まれてくる事に対応している．これは，光が真空から作られるという事を理論の中に組み入れる必要がある事を示しているものであり，これは場がオペレータになる事を意味している．この様に，場が出来たり消えたりする状態を生成・消滅演算子により記述する事を「場の量子化」と言う．現在までのところ，実験を記述するために場を量子化したという事以上には，理論的にわかっているとは言えないが，同時にこの手法により現象を記述した場合，それと矛盾する実験はまだ見つかっていなく，理論的な整合性は十分であると考えて良い．

4.1.2 重力を含む Lagrangian 密度

電子と電磁場の相互作用を記述する Lagrangian 密度は，現代物理学の最も大きな成功を収めた理論である．場の量子化まで考慮した量子電磁力学は，現在までの全ての実験と矛盾する事はなく，極めて信頼性の高い理論体系となっている．

重力を入れた理論を考える時，当然の事として，最も信頼されている量子電磁力学の理論体系に何とかこの重力の相互作用を組み入れる事が自然な事であると考えられる．この場合，出発点として重要な事は，重力場を考える場合，これはゲージ理論では不可能であるという事である．その理由は簡単で，ゲージ理論だとその理論が持っている特性として，粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまい引力だけが必要な重力理論には適していない．

それでは重力場はどんな場であったら常に引力を与えるのであろうか？この答えは，非常に簡単である．すなわち，重力の場が「スカラー場」であれば，その場を媒介とした相互作用は常に引力になっている．ここで，具体的な Lagrangian 密度を書いておこう．質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1+g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\upsilon\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\ \partial^\mu\mathcal{G} \quad (4.3)$$

と与えられている．ここで $\mathcal{G}$ は質量のないスカラー場となっている．この Lagrangian 密度をしっかり理解する事はそれ程やさしいとは言えないが，しかし専門的に研究して計算をする事以外は，読み飛ばしても全く問題ない．

それでは人々は何故このスカラー場による重力を考えなかったのだろうか？その答えは，恐らくは，スカラー場だと，繰り込みが出来ないと思い込んでいた事が主因であろうと思われる．さらには，繰り込みと関係しているわけだ

が，この数十年間，人々は基本的な相互作用の形はゲージ理論であるべきであるという根拠のない「信奉」に振り回されていたのである．量子電磁力学による繰り込み理論が大きな成功を収めたため，量子電磁力学の基礎であるゲージ原理が本質的であると思い込んだ節がある．ゲージ原理自体は単に数学的なものであり，確かに物理にそれを応用して，特に量子電磁力学では予想以上に上手く行った事は事実である．しかしだからといって，ゲージ原理が何処でも一般的に通用するかどうかは，全く別次元の問題であり，それはそれこそ実験によって決定されるべき物である．

この繰り込み理論に関しては第５章でもう少し詳しく議論する事になるが，物理的な観測量に log 発散がでてきたらそれはその理論形式が健全ではない事を意味している．どう考えてみても，観測量に発散が出たら，これはやはり理論的な枠組みの何処かに欠陥があると考えるべきである．その発散を自己エネルギーの発散を利用して「波動関数に繰り込む」と言う繰り込み理論の処方箋には無理があるという気がしている．恐らくは，発散が出るのは自己エネルギーだけであり，これは観測量ではないので気にする必要は無い．そして，観測量は正しく計算したらすべて有限量として求められるべきである．ここで繰り込み理論について一つだけ注意しておこう．物理的に言って，電子やフォトンの自己エネルギーが発散して無限大になっても，これらは観測量ではないので全く問題ない．ところが，場の理論の教科書において人々はこの自己エネルギーの発散を常に問題視していて，これを何とか処理しようとする試みが教科書では紹介され，解説されている．特に，質量の繰り込みという物理的には意味がないと考えられる問題も議論されている．尤も，今，繰り込み理論を勉強している物理の院生からしたら「質量の繰り込みのどこがいけないのですか？」と質問されそうである．これに答えるには，まず,「電子の自己エネルギーはある物理過程を計算した結果」であることを説明することになるだろう．電子がフォトンを放出して直ちにその同じフォトンを吸収するという過程である．その後，人々はこの自己エネルギー計算の結果をまた元の Lagrangian 密度に足す作業をしている．しかしある物理過程として計算した自己エネルギーを Lagrangian 密度に何故，付け加えてよいのかという物理的な理由を述べることは誰もできていない．人々は２次の摂動計算ででてきた無限大を打ち消すために，カウンター項として導入すると説明するが，自己エネルギーが無限大になっても誰も困らないのである．しかし人々はそれが繰り込みの手法であると主張しているが，しかしこれはかなり無理な計算過程である．繰り込みの処方箋自体がそのトリックとして数学的には良いのかも知れないが，物理的には正当化できない作業を重ねていることがわかる．

4.1.3 重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると，重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる．この方程式は時間によっている方程式になっているが，外場である物質場が時間によらない場合は，一般に静的近似をする事が出来る．この場合，重力場 $\mathcal{G}_0$ に対する方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathcal{G}_0 = mg\rho_g \tag{4.4}$$

と求められる．この時，$m\rho_g$ は物質の密度に対応する．結合定数 g は重力定数と $G = \dfrac{g^2}{4\pi}$ により結びついている．これは，基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて，確かに観測されている重力場を再現できている．

4.1.4 重力場中の Dirac 方程式

上記の Lagrangian 密度から質量 m の質点に対して，重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式は

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta\left(1 + g\mathcal{G}\right) - \frac{Ze^2}{r}\right]\Psi = E\Psi \tag{4.5}$$

と求められる．ここで重力場が質量 M の原子核によって作られるとするならば

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r}\right)\beta - \frac{Ze^2}{r}\right]\Psi = E\Psi \tag{4.6}$$

となり，前章で議論した重力場中の Dirac 方程式が得られた事になっている．これは非常に重要な方程式になっている．基本的な Lagrangian 密度から質点に対する重力場下での Dirac 方程式が初めてしっかりと求められたことになる．電子や陽子などの素粒子に対してこの重力場中の Dirac 方程式が重要になるような現象はそれ程無いかも知れない．可能性としては中性子星の表面での粒子の運動が相対論的になればあるいは必要になるかも知れない．しかし，後で見るように，この式を非相対論に直し，それを古典論に持って行くとこの時初めて重力場中での Newton 方程式が Dirac 方程式から矛盾無く求められた事になっている．

4.2　光と重力場の相互作用

上記の Lagrangian 密度は光と重力が相互作用する可能性を示している．実際，光とフェルミオンの真空偏極を考慮し，この真空偏極しているフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの４次の項を考えると，確かに光が重力と相互作用する事が証明出来るものである．ここで重要な点は，重力とフェルミオンの相互作用が重力と反フェルミオンの相互作用と同じ符号になると言う事である．通常の QED を考えた時は，光により真空偏極したフェルミオンと反フェルミオンはゲージ粒子と相互作用すると符合が反対になり，お互いに打ち消し合い結果的にゼロになってしまうのである．この点が重力との本質的な相違であり，従って重力と光が相互作用するのである．

この４次の Feynman グラフの計算で驚く事は，見かけ上このグラフは Log 発散する様に見えるが，実際には有限で値が求まるのである． Log 発散に対応する項は，劇的にそしてキネマティカルに打ち消し合い有限項のみが残る．この辺の事情は $\pi^0 \to 2\gamma$ の Feynman グラフの計算をした事がある人は直ちに理解できる事である．ちなみに，この $\pi^0 \to 2\gamma$ の Feynman グラフの計算法は西島和彦の教科書「Fields and Particles」に大変丁寧に書いてあるので，一読してみる価値が十分あるものである．

4.2.1　光と重力場の相互作用の検証

この光と重力場の相互作用による物理的な効果はどの様に検証できるのであろうか？光と重力の相互作用による散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha_g^2}{16k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \tag{4.7}$$

と書かれている．ここで，k と M は光子の運動量と重力中心の質量を表している．また，α_g は

$$\alpha_g = \frac{G\alpha m_t^2 M}{2\pi} \tag{4.8}$$

と定義されている．光と重力場の相互作用を検証するために一番良いと思われることは２つの衛星間にレーザーを飛ばして，その光が地球重力により散乱される時の散乱断面積を測定する事であると思われる．これは，不可能な実験ではないと考えられるが，より良い実験に関しては今後の課題である．

4.3　重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{GmM}{r}\right)\beta\right]\Psi=E\Psi \tag{4.9}$$

と求められた事より，その非相対論極限の方程式を求めて，それから新しい Newton 方程式を求める必要がある．この事により，重力ポテンシャルも変更を受ける事になる．そして新しく求められた重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動と GPS 衛星の軌道の時間の遅れが矛盾なくに説明される事がわかるのである．さらには，地球の公転における遅れ具合も重力付加ポテンシャルは 0.621 秒/年 と予言しているが，これははうるう秒として観測されてきた観測値 0.625 秒/年 とぴったり合うのである．さらに月の後退が観測されているが，月の運動も当然，重力付加ポテンシャルの影響を受けており，実際，月の後退の観測値が理論計算と良く一致している事がわかるのである．

4.3.1　Foldy-Wouthuysen 変換

重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H=-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\left(m-\frac{GmM}{r}\right)\beta \tag{4.10}$$

で与えられる．この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して，非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない．この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリー変換なので，常に信頼できるものである．その結果だけ書くと，

$$H=m+\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{GmM}{r}+\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\boldsymbol{p}^2-\frac{1}{2m^2}\frac{GMm}{r^3}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}) \tag{4.11}$$

となる．興味があるのは，古典近似をした後のポテンシャルなので，因数分解仮説

$$\left\langle\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\boldsymbol{p}^2\right\rangle=\left\langle\frac{1}{2m^2}\frac{GmM}{r}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{p}^2\right\rangle \tag{4.12}$$

は，良い近似である．さらに，Virial 定理

$$\left\langle\frac{\boldsymbol{p}^2}{m}\right\rangle=-\left\langle V\right\rangle \tag{4.13}$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{4.14}$$

となる．第 2 項が新しい重力の補正項であり Zeeman 効果と導出が似ているが，これを重力付加ポテンシャルと呼ぼう．電磁場の場合，クーロン力ではこのような非相対論の極限で新しい項は出てこないが，重力はスカラーで入っているので，このような新しい項が現れたのである．電磁場の場合ベクトルポテンシャルの部分は非相対論の極限をとると新しい項が現れてくる事は良く知られているが，重力の補正項もこれと似ていて新しい項が現れてくるのである．

4.3.2 相対論的な Newton 方程式

最近の研究 (半澤・藤田論文) により，Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式が直接求められる事が分かっている．この結果だけを書いておこう．

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - \frac{m}{E}\boldsymbol{\nabla}\left(-G\frac{mM}{r}\right) \tag{4.15}$$

ここで E は粒子のエネルギーであり，この式は粒子が散乱状態の場合にのみ正しい式であり，束縛されている場合には使えないものである．E は粒子のエネルギーであり $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ と書かれている．ここで $E \simeq m$ と近似すると方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \simeq e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.16}$$

となり，通常の重力ポテンシャルに対応している．もう少し近似を上げると非相対論の場合，$E = m + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots$ と展開されるため，重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルが現われる事がわかり，これは基本的には束縛状態の重力付加ポテンシャルに対応している．

4.4 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力ポテンシャルはNewton以来，約２５０年間に渡り $V(r) = -G\frac{Mm}{r}$ という形で使われてきている．この重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルがついたらどのような影響が出てくるのかと言う問題は非常に興奮する問題である．以下において，この重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動，GPSの時間の遅れ問題，地球の公転によるうるう秒の問題そして月が後退している問題にどのような影響を与えるのかと言う事を議論して行こう．ここで新しい重力項が

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{4.17}$$

と表せられたことは重要な意味を持っている．Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{G^2M^2m}{c^2r^3} \tag{4.18}$$

となっている．この式を解く事は簡単であるが，その前にいくつか物理量を定義しておく．まず，新しく角運動量 L を

$$L^2 \equiv \ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2} \tag{4.19}$$

と定義する．但し，力学的な保存量は ℓ である事に注意する必要はある．さらに角速度 ω と R を

$$\omega \equiv \frac{\ell}{mR^2}, \quad R \equiv \sqrt{ab} = \frac{\ell^2}{GMm^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}} \tag{4.20}$$

と定義する．ここで a, b および ε は長軸半径，短軸半径そして離心率を表すが観測量に現われるのは R である．また，ω と関係して

$$\Omega^2 \equiv \omega^2 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4} = \omega^2\left(1 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2}\right) \equiv \omega^2(1+\eta) \tag{4.21}$$

と定義する．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{4.22}$$

である．この時，軌道を与える式は直ちに解けて

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon\cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)} \tag{4.23}$$

となる．ここで A と ε は

$$A = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m(GmM)^2}} \tag{4.24}$$

で与えられる．物理的な観測量は $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分する事により得られる．

$$\frac{\ell}{m}\int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)\right)^2} d\varphi \tag{4.25}$$

これは直ちに計算されて

$$\omega T = 2\pi(1+2\eta)\,(1-\varepsilon\eta) \simeq 2\pi\{1+(2-\varepsilon)\eta\} \tag{4.26}$$

となる．ここで ε は十分小さいと仮定しているが厳密解も知られている．この事より，新しい重力項により引き起こされる効果は周期が少しずれる事を表していて

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2-\varepsilon)\eta \tag{4.27}$$

と書くことが出来る．この式から分かるように周期が増えており，これは確かに時間の遅れに対応している．ここで式 (4.26) は $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq (2-\varepsilon)\eta$ と書いて角速度 ω の進みと見る事も可能である．しかし，物理的に計算されたのは周期であり，角速度の進みは便宜上の表現である．

• **水星の近日点移動：**　水星の近日点移動の問題はアインシュタインがその解決を一般相対論により試みた事でもよく知られている．実際には一般相対論だと観測値を正しく再現する事は出来ないが，水星の近日点移動の観測値がよく知られた重力より他に何かあるという事を示唆していた事は間違いない．

• **水星の近日点移動の観測値：**　水星の近日点移動の観測値はもともとは角速度 ω の進みとして測定されたものと考えられている．それを角度のズレとして現在使われているため，色々な意味での混乱が生じている．これまで通り角度のズレとした場合

$$\Delta\theta \simeq 42\,'' \ \ \text{per} \ \ 100 \ \text{year}$$

となっている．水星の周期は 0.24 年である事から，一周回る毎での近日点移動比 $\delta\theta$ は

$$\delta\theta \simeq \frac{42}{3600} \times \frac{1}{360} \times \frac{0.24}{100} \simeq 7.8 \times 10^{-8} \tag{4.28}$$

となる．これは角速度 ω で測定されたとしたならば，このズレは角速度 ω の進みに対応している．その意味で人々は水星の近日点移動を進みと解釈したものと考えられる．一方，理論計算では

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \simeq 2.65 \times 10^{-8} \tag{4.29}$$

となる．ここで，水星の軌道半径と太陽質量は

$$R = 5.73 \times 10^{10}\ \mathrm{m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30}\ \mathrm{kg} \tag{4.30}$$

である事を用いている．これより理論の近日点移動比 $\delta\theta_{th}$ は

$$\delta\theta_{th} \equiv \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq 4.8 \times 10^{-8} \tag{4.31}$$

となり，観測値と良く一致することがわかる．実際，水星の近日点移動の観測値が１００年間における移動の観測値である事を考えれば，この理論と実験の一致は非常に良いものであると言えよう．

4.5 GPS 衛星周期のズレ

GPS(Global Positioning System) 衛星に対する新しい重力ポテンシャル項の影響はかなり大きい事がわかる．従って，これは必ず GPS 衛星により明確に検証できるはずである．GPS 衛星は地球の周りを一日に 2 回周回している様に軌道が設定されている．従ってその周期は半日である．GPS 衛星の場合，軌道半径 R，地球の質量 M それと角速度 ω は知られていて，それぞれ

$$R = 2.6561 \times 10^{7}\ \mathrm{m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}, \quad \omega = 1.4544 \times 10^{-4} \tag{4.32}$$

である．これより

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{theory} = 3.38 \times 10^{-10} \tag{4.33}$$

となり，この分だけ周期が長くなっている．このため，Newton 軌道から推測した時間からはこれに対応する時間だけ遅れる事になる．

• **GPS 衛星時計の遅れ：** 衛星側の内蔵時計では毎秒 100 億分の 4.45 秒を遅れとして補正されている事が知られている [8]．これは

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{GPS} = 4.45 \times 10^{-10} \tag{4.34}$$

に対応している．但し，衛星の時計をこの量だけ遅らせたのは一般相対論の効果とされているが，その計算の理論的根拠は不明である．通常の一般相対論による周期のズレの計算では $(\frac{\Delta T}{T})_{GR} \simeq 0.10 \times 10^{-10}$ となり，これよりもはるかに小さい値である．それにもかかわらず，この内蔵時計で採用されている遅れの値 (100 億分の 4.45 秒) は式 (4.33) の値より３割程大きいだけであり，確かに大雑把な遅れをうまく表現している．しかしながら詳細に見ると補正量が３割程大きすぎるため，地上でも補正せざるを得ないものとなっている．現実問題として，地上の基地局では多少の地上補正をしていると言われているが，地上での補正がどの程度なのかの具体的な数値は明らかにされてはいない．

• **GPS 衛星軌道のズレ：** 今，GPS 衛星の角度のズレの式は $\Delta\theta = 2\pi(2-\varepsilon)\eta$ である．これより１年間で GPS 衛星のズレを地上に対応するものとして測ったとすると $\Delta\ell_{GPS\ (one\ year)} = \Delta\ell \times 2 \times 365.25 \simeq \boxed{9.93\ \ \mathrm{m}}$ だけ遅れる事になる．サイエンスとしてみると，GPS 衛星の軌道が Newton 軌道からどれだけズレるかをきちんと測定する事が大切であり，その事は GPS 衛星の情報を総合的に検証する事ができれば，現在でも十分可能な事である．

4.5.1 静止衛星 (GSS, Geostationary Satellite) 周期のズレ

静止衛星の場合，軌道半径 R，地球の質量 M それと角振動数 ω はそれぞれ

$$R = 4.216 \times 10^{7}\ \mathrm{m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24}\ \ \mathrm{kg}, \quad \omega = 7.29 \times 10^{-5} \tag{4.35}$$

である．これより

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_{theory} = 2.115 \times 10^{-10} \tag{4.36}$$

となり，この分だけ周期が長くなっている．従って，１年では

$$\Delta T_{one\ year} = 6.675 \times 10^{-3}\ \ \mathrm{s} \tag{4.37}$$

となっている．今，地上でみたらこの GSS がどれだけずれるかの計算を行う．１周期あたりの GSS の角度のズレは

$$\Delta\theta = 2\pi \times (2-\varepsilon)\eta = 1.330 \times 10^{-9} \tag{4.38}$$

である．よって１周期あたりに GSS が地上でずれる距離は

$$\Delta\ell = \Delta\theta \times R_e = 8.47 \times 10^{-3} \ \text{ m} \tag{4.39}$$

これより１年間で GSS が地上でずれる距離は

$$\Delta\ell_{GSS\ (one\ year)} = \Delta\theta \times R_e \times 365.25 \simeq 3.09 \ \text{ m} \tag{4.40}$$

であり，この分だけ遅れる事になる．これは静止衛星の軌道が１年間で

$$\Delta\ell_{GSS\ (one\ year)} = \Delta\theta \times R \times 365.25 \simeq 20.4 \ \text{ m} \tag{4.41}$$

だけずれる事を意味している．

静止衛星側の内蔵時計の補正が行われているかどうかわからないが，もし毎秒 100 億分の 2.12 秒の遅れが補正されていれば地上での補正は不要である．ただし，静止衛星の場合，そのデータを送信する事が目的なので，内蔵時計の補正は恐らくはそれ程必要ではないものと考えられる．

4.5.2 地球の公転の遅れ – うるう秒

水星の近日点のズレばかりにこれまでの物理的な興味がもたれてきたが，水星が Newton 方程式の予言よりも少しずれて回転するならば，当然，地球も同様に公転がずれてくるはずである．実は地球の公転のズレもそれ程水星と比べて小さいわけではない．実際，

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \simeq 0.992 \times 10^{-8} \tag{4.42}$$

である．ここで

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \tag{4.43}$$

を用いている．これより周期のずれは

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2-\varepsilon)\eta \tag{4.44}$$

で与えられる．従って１年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ \ Motion} = 0.621 \ \ \mathrm{s/year} \tag{4.45}$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は１９７２年６月から始まりこれまで４０年間に２５秒補正している．従って１年間での観測値は

$$\Delta T^{Obs}_{Orbital\ \ Motion} \simeq 0.625 \pm 0.013 \ \ \mathrm{s/year} \tag{4.46}$$

である．これは式 (4.45) の理論値と完全に一致している．

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [9]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのまま重力付加ポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

4.5.3　うるう秒年代測定

地球の公転がこれまで考えてきたよりも１年間で 0.62 秒遅く太陽の周りを回っていると言う事は当然古い建築物の年代測定に応用する事が出来る．ピラミッドとか石造の古い建物はしばしばその建物のある場所が特別に作られている．例えば，春分の日に太陽がある場所に来るように作られている場合が良くある．その場合，現在の春分の日における太陽の場所と比較すれば，その建築物が建造された年代がかなり正確にわかる事になる．１０００年間で 10.3 分程度遅れているはずだから，割合簡単に年代測定が可能であると考えられる．

4.5.4 月の後退

月も重力付加ポテンシャルの影響を受けている．ここでは，このズレの量が月の軌道の後退と関係している事を示し観測量と比較しよう．実際，月は１年間に 3.8 cm 後退している事が観測されている．

- **月の軌道のズレ：** 月の軌道の場合もズレを表す式はおなじである．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{4.47}$$

である．この式で G と c は重力定数と光速，M は重力中心の質量（ここでは地球の質量），R は軌道半径である．また ω は角振動数で Newton 周期 T_0 と

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} \tag{4.48}$$

と結びついている．月の場合，軌道半径 R_m，地球の質量 M それと角振動数 ω はそれぞれ

$$R_m = 3.844 \times 10^8 \ \ \mathrm{m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \ \ \mathrm{kg}, \quad \omega = 2.725 \times 10^{-6} \tag{4.49}$$

である．これより

$$\frac{\Delta T}{T_0} = 2.14 \times 10^{-11} \tag{4.50}$$

となる．今，月がその軌道からどれだけずれるかの計算を行う．角度のズレの式は

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Delta T}{T_0} = (2-\varepsilon)\eta \tag{4.51}$$

だから，今の場合の軌道のズレ $\Delta\ell_m$ は１周期につき

$$\Delta\ell_m = R_m\Delta\theta \simeq 0.052 \ \ \mathrm{m} \tag{4.52}$$

となる．よって１年間で月のズレは

$$\Delta\ell_{m\ (one\ \ year)} = \Delta\ell_m \times \frac{3.156 \times 10^7}{2.36 \times 10^6} \simeq 69.5 \ \ \mathrm{cm} \tag{4.53}$$

だけ軌道が遅れる事になる．

• 月の後退: 観測量： 月の軌道は楕円なのでこの軌道のズレは後退したように見える部分がある．軌道の式は

$$r = \frac{R_m}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{4.54}$$

で与えられるとして十分である．今，月の場合，離心率 ε は十分小さいので上の式を ε で展開すると

$$r \simeq R_m(1-\varepsilon\cos\theta) \tag{4.55}$$

となる．従って，軌道のズレ Δr は $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ の時を見ると１年間では

$$\Delta r \simeq R_m\Delta\theta\ \varepsilon \simeq \Delta\ell_{m\ (one\ year)}\ \varepsilon\ \simeq\ 3.8\ \ \mathrm{cm} \tag{4.56}$$

となっている．一方，月の後退の観測値 Δr_m^{obs} は

$$\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8\ \ \mathrm{cm} \tag{4.57}$$

と観測されている．これは計算値と良く一致している．

この月の後退の測定はドップラー効果を用いた場合，この精度で可能であると思われる．しかし，月と地球の絶対距離の測定から 3.8 cm を求める事は不可能である．それは光速の精度が

$$c = (2.99792458\ \ \pm 0.000000012) \times 10^8\ \ \mathrm{cm/s} \tag{4.58}$$

であり，８桁の精度しかないのであるが，月と地球の絶対距離 $R_m = 3.85 \times 10^8$ m と比べて $\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8$ cm は１０桁目であるため直接測定は不可能である．

また，もし本当に月が後退しているとしたらエネルギー保存則が局所的にせよ破れる事に対応している．月の運動の全エネルギーを E とした場合，エネルギーのズレ ΔE は

$$\Delta E \simeq -2E\frac{\Delta r_m}{R_m} \tag{4.59}$$

となり，E が負である事から，エネルギーが増える事に対応している．しかも破れているレベル δ が $\delta \sim 10^{-10}$ では物理的に到底容認できる事ではない．

4.6　一般相対論の予言

ここでは一般相対論が物理的観測量として予言している水星の近日点移動の問題を議論して行こう．実際，観測量と比較した場合，一般相対論の予言値はその観測値を再現できない事をここで示すことになる．これまで一般相対論関係の教科書では，水星の近日点移動の観測値が 3 桁の精度で再現できるものとして紹介されている場合がある．しかし実際は観測量を計算する過程で物理的に正当化できない手法を用いているので，そのことに関してもきちんと解説しておく必要がある．

さらに決定的に重要な観測量として，うるう秒の問題がある．水星の近日点が移動するならば，当然，地球もそれに応じた変化をするべきである．この当然の事が，現代技術の進歩，特に正確な時間測定の長足な進歩により，測定されてきた事は意味深いものがある．実際，地球の近日点移動と同じ現象がうるう秒として非常に正確に観測されていたのである．しかも，この地球の公転の遅れの観測量は新しい重力理論によって完璧に再現されるのに対して，一般相対論の予言では全く再現できていない．これは明らかで，一般相対論のこれまでの計算では，軌道が円の場合，そもそも近日点が存在しないため，近日点移動を計算することができないのである．しかし，実際問題としては，近日点移動も観測量と関係するためには周期を計算する必要がある．理論と実験を比較するためには，何が観測量かという問題をしっかり理解することが最も重要である．さらに，この地球のうるう秒の問題に加えて，GPS 衛星の周期のズレの問題もあり，この問題も次章で議論して行こう．

4.6.1　一般相対論と観測量

一般相対論を応用して，実際の観測量と結び付けようとする作業はこれまで沢山なされてきている．ここではその解説を簡単にして行こう．まずは一般相対論が古典力学の方程式に与える影響を評価する事が最も大切である．実は，この記述はブラックホールの予言の問題と密接に関係している．従って，まずはこの一般相対論が予言する高次の効果として，一般相対論による付加ポテンシャルの問題から解説して行こう．

4.6.2　一般相対論による付加ポテンシャル

一般相対論の効果を近似的に無理やり付加ポテンシャルで表すとその付加ポテンシャルを加えた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{4.60}$$

となる．但し，一般相対論の高次項はポテンシャルでは書けないと言われることがある．しかしながら，もしそのことが事実だとしたら，それは一般相対論が内部に深刻な問題を含んでいる事を示している．ニュートン方程式は量子論における期待値として求められているので，すでに観測量と直接に結びつくべき方程式である．従って，この方程式に対する如何なる高次の修正効果も必ず，ポテンシャルの言葉で表現される必要がある．

ここでは，人々が主張している φ 依存性の変化分 (後で，式 (4.66) で与えられている) を再現するようなポテンシャルとして上記のポテンシャル (4.60) は求められている．この時，ニュートン 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3} \tag{4.61}$$

となっている．ここで，L_g^2 は

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2M^2m^2}{c^2} \tag{4.62}$$

と定義されている．さらに新しく角速度 Ω_g を

$$\Omega_g^2 \equiv \omega^2 - \frac{6G^2M^2}{c^2R^4} \equiv \omega^2(1-\gamma) \tag{4.63}$$

で定義しておく．ただし，γ は

$$\gamma = \frac{6G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{4.64}$$

である．

4.6.3 重力崩壊

ここで重要な事は，もし L_g^2 の式で右辺の第 2 項が第 1 項よりも大きくなるとこれは重力的に不安定となることである．r が小さい所では必ず引力が勝ってしまい，角運動量でこれまで崩壊を止めていたのに，もはや止める項がなくなり重力崩壊してしまう．これがブラックホールであり，その条件は

$$R \leq \frac{\sqrt{6}GM}{c^2} \tag{4.65}$$

と表されている．式の細かい係数 ($\sqrt{6}$) はこれまでの計算と異なることはあるが，式 (4.65) が基本的には通常言われているブラックホールの条件と確かに一致している．

• **解が存在しない！：** しかしながらこの場合，式 (4.66) でわかるように，L_g^2 が負であるため軌道の半径 r が負となっていて，これは物理的に意味のある解ではない．従って r が実数では求まらなく，このニュートン方程式には解なしとなっている．ブラックホールの条件 (4.65) を満たさない場合でも，自然界を記述する基本方程式がこのような特異な振る舞いを内包していることは通常ではあり得ない．これはポテンシャル (4.60) におけるニュートン方程式が自然界を記述する方程式ではないことを意味している．

• **相対論的な効果？：** ここで一般相対論の専門家は「式 (4.65) を満たすような場合でもニュートン方程式が成り立つのか？」と質問して来ると思われる．この場合，確かに相対論的な効果が効いてくる可能性がある．ところが一般相対論は運動力学の方程式ではないので，この力学の問題に関しては初めから全く無力である．この場合は別の新しい相対論的な方程式を構築する必要がある．実はそれこそが量子場の理論に基づいた新しい重力理論なのである [2, 3]．

4.6.4 水星軌道の進み

それでは，この一般相対論による付加ポテンシャルはどのような水星の近日点移動を予言するのであろうか？ ニュートン方程式に対する軌道の解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{4.66}$$

と書けており，ここで A_g は

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{4.67}$$

で与えられている．物理的な観測量は前述したように積分量であり，今の場合のニュートン方程式で保存量である角運動量から $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ より，

$$\frac{\ell}{m}\int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\{1+\varepsilon\cos\left(\varphi(1-\gamma)\right)\}^2} d\varphi \tag{4.68}$$

と積分すれば良く

$$\omega T \simeq 2\pi\{1-(2-\varepsilon)\gamma\} \tag{4.69}$$

が直ちに求められる．しかし一般相対論による付加ポテンシャルで引き起こされる効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq -(2-\varepsilon)\gamma \tag{4.70}$$

となり角速度の遅れを与えている．これは，一般相対論の予言値が観測値と矛盾している事を明確に示している．この事より，一般相対論は概念的な困難だけでなく，観測量との比較からも正しい理論ではない事が示されている．

4.6.5　これまでの理論計算の予言

それでは，これまでの人達は何故一般相対論の予言値が水星の近日点移動の観測事実を再現できると思ったのであろうか？その答えは簡単である．これまでの理論計算においては，角度のズレだけで観測量と結びつけられると思い込んだ事によっている．水星の軌道を与える式は

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\left(\varphi\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right)\right)} \tag{4.71}$$

と表された．ここで角度の式には L_g^2 の具体的な式を入れてある．但し，γ は充分小さいとしている．この時，水星の近日点は軌道の式から

$$\varphi\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right) = 0 \tag{4.72}$$

で与えられるが，この場合明らかに $\varphi = 0$ となってしまう．そこで人々は

$$\varphi\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right) = 2\pi \tag{4.73}$$

が近日点を与えるからと言ってこの式から角度のズレを求めたのである．この場合，確かに

$$\varphi \simeq 2\pi + \pi\gamma \tag{4.74}$$

が求められて，水星の近日点移動が $\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\gamma}{2}}$ となっている．そしてこの物理量は観測値を良く再現していた．しかし，この式には数学的に明らかな矛盾点がある．それは，φ は常に $0 \le \varphi \le 2\pi$ で定義されているという事である．φ が 2π を超える事はあり得ない事であり，定義されていない．

さらに近日点の問題において，実際には軌道を一周回って初めて近日点がわかることに注意する必要がある．それはすなわち，軌道を一周まわる操作を必ずしなければならない事を意味しており，一周回ると言う事は結局，周期を計算することに対応している．

4.6.6 一般相対論の物理的観測量

それではこれまでの計算結果 (4.74) に対応する正しい観測量はどのように計算したら良いのであろうか？これはやはり周期に対応する量を計算する必要があり，それは

$$\omega T \simeq 2\pi\,(1 + \varepsilon\gamma) \tag{4.75}$$

と求めればよい．従って，この効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq \varepsilon\gamma \tag{4.76}$$

となり，確かに角速度 ω の進みを与えている．しかしながら，この場合の角速度 ω の進みは離心率 ε に比例しており，水星の近日点も $\varepsilon = 0.2$ であるため，理論値は観測値よりはるかに小さくなる．さらに，GPS 衛星や地球の公転の場合，離心率 ε がほとんどゼロであるため，これだけを取ったとしても，一般相対論は GPS 衛星と地球の観測値を再現できていない事が良くわかるものである．

4.6.7 Feynmanの非公開研究ノート

観測量が $\omega T = 2\pi$ からのズレであるという視点は，過去において何人もの物理屋が検証した事と思われる．そのうちの一人はFeynmanであり，彼は非公開の研究ノートで同じような計算をしている．しかしFeynmanの時代では水星の近日点移動のデータしかなかったので，一般相対論による計算結果が観測値の３分の１でも彼はこの程度でも良いのだろうと思ったようである．実際，観測値自体が非常に古いものであり，またズレの方向が正しい事でもあったので，この段階での結論としては理解できるものである．もしGPSと地球公転の近日点移動のデータがわかっていたら，彼も恐らくは一般相対論を疑った事であろう．ここでこれまでの計算結果を表にまとめておこう．ここで一般相対論としてあげてある数値は式(4.76)による計算であり，Feynmanの予言値もこれと同じである．

近日点移動の観測値と予言値の比較

	水星 $(\Delta\omega/\omega)$	GPS $(\Delta\omega/\omega)$	地球の公転 ΔT
観測値	8.0×10^{-8}	4.5×10^{-10}	$0.625 \pm 0.013 \quad s/year$
新しい重力理論	4.8×10^{-8}	3.4×10^{-10}	$0.621 \quad s/year$
一般相対論	3.3×10^{-8}	0.10×10^{-10}	$0.031 \quad s/year$

このように，観測量をしっかり検証する事は常に重要である事がよくわかる．これまで見てきて明らかになったように，一般相対論はその理論の出発点から問題を含んでおり，さらにその理論模型の予言値は観測値を再現できていない．さらに，次章で見るように量子場の理論による新しい重力理論が発見され，その理論の予言値が観測値を良く再現している．その意味においては，一般相対論は単純に不要な理論となっただけであり，物理学の理論体系からすれば特に影響されることはない事も確かである．

4.7　新しい宇宙論

一般相対論が否定され，通常の場の理論で重力がきちんと理解できるようになったという事は，即，宇宙論に大きな影響をもたらす事は明らかである．この場合，ビッグバンではなくて，全くそれとは異なる宇宙論を考えて行く必要がある．それともう一つ重要な要素がある．それは，光が重力と相互作用するのである．この相互作用は光が真空偏極してその時のフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの４次の項としてでてくるものである．従って，強い重力源のところでは，光は散乱する可能性がある．これらの情報をもとにして，新しい宇宙像を考えて行きたい．

4.7.1　コスミックファイアボール

現在，多くの銀河は全体として膨張している事がわかっているが，しかしいずれは必ず重力による引力により引き合い融合する事になる．それが大雑把に何時であるかは，ある程度は計算出来ると思うが，それ程興味のある物理学上の対象にはならないし，あまり興味が湧く事でもない．しかしながら，膨張が止まった段階で，沢山の銀河は少しずつ融合しながら，より大きな銀河団を作って行く事であろう．そしてそれを繰り返す事により，最終的には，２個か３個の大銀河団になって行き，それらが最後の衝突を起こす事になるであろう．その最終的な衝突で作られた物を「コスミックファイアボール」と呼ぶ事にした．このコスミックファイアボールの状態は非常に熱いものになっている事と考えられ，それは恐らくはこれまで考えられて来たビッグバンの状態の内でバリオンと電子の世界になった状態に似ているものと考えている．従って，この場合は最初にヘリウムまでは作られるであろうが，その後はやはり急速に冷えて行き，重い原子核の生成はこのコスミックファイアボールの段階では，作り難いものであると考えても矛盾は無いものと思われる．

4.7.2　前宇宙の残骸

この新しい宇宙論によると，銀河と宇宙の形成は繰り返す事になる．この宇宙の形成は約１５０億年程の昔に大方作られたものと考えられているが，それではその前の宇宙はどうであったのであろうか？恐らくは，今の宇宙の様に沢山の銀河が融合してコスミックファイアボールになったと考えられるが，何か，その爆発の「残骸」に対応するものがあれば，よりわかり易いと思われ

る．その残骸に対応するものとして考えられるものは，やはり銀河の大構造であろう．この銀河の大構造に関する詳しい内容は，宇宙物理学の専門書を参照していただく事にしたいが，銀河団の空間的分布がある所でかなり偏っているという事である．それはまるで壁を作っている様に並んで見える場合が観測されているのである．これは，最終段階の銀河団の衝突の仕方と密接に関係している物と思われる．

それ以外の前宇宙の残骸としてフォトン・バリオン比があるだろう．この事は，第１章でも議論しているが，この宇宙はフォトンの数がバリオン数より大幅に多いが，この理由は物理学では現在までのところ，解明されていない．この宇宙のバリオン数に関しては，恐らくこれは物理の対象にはならないと思っている．つまり，このバリオン数を持つ宇宙が無限に遠い過去からずっとあったと考えるしか他に仕様がない．しかし，フォトンは何時でも作られるので，増える事は確実である．しかしどの様に増え，そしてどの程度がこの宇宙の外に逃げて行くのかは，まだ良くわからない．いずれは，ある程度の計算は出来るかも知れない．

4.7.3　無限の過去・未来と無限の空間

この新しい宇宙論の描像によれば，無限に遠い過去から無限に遠い未来まで同じ事（銀河と宇宙の生成）を繰り返してきたし，また将来も繰り返す事になる．それでは，無限の過去・未来とは一体何なのであろうか？これこそは，確かに永遠の課題であろう．しかし，はっきりしている事は，人間は有限量しか理解出来ないのである．無限と言葉で言っても，実際は何もわかっている訳ではない．数学者に言わせれば，人間は所詮数える事しか出来ないのであるという事になる．そして，脳科学者に言わせれば，人間の脳はせいぜい１兆個の脳細胞により思考しているから，無限の過去・未来を理解する事は不可能であるという事になる．

さらに言えば，空間的にも宇宙は無限であるとしても，なんら矛盾が無い．これまでは，宇宙が無限であるとしたら Olbers のパラドックにより，星の光を全て足すと必ず無限大の光になってしまうから，宇宙が無限では困ると言う事が考えられてきた．この事も人々がビッグバン宇宙論を支持する一つの根拠でもあった．しかしながら， Olbers のパラドックには基本的な仮定として，星が常に一様に分布しているという事がある．この新しい宇宙論の場合，明らかに一つの宇宙がほとんど閉じた形で成立しており，一様性の仮定が成り立っていない．さらに，光が重力と散乱する事より，必ずしも全ての光が遠方

まで届くわけではない．さらに言えば光速は有限速度であり無限の彼方から光が届くには無限の時間が掛かることになっている．従って，この我々の宇宙と同じ様なレベルの大宇宙が他に無限個あったとしても，別に驚く事ではない．ただ，残念ながら我々にはそれ以上理解できないし，また他の大宇宙との相互作用もほとんどゼロに近いであろうから，物理学の対象にはならない事も確かである．それ以上に，人間には無限の空間と言う事を理解する事が出来ない．どんなに想像したとしても，それは所詮有限の空間なのである．

ある意味で，ビッグバン宇宙論はこの宇宙を有限の空間に閉じ込めたいと言う一種の人間の願望があったように思われる．もう少し強く言えば，人間がわからない事はないと言う一つの驕りがあったように思われてならない．確かに，数学的な「無限」は理解し，それをある程度コントロールする事は可能であるかも知れない．例えば，場の理論模型において，熱力学極限の問題で箱の大きさ L を無限大にする事により物理的な観測量と結びつける事が出来るが，この時 L を無限大にするという意味は，その模型にあらわれるあらゆる長さスケールと比べて L が十分大きいと言っている事なのである．しかしながら，自然界での「無限」はどの様に人間が考えてもそれを理解する事は全く不可能な事である．それは，宇宙では比較するべき長さスケール自体が存在しなく，言い換えればその長さスケール自体が無限であったら，もはや理解不能であるという事は誰でもわかる事である．さらに言えば，これは科学の本質と関係している．科学は観測した事実を理解する事がすべてであり，観測出来ない事を理解しようとする事，あるいは理解したいと思う事は，科学ではない．

4.7.4 新しい宇宙像

これまで見てきたように新しい宇宙像とは，沢山の銀河が形成され全体が膨張し続けて行き，その膨張エネルギーを使い果たしたある段階から今度は収縮に転じて行き，いずれはまたコスミックファイアボールになり，爆発して膨張するという現象を繰り返して行くのであろうという物である．この場合，この宇宙に中心はあるのであろうかと言う疑問を持つのは至極当然である．惑星系も銀河系も全てその中心に重い星が存在しているからである．しかしながら，銀河全体を見るに及び，これはむしろ原子核の多体系に近いのであろうと想像できる．原子核の場合，それは陽子と中性子によって作られている．ところがこの物体には中心となるものが存在していない．そのれぞれの核子が平等の役割を果たしていて，原子系のように，その中心に原子核があるという系ではないのである．今の場合，一つの核子からすると，その原子核の中心が何処であ

るかという設問に対しては，どのようにしても答える事は出来ないのである．但し，その原子核全体を見渡す事が出来れば，その中心が大雑把には何処にあるかが，平均値としてわかる事にはなっている．但し，それぞれの核子が動いている限り，実際問題としてその中心を示す事は原理的に出来ない事である．この宇宙全体の中心の問題もこれに極めて近いものであると考えられる．平均したら，この宇宙の中心がどのあたりにあるのかはもし宇宙全体を見渡す事が出来たら，大雑把には議論出来る可能性はある．しかし，宇宙の一部に存在する観測者からこの宇宙の中心を探る事は原理的に不可能である．尤も，それ以上に，この設問がどの程度物理的に意味があるのかはまだ自分には良くわからない．

4.7.5　宇宙の無限性と背景輻射

この我々の宇宙には 2.7 K の背景輻射が存在している．宇宙にこの低エネルギーのフォトンが一様に分布し存在しているとするとこれはかなりのエネルギーになっている．大雑把に言って，すべての物質が持っている宇宙の重力ポテンシャルエネルギーの数%は存在しているものと思われる．この事自体は別に問題ないが，問題はフォトンが我々の宇宙からその外へエネルギーを持ち去っているという事実である．これがたとえ重力ポテンシャルの数%でも，いつかはすべての重力ポテンシャルエネルギーを持ち去ってしまう事は明らかである．

この現象を解釈する模型として大雑把に言って２つ考えられる．１つ目の模型として，我々の大宇宙は爆発と収縮を繰り返し，その度にこの 2.7 K の背景輻射をこの宇宙外に放射して行くというものである．この事により徐々に重力のポテンシャルエネルギーを失って行き，いずれ全く冷えた状態になって行くというものである．この場合は，背景輻射の放出がどこから出ているのかを説明する必要がある．黒体輻射によると考える場合，本当にそれが可能であると言う事を示す必要があり，現在までのところ，まだ正確な模型計算はなされてはいないのが現状である．

もう一つの模型として，我々の大宇宙と同様な宇宙が無限にあると言うものである．この場合，どの宇宙も爆発と収縮を繰り返し，その度にこの 2.7 K の背景輻射を放出すると言う事は同じである．しかしこの場合，2.7 K の背景輻射は宇宙全体に存在するべきものであり，その温度の多少のずれはあるにせよ，基本的には，この電磁波の海の上に我々の宇宙が存在していると言う事になる．この模型の場合，2.7 K の背景輻射を理解する事はそれ程難しくはなく

なるが，しかし，わからない問題を無限空間に押しやったと言われても仕方がない模型である．

これら以外にも，様々な模型がこれから提唱されてゆく事になると考えられる．これは面白い問題ではあるが，同時にどこまで科学になれるかが，模型の焦点になる事であろう．

4.7.6 無限宇宙 (Mugen Universe)

宇宙全体を考える時に，我々と同じレベルの宇宙が無限個あるべきであるという事が理論的に結論される事が分かる．これは物理ではなくお話であるが，少し解説する事にしよう．まず，最初に，宇宙の階層構造を定義しておこう．それは大雑把に以下のように定義するのが合理的であろう．

$$10^{57}\times\mathbf{protons}\ \Rightarrow \mathbf{star}\quad :\quad 10^{12}\times\mathbf{stars}\ \Rightarrow\ \mathbf{galaxy}\quad :$$

$$10^{12}\times\mathbf{galaxies}\Rightarrow\ \mathbf{universe}\quad :\quad \infty\times\mathbf{universe}\Rightarrow\mathbf{mugen-universe}.$$

ここで一つ問題になる事がある．それは，もし我々の宇宙だけがこの宇宙全体に存在していたとすると，その場合は理論の整合性が取れなくなるのである．

• **一つの宇宙の問題点：** この宇宙が無限の過去から存在したと言う仮定は，至極，合理的である．逆にもし途中で作られたとしたら，どのように作られ，またその元のエネルギーは何であるのかなど，説明がつかない事であふれてしまうのである．従って，無限の過去から現在の我々の宇宙が存在していたと言う事は，現在の物理学においては間違いない事である．この場合，コスミックファイアボールの生成を無限回繰り返してきた事も事実と考えてよい．しかし，そうだとすると問題が生じるのである．それは１回のコスミックファイアボールにおいて，有限のエネルギーがフォトンとニュートリノによって我々の宇宙の外に放出されている．それがたとえ小さな量でも，無限回行なっている限り，我々の宇宙の重力エネルギーは既に無くなっているはずであり，理論的に矛盾してしまう事になる．これを回避するためには，どうしても我々と同じレベルの宇宙が無限個存在していないと困る事になっている．

4.7.7　無限個の銀河の宇宙

宇宙全体には我々の宇宙と同じレベルの宇宙が無限個存在しているという仮定の場合 (Mugen-universere)，フォトンとニュートリノによってエネルギーが失われても問題にならない．それは明らかで，他の宇宙から結局同じレベルのフォトンとニュートリノエネルギーが供給されるからである．従って，この場合，重力エネルギーの問題は解決される．

しかしこの時，その無限宇宙は何故，重力的に安定であるのかが問題になるが，これは無限系を考えると解決される事である．今，簡単のために１次元系を考えよう．無限空間を円で表して，後で半径を無限大にすればよい．この時，今，我々の宇宙がある一点に存在するとしよう．この場合，その右方全体の宇宙から引力を受ける事になる．所が，同じように左方全体の宇宙からも引力を受ける事になっている．円を考える限り，これは両者ともに同じ重力になり，即ち，つり合う事になり，安定である事がわかる．

これは勿論お話レベルであるが，しかし，理論内の整合性は常にしっかり考えておく必要がある事は間違いない．

第5章　物理学の展望

物理学はいくつかの基本法則をもとにして自然現象を理解しようとする学問である．そこで最も重要な役割を果たしているのは，相対性原理である．相対性原理とは，どの慣性系でも，基本法則は同様に成り立ち，いかなる観測量も同じであるというものである．我々の持っている４つの基本方程式は全てこの相対性原理を満たしている．この我々が持っている方程式は「場の方程式」である．ただ，Newton 方程式は質点の座標に対する方程式であるが，しかしこれも Schrödinger 方程式から場の期待値を取る事により Newton 方程式が導かれる事から，全ては場の理論が基本であると考えて良い．その場合，結局 Maxwell 方程式が全ての出発点であり，ある意味ではこれを原理と考えても良いと思われる．

この章は少し数学を使った解説が多くなっており，物理の専門家以外にはあるいは難しすぎると感じるかも知れない．今後の物理の方向を考え，それをより具体的に解説する事が重要であると考えたために，これから物理を学ぼうとしている若手を念頭において解説している．

5.1　量子化

長い間，古典力学が物理学の基本であると人々は思っていたし，それはそれで道理に適っているとも言える．実際，科学の歴史からすれば，これは当然の事である．Newton 力学が出発点であり，量子力学もその古典力学から求められたものである．しかしながら，科学史は別にして，現代の我々が考える物理は歴史にとらわれる必要はない．すなわち，古典力学から出発する必要は無いのである．実際，Maxwell 方程式を見てみると，これはすでに場の理論である事は誰でも知っているし，逆に言えば電場や磁場から「場」という概念が生まれたわけである．この場合，非常に重要な事が Maxwell 方程式から伺う事が出来る．それは Maxwell 方程式は「量子化を知っている」という事である．Maxwell 方程式には逆に言えば古典力学に対応する方程式が存在していない．

これは最初から量子化された方程式なのである．この事は昔からわかっていた事であり，新しい事でも何でもない．しかしながら，この事実がはっきりと認識されたのは，ごく最近の事であると言って良い．

Maxwell 方程式が基本方程式であるとすると，古典力学のハミルトニアンを量子化して Schrödinger 方程式を求める際に使っている式　$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$,　$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ はその根拠を失う事になる．結果的には，古典力学のハミルトニアンから上式の量子化の手法により Schrödinger 方程式が求められるが，しかしだからといって量子化の過程が基本的であるという事にはならない．これまで，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える手法を「量子化の原理」と考えてきたが，明らかにこれは原理ではなくて，結果である事が Maxwell 方程式から良くわかるのである．さらには， Schrödinger 方程式を導出する際に，この置き換えの手法だと状態 ψ が何故あらわれるのかと言う質問に答えられていない．量子力学の講義で学生に教えるのは，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える限り，その微分がなされる状態を用意する必要があり，これが ψ である，という言い訳をして説明するが，しかし，これが取ってつけた様な言い訳であると言う事は，誰でも感じる事である．しかしながら Schrödinger 方程式が実験を良く再現している限り，物理的にはそれ程深刻な問題ではない事も確かである．

5.2　Dirac 方程式の導出 (Dirac の手法)

量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式が Dirac 方程式を非相対論の近似をする事により求められる事は良く知られている．従って，Maxwell 方程式を出発点 (原理) にして，Dirac 方程式が導けられたらこれは最も合理的なものとなる．そして，実際この事が可能なのである．但し，もう一つ条件をおく必要があり，それがゲージ不変性である．Maxwell 方程式がゲージ不変になっているので，電磁場がフェルミオンと相互作用する時，全 Lagrangian 密度がゲージ不変である事を要求すると，確かに Dirac の Lagrangian 密度が決定される事がわかっている．

Maxwell 方程式を原理にして Dirac 方程式を導く事がどの様にしたら可能であるかを以下に議論して行こう．しかし，その前に Dirac がその方程式を導いた直感的な方法について解説しよう．

5.2.1 Dirac 方程式の直感的導出法

Dirac 方程式は相対論的なフェルミオンを記述する理論であり，現在までのところ，最も信頼できる理論体系の一つである．結局，相対性理論 (Lorentz 変換) と矛盾しない理論が正しいものである限り，基本的な方程式は相対論的な方程式であるべきである．

Dirac はまずエネルギーと質量に関するアインシュタインの関係式 (分散関係式) から出発した．$E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2$ である．ここで，今考えているのは，質量 m を持ち，その運動量が $\boldsymbol{p}$ である質点であり，相互作用は仮定されていない．この時，Dirac はこの分散関係式を因数分解する事にした．それはエネルギーの１次式を得たかったからである．Dirac の因数分解は次のようになされた．

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 - m^2c^4 = (E - c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} - mc^2\beta)(E + c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta) = 0 \tag{5.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\alpha}$ と β は４行４列の行列であり，具体的には

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と書かれていて，ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列と呼ばれている２行２列のエルミート行列であり，次のように書かれている．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って，Dirac 方程式は因数分解されたうちの一つを取れば十分なので，

$$\left(-i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta\right)\Psi(t,\boldsymbol{r}) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \tag{5.3}$$

となり，これがフェルミオンを記述する Dirac 方程式である．この時，運動量とエネルギーを微分演算子にする通常の手法を採用している．なお，電子がクーロンポテンシャル中を運動する場合，すなわち水素原子の場合は Dirac 方程式が

$$\left(-i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta - \frac{e^2}{r}\right)\Psi(t,\boldsymbol{r}) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \tag{5.4}$$

と書かれている．この場合のエネルギー固有値は実験を見事に再現している．

5.3 Dirac 方程式の新しい導出法

量子化として知られてきた式

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.5}$$

がその根拠をなくした場合は，Dirac が導出した手法は使えなくなる．科学史的には勿論問題ないが，しかし他のもう少ししっかりした導出法を考える必要がどうしてもでてくるものである．以下に解説する手法は，Maxwell 方程式を指導原理として，さらにはそこで見つかったゲージ不変性を原理として利用して行くものである．基本的には，電磁場と Dirac 場が相互作用している Lagrangian 密度をゲージ不変である事を要求する事によって求めて行くと言うものである．以下においては，再び $\hbar = 1$，$c = 1$ の表示に戻る事にしよう．

5.3.1 電磁場の Lagrangian 密度

出発点は Maxwell 方程式である．これを基本原理とする．この Lagrangian 密度を書くと

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.6}$$

ここで A^μ はゲージ場であり，$F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{5.7}$$

と書かれている．この $F^{\mu\nu}$ は計算してみれば直ちにわかる事だが，実は電場と磁場そのものである．例えば，F^{01} は

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x} = E_x \tag{5.8}$$

であるから，電場をあらわしている．また，F^{12} は

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial y} = -B_z \tag{5.9}$$

であるから，磁場をあらわしている．また，Lagrange 方程式から

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu \tag{5.10}$$

が求まり，これはベクトルポテンシャル A_0，$\boldsymbol{A}$ で書いた Maxwell 方程式そのものである．

5.3.2 ゲージ不変性

上記で求めたLagrangian 密度の第２項 $-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換に対して不変である.

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.11}$$

ここで $\chi(t,\boldsymbol{r})$ は任意の関数であり，確かに $-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は，ゲージ変換してもその後 $\chi(t,\boldsymbol{r})$ には依っていない．ところが，Lagrangian 密度の第１項 $gj^\mu A_\mu$ はゲージによってしまう．これは明らかで，ゲージ変換に対して

$$gj^\mu A'_\mu = gj^\mu A_\mu + gj^\mu\partial_\mu\chi(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.12}$$

となり，ゲージ変換の後のLagrangian 密度は $\chi(t,\boldsymbol{r})$ という非物理量に依ってしまい，ゲージ不変ではない事がわかるのである.

5.3.3 ゲージ不変な Lagrangian 密度

それではゲージ不変なLagrangian 密度は作ることが出来るのであろうか？それは可能であり，以下に解説して行こう．まずは物質による電流密度 j_μ であるが，$\psi^\dagger$ と ψ で４元ベクトルを作ろうとすると，数学的にこれはどうしても ψ が４個の成分を持っていることが必要条件である事がわかっている．この場合，

$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}\\ \psi^\dagger &= (\,\psi_1^\dagger \quad \psi_2^\dagger \quad \psi_3^\dagger \quad \psi_4^\dagger\,)\end{aligned}$$

として，これから $\psi_i^\dagger\psi_j$ を作ると１６個あるわけだが，これらは，$\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma_0$ と定義した表現を使うと Lorentz 変換に対する性質から

$$\bar\psi\psi \text{ (scalar)}, \quad \bar\psi\gamma_\mu\psi \text{ (vector)}, \quad \bar\psi\gamma_5\psi \text{ (pseudo} - \text{scalar)}, \quad \bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi \text{ (axial} - \text{vector)}$$

それにテンサー $\frac{i}{2}\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi$ に分類される．但し，γ_μ はガンマ行列である．Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現を具体的に書くと，

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{5.13}$$

と書ける．この事より，フェルミオンの４元ベクトルは確かに作られ，

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{5.14}$$

と書けるのである．

それでは，ゲージ変換をした時にゲージ不変を破る項をフェルミオンに対応する Lagrangian 密度を入れる事により消去する事が出来るのであろうか？答えは簡単で次のような項 $\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi$ を付け加えれば良い

$$\mathcal{L} = C_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.15}$$

ここで C_1 は定数であり，また j_μ は $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ と置き換えてある．この時，ゲージ変換はフェルミオンの部分の位相も変換させる事にして

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi, \qquad \psi' = e^{-ig\chi}\psi \tag{5.16}$$

と変換すると

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\partial_\mu\gamma^\mu\psi' - g\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'^\mu - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \tag{5.17}$$

となり，χ にはよらない Lagrangian 密度が得られている．但し，χ による項を打ち消す合うために $C_1 = i$ と取っている．この Lagrangian 密度に質量項を足す事はゲージ不変性を壊す事にならないので最終的な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.18}$$

となり，質量 m のフェルミオンがゲージ場と相互作用する Lagrangian 密度が求められた事になる．ここで，質量 m と結合定数 g は実験から決定されるべきものである事は言うまでも無い．

5.4　古典場の理論

Dirac 方程式が場の方程式として基本原理から導かれた事は非常に重要である．これは第一量子化と言われて来た式

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.19}$$

が原理ではないと言う事を意味している．この事は実は色々なところで考え直しを要求してくる．特に，これまで Klein-Gordon 方程式と呼ばれている

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \tag{5.20}$$

はスカラー場に対する方程式である．この方程式は

$$\begin{aligned} E^2 - \boldsymbol{p}^2 + m^2 \quad &= \quad (-\hbar^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \end{aligned}$$

という第一量子化による置き換えにより得られたものであるが，この式がもはやその根拠を失う事になる．すなわち，Klein-Gordon 方程式は基本方程式ではあり得ないのである．この事は，結局，基本原理としては常に場の理論から出発するべきであると言う事を意味している．

5.4.1　実スカラー場

実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \tag{5.21}$$

であるが，これは不思議な方程式である． Schrödinger 方程式の場合，波動関数 ψ は常に複素数である．これは Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{5.22}$$

を見れば明らかで，ψ^* に対する方程式は

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H\psi^* \tag{5.23}$$

となって，異なる方程式になっている．この事は，確かに ψ と ψ^* が独立である事を示している．

• 非相対論極限：　ところが，Klein-Gordon 方程式における ψ は実スカラーで良いことが方程式から明らかである．しかし，この場合本当に実スカラーで良いのであろうか？ここで，数学と物理学の違いが顕著に現れてくると思われる．数学的には勿論，実スカラーで良い事は，誰でもチェックできる事である．しかしながら，それではこの粒子の運動がゆっくりである時に非相対論の極限である Schrödinger 方程式の解と一致しなくて良いのであろうか？良く知られているように， Schrödinger 方程式の解は常に複素数である．それは，解が常に

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = e^{-iEt}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{5.24}$$

と書く事ができ，これは実数になる事はあり得ないからである．従って，単純に Klein-Gordon 方程式の解 ψ を実スカラーと取ってしまうと非相対論の極限が存在しない相対論の方程式と言う事になってしまい，理論的な整合性がない事になる．

• 自由粒子の解：　それでは実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は自由粒子の解を持っているのであろうか？時間によらない方程式をみると

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(\boldsymbol{r}) = E^2\phi(\boldsymbol{r}) \tag{5.25}$$

となっている．これは， E^2 に対する固有値方程式となっている．従って，この場合，基本的には Schrödinger 方程式の場合と全く同じである．さらには，この方程式は運動量演算子と可換であるため，固有値問題としては，運動量の固有関数にもなっているべきである．すなわち，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5.26}$$

を方程式の物理的な解として採用するべきである．ここで， $\omega = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}$ であり，また ϕ の次元を考えて $\sqrt{\omega}$ を分母に入れてある．従って，$\psi(t, \boldsymbol{r})$ は

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5.27}$$

となっている．

5.4.2 複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式

π 中間子はクォークと反クォークからできている複合粒子である．この π 中間子のスピンはゼロであり，ボソンに対応している．この場合，この π 中間子の重心運動を記述する方程式は何であろうか？結果的には，これはほとんど Klein-Gordon 方程式と同じ方程式により記述されるものと考えられる．理由は簡単で，クォークと反クォークから作られているので，これはクォークと反クォークの波動関数をぞれぞれ掛けたもの (直積) になっている．その重心運動を Dirac の波動関数で書き表したら，恐らくは Klein-Gordon 方程式と同じ形の方程式によって記述されるものと考えられる．そして，重心運動の解は

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5.28}$$

という形で書かれるものと思われる．

5.4.3 電磁場とスカラー場の相互作用

基本粒子としてのスカラー場が存在していたとしたら，この粒子は電磁場とどのような相互作用をするのであろうか？Maxwell 方程式から出発して，ゲージ場 A_μ と結合出来るためには，どうしても 4 成分のスピノルである必要があった．従って，そのままでは，スカラー場が電磁場と相互作用する形を作る事は出来ないのである．当然の事であるが，スカラー場は他のスカラー場としか結合できない事は明らかである．

5.4.4 ゲージ場とスカラー場の相互作用

Maxwell 方程式から離れて，方程式のゲージ不変性だけを原理にすれば，スカラー場とゲージ場の相互作用を表す Lagrangian 密度を作る事は出来る．自由なスカラー場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \tag{5.29}$$

とした時，この上式にミニマル変換をすれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu - igA_\mu)\phi^\dagger\right]\left[(\partial^\mu + igA^\mu)\phi\right] \tag{5.30}$$

となり，ゲージ不変な Lagrangian 密度が求められた事になっている．しかしながら，現在までの所このように電磁場と相互作用する基本粒子としてのボソンは実験的に見つかっていない．その意味では，我々がこれまで築き上げてきた場の理論の中に入れるべき必要が何処にも無く，従って考える必要も無いものと思われる．

5.4.5　Higgs 機構とその問題点

このスカラー場の問題は Higgs 機構と密接な関係がある．Higgs 機構とは，まず，複素スカラー場を用意して，その複素スカラー場間に対称性を自発的に破るために導入されたポテンシャルを同じように考える．次に，変数変換とある種の近似を実行して，ゲージ不変性を Lagrangian 密度の段階で破ってしまうのである．そうするとゲージ場が質量を獲得して，弱い相互作用の模型が上手く作れて実験と良く合う理論体系にする事が出来たというものである．この描像には大きく分けて３つの深刻な問題点（間違い）がある．

(1) 実スカラー場の導入

最初に複素スカラー場を用意するのだが，対称性を破ると称して，この複素スカラー場を２つの実スカラー場に直してしまい，それぞれが自由度を持つという描像を提案するのである．しかし，これがおかしい事は上記の議論で明らかである．

(2) Higgs ポテンシャル

この Higgs 機構においては，自発的対称性の破れの問題と関係して Higgs ポテンシャル

$$U(\phi) = u_0 \left(\phi^\dagger \phi - \lambda^2\right)^2 \tag{5.31}$$

という良くわからないポテンシャルを導入している．ここで，u_0 と λ は任意の定数である．これはスカラー場間に働く相互作用なのだが，これがどこから来たのか全くわからない．このポテンシャルを良く見てみると結局これは自己相互作用である．自分自身で相互作用してポテンシャルを生み出しているという事は，一体物理的にどの様な現象になっているのだろうか？これは，現代の場の理論では理解できる事ではない．

(3) ゲージ不変性の破れ

Higgs 機構における最も深刻な問題点が，このゲージ不変性を勝手に破ってしまった事である．これは結局，自発的対称性の破れの理解が不十分であった事と関係している．どの系でも対称性が自発的に破れる事などあり得ないが，Higgs 機構ではただ単に変数変換をし，さらに近似をする事により手でゲージ不変性を破るような定式化を行ったのである．ゲージ場が質量を獲得してしまったら，これはゲージ不変性を破ってしまい，理論的な困難は深刻なはずだったのに，何故か人々はこの理論を受け入れて現在に至っている．

5.4.6 将来の展望

何故，人々が弱い相互作用の模型を考えるに際して Higgs 機構を取り入れたのであろうか？まず，弱い相互作用の理論として Fermi 理論が受け入れられていたが，これは結合定数の次元が質量の２乗分の１である４体相互作用の形をしていて，これだと２次の摂動論を行うと２次発散が出てきてしまい，これでは整合性が保たれない事になっている．一方，実験の方から弱い相互作用において力を媒介している重いボソンの存在が示唆されていた．このため，何らかの形でこの重いボソンを考慮した理論体系を考える必要に迫られていたのである．その際，単純に重いボソンを交換する相互作用を考えた場合，これはゲージ理論ではないので，繰り込みが不可能であると人々は思ったのである．実際には逆で有限質量のベクトルボソン系に対しては，物理的な観測量に発散はなく，従って繰り込みは不要である事がわかっている．この事より弱い相互作用の理論はゲージ理論から出発しなければ，全く問題のない健全な理論体系が作られるのである．

• **Higgs 粒子の実験結果：**　２０１４年の現在まで，Higgs 粒子の発見は１事象を除いて不成功である．さらに，この１事象のエネルギー領域において，別のグループによる追実験では Higgs 粒子を観測する事はできてはいない．W-ボソンの発見の時は，W-ボソンの存在を示す「複数のイベント」が見つかったと CERN は報告したのである．一方において，Higgs 粒子の探索実験では弱い相互作用の崩壊パターンは Higgs 粒子の存在を仮定しなくても理解できるかどうかで実行されるべきである．実際，全ての実験データは Higgs 粒子がなくても十分理解される事を示している．

5.5　量子色力学 (QCD) の問題点

強い相互作用を記述する理論は量子色力学 (QCD) である．これはクォークとグルオンの相互作用による SU(3) カラーの非可換ゲージ理論である．６種類のクォークが存在し，それぞれが３つのカラー自由度を持っていて，８つのカラー自由度を持つグルオンにより相互作用している系である．バリオンは３つのクォークから出来ていて，メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である．この模型は基本的には正しいと考えられる．ここでは詳しい記述はしないが，その模型の持つ良い点と問題点を議論したい．まずは Lagrangian 密度を書いて，その性質を簡単に見て行こう．QCD の Lagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \tag{5.32}$$

と書ける．ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \tag{5.33}$$

で与えられ，グルオン場は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \tag{5.34}$$

であり，この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \tag{5.35}$$

を満たす．また，C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている．この Lagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である．

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with} \quad \chi = T^a\chi^a \tag{5.36}$$

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a \tag{5.37}$$

ただし，χ は，$\chi = \chi(t, \boldsymbol{r})$ の任意の関数であるが，無限小であるとする．

ここでこの Lagrangian 密度の詳細を議論する必要はない．大切な事は，この Lagrangian 密度は確かにゲージ変換に対して不変であるが，しかし，クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ はゲージ不変ではなく，これらのカラー電

荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないと言う事実である．これは非常に重大な事を物理的には意味している．すなわち，クォークとグルオンは観測量にはならないという事である．実際，クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが，これは保存量にはなっていない．つまり，クォークのカラー電荷は時間によってしまい，物理的な観測量にはならない事を意味している．そして，それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものであり，クォークは動力学的に閉じ込められているわけではなく，運動学的に閉じ込められているので，その閉じ込めは絶対的なものであると言える．

5.5.1 自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性

クォークとグルオンのカラー電荷がゲージに依ってしまう事，およびクォークとグルオンのそれぞれの自由 Lagrangian 密度がゲージ依存である事の証明はそれ程難しくはない．しかしこれは明らかに非常に重要な事である．ところが，この事を指摘している教科書はあまり知られていない．実際，印牧誠司氏の修士論文 (2007 年) がこの自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性を最初に明らかにした論文のように見える．これが本当だとしたら事態はかなり深刻である事を意味している．但し，この問題を科学史的に調べたわけではなく，この辺のところは良くわからない．

5.5.2 摂動論が定義できない！

クォークとグルオンの自由場が存在しないという事実は非常に重大であり，理論的な模型計算に大きな影響を及ぼしてしまう事になる．結論を先に言うと，この模型は全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に，解く方法が存在しない事が証明される．

• **QCD の摂動論：** QED もそうであったように，４次元量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている．それ以外解けない事が最も大きな理由である．この摂動論の場合，その基本戦略は全ての観測量を自由場の言葉で書きたいと言う事である．例えば，QED の場合は，自由電子の状態と自由フォトンの状態の言葉で全ての観測量を表現している．ところが，QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため，QCD における観測量は何かという事が問題になってくる．自由クォークの状態が存在しない限り，物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である．これは摂動

論が使えないためどんな物理量が計算できるのかわからないと言う事を意味しており，実情は想像以上に深刻であり，全くのお手上げ状態になっている．実際，QCD における理論的な発展は，この３０年間ほとんどないのである．

• **漸近的自由**：　この QCD において，これまで摂動論による計算が行われてきたが，実は QCD の場合，自由クォークは存在しないし，自由グルオンも存在しないのでこれでは摂動論の計算は定義できなかったはずである．この自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は実験事実ではあるが，実は理論的にもそれらが観測量にはなっていない事は，良く知られている事実である．実際，自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は理論と実験の整合性もしっかり合っていて，これは疑う余地もなく QCD が恐らくは正しい理論体系であるという事を示している．

従って，しっかり考えれば，QCD の摂動論計算は，およそ直感的に不可能な事である事ぐらいは誰でもわかる事である．しかし，現実には，QCD の摂動論の計算が行われて,「漸近的自由」と言う事を「発見」してノーベル賞を受賞した人達がいるほどである．この「漸近的自由」の場合は，２重に間違えている．一つは QCD の摂動論が定義できないのに，これを実行してしまった事である．さらに，その計算の中でも「one loop」の計算は繰り込みに不要なのにそれを実行して繰り込み群方程式という仮想の方程式を発見しまったのである，このため仮想運動量の大きなクォークはほとんど自由であるというわけのわからない事を主張したのである．

5.5.3 QCD における観測量

それでは，何故 QCD が正しい理論体系であると信じているのであろうか？これにはきちんとした理由がある．最大の理由は実験的なサポートである．これは一体どういう事であろうか？クォークが観測量では無いのに，どうしてクォークの事がわかるのであろうか？これは実は簡単で，クォークには電気的な電荷があるからである．例えば，u クォークはその電荷が $\frac{2}{3}e$, d クォークは $-\frac{1}{3}e$ であるとして実験的に矛盾が無い．すなわち，クォークの電磁気的なカレントは保存量となっており，従って電磁気的なプローブで陽子を研究すれば，確かにクォークが反応して様々な物理的な観測量を出しているのである．

• 陽子・中性子の磁気能率： クォーク模型によるバリオンの電磁気的な模型計算はこれまで数多く実行されている．なかでも，核子の磁気能率は実験と理論が見事に合う例として，しばしば引用されている．そして，その物理的な根拠は十分しっかりしているのである．バリオンの構造が QCD の模型により全く解かれていないのに，どうして磁気能率だけは理論的に信頼できる計算ができてしまうのかと言う疑問に対して，答えは簡単である．例えば，陽子の磁気能率は大雑把に言って

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \sum_{i=u,u,d} e_i \boldsymbol{\sigma}_i = \mu_0 e \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{u_1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{u_2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_d \right) \tag{5.38}$$

と書く事が出来る．ここで， $e_u = \frac{2}{3}e$ と $e_d = -\frac{1}{3}e$ は u クォークと d クォークの電荷を表している．μ_0 は典型的なスケール量を表し，例えば非相対論ならば，クォークの質量を m として $\mu_0 = \frac{1}{2m}$ となっている．いずれにせよ，この模型で陽子と中性子の磁気能率を計算すると

$$\mu_p = \mu_0, \qquad \mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0 \tag{5.39}$$

となり，この 2 つの比を取って実験と比較すると

$$\left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right)_{theory} = -1.5, \qquad \left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right)_{exp} = -1.46 \tag{5.40}$$

となり，恐ろしいほど良く一致している．この理由は明らかで，磁気能率が動径部分の波動関数に依っていない事が最も重要な事である．このため，クォークが陽子内部でどの様な運動をしていようが，基本的に言って，クォークのスピンの性質に支配されているので，陽子と中性子の磁気能率の比は非常に上手

く記述されているのである．そして，この事は確かにクォーク模型が正しいと考えて良い事を示している．

• **クォークのカラー数：**　クォークのカラー電荷が保存量ではない事から，QCD 相互作用の取り扱いの難しさについて述べたが，それではクォークのカラー数はどの様にして検証されたのであろうか？これは再び電磁的な相互作用を用いている．良く知られている

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{all hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{5.41}$$

の実験値からクォークのカラー数が3である事がわかる．それは，この比にはクォークのカラーの自由度が現れるからである．従って，クォークの動力学を研究する事は，非常に難しいのであるが，クォークのある種の性質は電磁気的は方法で調べる事が出来る事を示している．

• **$e^+e^- \to$ Jets の現象：**　実験的に $e^+e^- \to$ Jets の現象が知られている．これはQCD でよく理解できるのであろうか？この実験の際，ハドロン内部において $e^+e^- \to q\bar{q}$ が起こっている事は確かであろう．この過程は電磁気的なものなので，正確にわかっている．ところが，その後どうなるのかと言う事が全くわからない．クォークがハドロンから外に出て自由になると言う事が物理的に記述できないからである．それは既に議論したようにクォークのカラー電荷がゲージによるため観測量でないと言う事と関係している．

それではこの Jet の現象はどのように理解できるのであろうか？実験的にもクォークが大きな運動量を瞬間的に得た事は事実である．しかし，クォークは自由になれない．従って，ハドロンになって行くしか他に仕様がないのである．生成されたハドロンは反応過程においてエネルギーと運動量の保存則だけは充たしている必要がある．よって，これは同じ方向に基本的にはハドロンが生成された現象，すなわち Jet の現象が観測されたのであると考えられる．実験的には2 Jet が主であるが，3 Jet や4 Jet も観測されている．ハドロン内部でクォーク同士がどのような相互作用をするのかの具体的な描像が作れていない段階では，これ以上の物理的なコメントが出来ない．特に，摂動論が定義できていないからには，直感的な描像が作りきれないのである．

5.5.4 QCD 理論計算の展望

それでは，QCD の理論計算はどのようにしたら良いのであろうか？これは随分と考えて来たが，現在までの所，信頼できる計算がどの程度可能であるかについては，あまり明白な事はわからない．一つはっきりしている事は，全 Hamiltonian はゲージ不変であるという事である．従って，例えば J/ψ のような重いクォークにより構成されている中間子の場合，この全 Hamiltonian を適当なベースを選んで対角化してしまえば良いと考えられる．しかし，クォークが観測量ではないのに，その質量が重いとか軽いと言う事が物理的に意味があるのかどうか良くわからない．しかし，質量はパラメータであるから，適当な値を考える事はそれなりに意味はあるとは考えられる．それで，ともかく全 Hamiltonian の対角化の計算がどの程度大変であるかは，まだ良くわからないが，少なくとも適当なゲージ固定をして，クォークのカラー電流が保存するように選び，そのゲージ固定の範囲で計算を実行すれば，概念的な困難は避けられる気がする．ただ，単純に計算してみても，Hamiltonian を対角化するために必要なベースは非常に大きな数になってしまい，例えば，$10^8 \times 10^8$ の行列の対角化が可能になれば，ある程度信頼できる J/ψ の質量が計算できると考えられる．しかし，これらは全て今後の課題であり，計算機による数値計算を工夫する事が出来れば，それなりに意味があり，面白い結果が期待できる問題であるとは思う．

5.6　場の量子論 – 無限大と観測量

相対論的場の理論を考える時，場の量子化がどうしても必要になる．場の量子化とは何かという質問に対しては，場を演算子として扱う事であると答える事になる．また，場の量子化は何故必要なのかという疑問に対しては，電磁場の量子化は実験の要請であると答える事になる．実際，前述したように水素原子において電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ 状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移が起こった時に，光が放出される．これは観測事実であり，この事は真空から光が作られている事を示している．通常の量子力学では，粒子の生成は出来ないが，ここでは光の生成を考慮した理論を作らざるを得ないのであり，それが「場の量子化」である．この時，場自体がオペレータになる必要があり， $c-$ 数関数ではなくなっている．このため，場の量子化という言い方をしているのである．従って，場の量子化は実験を再現するために導入された理論体系である事は間違いないものであり，実際，実験をよく再現している．

ところが，一度，場の量子化が行われると様々な新しい現象が計算上現れてしまう事がわかる．その内の一つが，自己エネルギーの発散である．場の量子化により，電磁場が生成されたり消滅されたりするわけだから，電子が自分自身で光子を放出して直ぐに吸収するという過程が計算上出てきてしまい，これを計算すると Log 発散になっている事がわかるのである．朝永達が提唱した繰り込み理論が水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトの実験値を見事に再現する事が出来て，繰り込み理論の勝利となったと言う事が現代の繰り込み理論に対する基本的な評価である．

しかしながら，この Lamb シフトの問題はそう簡単ではない．それは，この Lamb シフトの計算は Bethe による非相対論的な取り扱いで行われているが，この計算には Log 発散があり Bethe は適当にそのカットオフを電子の質量に取ったのである．そしてそれがまた偶然，実験と良くあってしまったが，しかし，計算結果が Log 発散を持っている事はその取り扱いにどこか問題点がある事は明らかである．現在のところ，その発散の解決方法は分かっていない．

さらに言えば，自己エネルギー自体は観測量ではないので，その発散を気にする必要があるのかどうか疑問である．自然を理解する事を第一義的であるとするならば，自己エネルギーが発散しても特に困る事はないのである．

5.6.1　ゲージ理論信仰の崩壊

現在までの所，繰り込み理論は正しいものであると考えられている．しかしながら，最近になって，フォトンの真空偏極に関して重大な見過ごしがあった事がわかっている．このフォトンの真空偏極は元々２次発散があって，この項は手で捨てていたのである．その場合，捨てる条件として人々は「ゲージ条件」をつけたが，これが繰り込み理論の理論体系をかなり不明瞭にしていた最も重要な原因であった．この真空偏極テンサーに対する「ゲージ条件」は，実は数学的に成立していない事がわかったのである．この基本的な間違いは単純に数学的なものであり，積分において無限に発散する場合，変数変換を単純にするととんでもない間違いを犯してしまうという，極めて初歩的なミスであった．

この「ゲージ条件」とは，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対して $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)=0$ が成り立つべきであるという要請である．これはもともとはＴ行列にあらわれている偏極ベクトル ϵ^μ に対して $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$ という変換に対して不変であるべきであるという要請をおく事に対応している．このことに対応して，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対する式が得られているのである．ところがどのように計算しても，この式を満たす事は有り得ない事が，実際に $\Pi^{\mu\nu}(k)$ を積分により求めてみればすぐにわかる事である．どうしてこのような間違いが起こったのであろうか？それは，無限大になる積分において不用意に変数変換を行うと全く間違った答えを得てしまうと言う事である．簡単な実例を挙げる前に，どうして上式が「証明」されたのかを示そう．まず，$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)$ を

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right)\gamma^\nu\right] \tag{5.42}$$

と書き直す事が出来る．この時，第１項において $q=p-k$ の置き換えをする．この時，確かに

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{q}-m+i\varepsilon}\gamma^\nu\right] - ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\gamma^\nu\right] = 0$$

が「証明」されたと言うものである．この証明を現代の物理屋も含めてずっと長い間人々は信じて来たが，数学者はこれをみて吃驚して「物理屋はのん気で良いね」と感心していたものである．上式のどこが間違いなのか？以下に実例を示しながら解説しよう．まず，次の積分量

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x-a)^2 - x^2\right) dx \tag{5.43}$$

を計算しよう．ここで $x' = x - a$ と置き換えると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x'^2 dx' - x^2 dx \right) = 0 \tag{5.44}$$

となり，積分値はゼロであるように見える．ところが，これをきちんと積分すると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x-a)^2 - x^2 \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 - 2ax \right) dx = a^2 \times \infty \tag{5.45}$$

となり，無限大である．どこで間違えたのかは，高校生がすばやくわかる問題であろう．正しく計算するには

$$Q = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left((x-a)^2 - x^2 \right) dx = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[\int_{-\Lambda-a}^{\Lambda-a} x'^2 dx' - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} x^2 dx \right] = \lim_{\Lambda\to\infty} 2a^2\Lambda$$

とするべきであった．確かに，この積分は無限大であることは明らかである．この事は無限大になる積分で変数変換を不用意にしてはいけないという当然の事が原因であったのである．

5.6.2　次元正則化

さらに悪い事に，'t Hooft 達がその論文で次元正則化という一種奇抜なアイデア (運動量空間での積分の次元を 4 から $4-\epsilon$ にした，但し，ϵ は無限小量) を提唱したのだが，これが数学の公式を間違えて使用した理論であるために，２次発散が消えていたのである．特に数学では，運動量積分 d^4p を d^Dp (但し，$D = 4 - \epsilon$) とした時，積分値は ϵ がゼロの極限で元の積分値に戻る事が当然の事として必要である．しかしながら，次元正則化では ϵ をゼロに持って行く極限を取っても元に戻ってくれないのである．このように，現在ではこの次元正則化は全く役には立たない事がわかっている (加藤洋志氏，修士論文 2010 年)．しかしながらゲージ理論のみが繰り込み可能であるという「信仰」はこのフォトンの真空偏極に起因している．自己エネルギーに対する理解不足から２次発散を捨てる物理的な理由が見つからなかったために，どうしてもゲージ不変性に頼むしか他に方法が無かったのであろう．

5.6.3 朝永の推論

このフォトンの自己エネルギーを調べていたところ，朝永振一郎の著作集で彼は「フォトンの自己エネルギーはゼロである」という事を明解に主張している事がわかった．しかし彼はそれを論文にはしていなく，何処まで問題の重要性を把握していたかは分からない．しかし，彼がもっと強くこの問題を主張していたならば，ゲージ理論信仰はこれ程までには続かなかっただろうし，もっと早い段階で疑問を持った物理屋が数多くでてきた可能性はあるだろうと思われる．ゲージ理論のみが繰り込み可能でまともな理論であると言う，極めて馬鹿げた通説がこれまでの場の理論の発展を阻害してきた．実際，例えば，重力理論をゲージ理論で構築しようとすると不可能であるため，人々は一般相対論を受け入れるようになったと思われる．また，Weinberg-Salam 理論においては，最初にゲージ理論で出発したから繰り込み可能であると信じて，途中でそのゲージ不変性を破っても，その論理的飛躍を疑う事は誰もしなかった．半世紀前にゲージ理論信仰が崩壊していたら，場の理論の発展も全く違った形で実現されたであろう事は疑いなく，この事が残念で仕方がない．現在ではゲージ理論のみに奇妙な発散があり，難しい理論になっていると言う事がはっきりして来ている．それはレダンダントな変数を持つ場合，その処理が常に難しいと言う事に関係している．

この「朝永の推論」に関しては，Heisenberg が１９３４年に書いた真空偏極の論文を読む事により，朝永がどのようにして繰り込み理論を考えるに至ったかの道筋がある程度推測できるものである．Heisenberg は Dirac が空孔理論を発表した１９２８年からまだ数年しかたっていない段階で，すでに電磁場により負のエネルギー粒子が励起される過程を計算している．この論文は大変面白い論文ではあるが，しかしこれは繰り込みと矛盾しており，さらに言えば実験との整合性がない理論となっている．それは基本的には「負の粒子を詰めた真空」に対する場の理論的な理解が当時は不十分であった事に関係している．すなわち，Heisenberg 達は場の理論の真空をあたかも誘電体のようなリアルな物質状態と考えていたのである．逆に言えばこれを出発点として，朝永はフォトンの自己エネルギーはゼロである事を正確に把握していたものと考えられるのである．Heisenberg 達の計算は具体的な式変形としては間違っているわけではないと言う事実から，それではフォトンが常にその質量がゼロの粒子である事が記述できないという事実を認識するに至ったものと考えて間違いはないと思われる．これらの事が正確にわかっていれば，確かに「朝永の推論」は自然な結論である事が良くわかるものである．

5.7　繰り込み理論 (フェルミオン)

量子電磁力学 (QED) において興味ある物理的な過程を計算しようとするとどうしても摂動論を使わざるを得ない．場を量子化した後の物理系は無限自由度の多体系になっているのである．従って，QED においても厳密解を求める事は最初からあきらめざるを得ない程，難しいし複雑である．

ここでは摂動論の詳細について解説する事は出来ないし，また必要もないと思う．場の理論の摂動論は良く書かれた教科書がいくつか出版されているので，そちらを参考にして頂きたい．但し，ここで場の理論の摂動論形式に関して一つ重要な事をコメントしておきたい．それはこの場合の非摂動 Hamiltonian に関するものである．場の理論での摂動論は常に非摂動項として，自由粒子の Hamiltonian を取っている．この事は至極当然の事であるが，しかしながら，場の理論での摂動論の計算をしている時，ちょっと油断するとこの事を忘れると言うか，わからなくなってしまう事が良くあるものである．

5.7.1　フェルミオンの自己エネルギー

場を量子化して摂動論により計算をして行くわけであるが，ここである困難にぶつかってしまう．それは，フェルミオンとフォトンの自己エネルギーが無限大になってしまうのである．まずは，フェルミオンの自己エネルギーについて議論して行こう．２次の摂動論の計算を行うと，どうしても発散する Feynman グラフが出てきてしまうのである．その過程とは，電子がフォトンを放出してそのフォトンを同じ電子が吸収するという過程である．これは自然界では起こらない過程であるが，Feynman グラフを計算する限り自動的に出てきてしまうので，これを処理する事は理論計算の中では当然，必要になる．問題はこれをどのように処理するべきであるかという事である．ここで非常に重要な事は，この無限大が Log 発散の無限大であるという事である．Log 発散は数学的には無限大であるが，物理学では本当の無限大にはならない．しかし，それでもこの無限大がでて来たらそれを理論上きちんと処理する必要があると人々は考えたのである．これは理論形式の整合性を考えた場合自然な事でもあり，その処理の仕方が繰り込み理論である．繰り込みとは，英語では Renormalization であり，波動関数を再規格化する事により無限大を処理しようとする事である．

5.7.2 フェルミオンのバーテックス補正

フェルミオンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，それ自体が発散していても別に物理的に困る事はない．むしろ逆で，このフェルミオンの自己エネルギーを利用しようと言うのが繰り込み理論の本質である．それは電子に対するバーテックス補正を行うと，発散項が出てきてしまうが，しかし，このバーテックス補正は物理的な観測量になっているので，発散は何とか処理する必要がある．そして，この発散項をフェルミオンの自己エネルギーの時に使った同じ波動関数により，繰り込んでしまおうと言う事である．この事はむしろ式で見た方が簡単であろう．フェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ は発散項だけ書くと

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not p - \not k - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)(-\not p + 4m) \quad (5.46)$$

となる．ここで Λ はカットオフ運動量である．この無限大は波動関数を再定義する事により吸収することができる．Lagrangian で書くと

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}} = \bar\psi \not p \psi - \left[\frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\right] \bar\psi \not p \psi = \bar\psi_r \not p \psi_r \quad (5.47)$$

となり，新しい波動関数 ψ_r は

$$\psi_r = \sqrt{1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)}\psi \quad (5.48)$$

と定義されている．ここでは質量項に関しては省略してある．次にバーテックス補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ を計算しよう．これは発散項のみ書くと

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{\not p' - \not k - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not p - \not k - m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\gamma^\mu$$

となる．この時，全相互作用 Lagangian 密度は

$$\mathcal{L}'_I = -eA^\mu \bar\psi \gamma_\mu \psi + \frac{e^3}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) A^\mu \bar\psi \gamma_\mu \psi = -eA^\mu \bar\psi_r \gamma_\mu \psi_r \quad (5.49)$$

となり，発散項はフェルミオンの自己エネルギーの際に再定義した波動関数により完全に吸収されている．さらに，この手法により有限項を計算すると電子の異常磁気能率が計算でき，これは実験と大変よく合っているのである．

しかしながら， $g-2$ のような観測量に発散があると言う事は理論形式がまだ健全ではない事を示している．フォトンの自己エネルギーの関連した観測量

はすべて有限である事が証明されているし，また有限質量のベクトルボソンによる $g-2$ の計算に発散がない事を考えてみると，結局，フォトンによる $g-2$ のバーテックス補正のみが奇妙は発散を持っている事がわかっている．これは常識的に見ればフォトンのバーテックス補正のみが何処か間違っていると考えるのが合理的である．実際，フォトンの伝播関数として誰もが Feynman の伝播関数を用いているが，この式が正しいものではない事は昔からよく知られていた事である．今後，この Feynman の伝播関数を見直して正しい伝播関数によりフォトンによる $g-2$ のバーテックス補正を計算する事が重要である．但し，この計算は相当難しいものである事がわかっている．

5.7.3　Ward の恒等式

ここで一つコメントしておきたい．繰り込み理論における繰り込み可能性の議論のところで，Ward の恒等式と言う式が出て来てこれが重要な役割を果たしているとどの教科書にも書いてある．ところが，この式をきちんと検証すると分かる事であるが，全く役に立たない方程式である．細かい事はここでは書かないが，基本的には恒等式自体は数学だから正しいが，それを物理に応用する時に間違えてしまうと言う事である．それは Ward の恒等式 を利用する際に，フェルミオンの自己エネルギーの計算で積分を実行した後，フェルミオンに対する分散関係式 $p^2 = m^2$ を使うのである．そのために，この式を p^μ で微分したものがバーテックス補正における Log 発散と形が同じになるという主張が Ward の恒等式からの結論である．しかし実はこれはフォトンの場合のバーテックス補正に対して偶然成り立っているのに過ぎない．当然の事であるが，フェルミオンの自己エネルギーの計算で $p^2 = m^2$ を使ったところからも p^μ で微分すると本当は寄与する事がわかり，Ward の恒等式自体は使い物にならないと言う事が簡単にチェックできるものである．しかし，これまで物理屋は Ward の恒等式とか Goldstone の定理とかの数学上では明らかに成り立つ方程式に対して，その物理への応用を甘く考え過ぎていたという事であろう．

5.7.4 Lamb シフト計算の困難

最近になって分かってきたことではあるが，水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトエネルギーの理論計算は実は概念的な困難を含んでいる．非相対論の計算を実行すれば，概念的な困難はないが，しかしこの場合どうしても理論計算は Log 発散してしまうのである．現在までの所，教科書に紹介されている Lamb シフトエネルギーの理論計算は，この非相対論によるものであり，基本的に Log 発散は適当なカットオフを選べば，実験値の大きさは予言できると言うレベルのものである．

それでは相対論的な波動関数を使い，Lamb シフトエネルギーの理論計算が実行できるかという問題である．この時，実は２つの困難にぶつかる．一つは，水素原子は相対論的に扱おうとすると１体問題ではないという事である．すなわち，陽子の運動も当然考える必要が出て来てしまい，これを厳密に扱う事は現在の場の理論的枠組みの中では不可能な事である事がわかっている．非相対論では重心と相対運動が常に厳密に分離できたのであるが，相対論ではそれは簡単にはできなく，処方箋もないのである．もう一つの困難はもっと深刻である．相対論的に扱おうとするどうしても負のエネルギー状態を考える必要がある．ところが，この負のエネルギー状態は束縛状態では理論的にきちんと定義する事ができない．場の理論で言えば，水素原子での電子の状態は陽子との相互作用を通して束縛されており，その全体の系の負のエネルギー状態を考えない限り正しい取り扱いになっていないのである．ところが，現実問題としては，この２体系の負のエネルギー状態などは，どう扱ったらいいのか明確ではないのである．従って負のエネルギー状態自体をきちんと取り扱う処方箋が無い限り，Lamb シフトのエネルギーをきちんと計算する事は当然不可能な事である．これらの事より，相対論的な Lamb シフトエネルギーの理論計算は不可能であると言う事が現状である．

5.8　繰り込み理論 (フォトン)

フォトンの自己エネルギーについては，朝永の推論のところで少し議論したのであるが，ここでもう少し議論を続けて行こう．フォトンの自己エネルギーも同じように Feynman グラフを計算すると出てきてしまうのである．この場合，フォトンがフェルミオンと反フェルミオンを対生成してまたもとの同じフォトンに戻るという Feynman グラフである．これは真空偏極と呼ばれている．ところがこのフォトンの自己エネルギーの Feynman グラフは２次発散になっている．あるカットオフを考えて，その Log は大した無限大ではないが，２次発散はどの様に繰り込もうとしても不可能である．それでは，これまで人々はどうしていたのであろうか？ここで繰り込み理論で最もわかりにくい「仮定」が出てくるのである．それは「ゲージ条件」である．人々は何とかこの２次発散を捨てたいために，計算されたフォトンの自己エネルギーが波動関数に繰り込められる形，すなわちゲージ不変であるべきであるという要請をしたのである．この時最も重要な条件が「ゲージ条件」である．これは偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}$ が $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ を満たしている事に対応している．ところが，この式は成立してしないのである．すなわち，どう計算をしてみても $k_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$ である．

何故，人々がこの式を正しいと思いこんだのであろうか？唯一考えられる理由は無限大になる積分において行った変数変換で正しい処理をしなかった事である．無限積分における変数変換においては，注意しないと無限大となるべき結果がゼロである事を「証明」してしまう事は良く知られている事であるが，このように変換してはいけない所で無視して変数変換して無限積分を実行してしまった事が間違いの主たる原因であった．しかし，この様な単純なミスをどうして人々が受け入れてきたのか，今となっては理解できない事である．いずれにせよ，間違った条件を用いたために２次発散の項はゲージ条件により捨てる事が出来るというものであった．これはいかにも人工的であり無理があると直感的にはわかるものである．もともとゲージ不変性は元の Lagrangian 密度に対してすでに確認されているものであり，従ってゲージを固定して，電磁場を量子化して摂動論で計算した物理量は，ゲージ不変性を破っているわけではない．しかしこの２次発散が処理できない限り繰り込み理論の欠点であると人々は思い込んだ事であろうし，この事は理解できない事でもない．それと，２次発散を捨てる事によるフォトンの自己エネルギーの処理の仕方は，基本的にはそれ程直接的な影響を物理の観測量に与える事はなかったので，受け入れられてきたのあろうと考えられる．

5.8.1 フォトンのバーテックス補正

次節で議論するようにフォトンの自己エネルギーは繰り込みに利用される必要がない事がわかっている．フェルミオンの場合のバーテックス補正と同様に考えると，フォトンの自己エネルギーが利用されるためには，自己エネルギーのダイアグラムにもう一つのバーテックスが付いた場合を考える必要がある．これが三角形図と呼ばれるファインマン図であるが，これはフェルミオンにおけるバーテックス補正に対応していて，言ってみればフォトンのバーテックス補正である．ところがこのファインマン図において，どのようなバーテックスを取ってみても，すべてのファインマンダイアグラムに発散がない事が証明されたのである．この三角形図は物理的な観測量であるため，これが全て有限で求まったという事はフォトンの自己エネルギーを繰り込みに使う必要は全くない事を示している．これはQED の摂動形式がフォトン関係では理論形式として極めて健全である事を示している．

不思議な事にこの三角形図はアノマリーの問題と関係していて，場の理論では非常に重要な役割を担ってきたのである．最初にこの三角形図の計算を実行したのが西島先生である [1]．彼が１９６９年に書いた「Fields and Particles」の教科書ではこの三角形図の計算 ($\pi^0 \to 2\gamma$) の手法を懇切丁寧に解説してあり，読めば確実に理解できるものであった．ところがこの計算はその後完全に物理世界の主流からは無視されたのである．これは到底理解できる話ではないが，アノマリーがもてはやされたために，この事が現実に起こってしまったのである．すべての三角形図が有限で求まる事がもっと早く人々に理解されていたら，アノマリーなど存在しようがないのであり，従ってアノマリーの物理が真面目に取られる事は無かったと考えられる．従って，超弦理論も作られる事も無かったはずであり，場の理論がもっと早くに正常な発展を遂げた事は間違いない事である．

5.9　カイラルアノマリー

繰り込み理論と直接は関係はしていないのだが，１次発散に対してもその発散を抑える必要があると考えた事から「カイラルアノマリー」という不思議な概念を見つけたのが Adler である．彼は三角形ダイアグラムを計算している過程で見かけ上１次発散が出てくる事に気がつき，それに対してそれを正則化する事によりアノマリー方程式を導出してしまったのである．この導出法は２つの重大な間違いに基づいている．第一番目の間違いはゲージ条件である．これはすでにフォトンの自己エネルギーのところで解説しているように全く意味のない条件であった．第２番目の間違いは，有限量の正則化と関係している．$\gamma^\mu\gamma^5$ の頂点関数を含む三角形図には１次発散も Log 発散もなく，従ってこの S-行列は有限である．この事は Adler 達が提唱した「カイラル・アノマリー」は単純な間違いである事を示している．１次発散を正則化して求められたアノマリー方程式なのだが，その１次発散は存在しなく，よってアノマリー導出の根拠さえ失っている．さらに言えば，Noether の定理から導かれたカイラルカレントの保存則が正則化などの数学的手段で勝手に破られる事など物理的にはあってはならない事である．しかし西島先生による $\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の計算 (これは教科書 [1] でのみ発表，論文としては発表されてはいない) が一般に理解されていたら「アノマリー現象」など起こらなかった事であろう．

5.9.1　三角形ダイアグラム

三角形ダイアグラムの計算においては，その物理現象として $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊過程が良く知られている．これは実はフォトンの自己エネルギーと直接関係している．この場合，２個のフォトンが結合するところは勿論ベクタータイプ γ^μ 型である．もう一つの頂点 Γ として $\pi^0 \to 2\gamma$ の場合は擬スカラー γ^5 型であり，$Z^0 \to 2\gamma$ の場合は擬ベクトル $\gamma^\mu\gamma^5$ 型と言うように，その結合型によっていくつかの場合がある．そして，それぞれの頂点関数はそれぞれの物理的な散乱過程に対応している．

ところが，この三角形ダイアグラムの T 行列を計算するとわかる事であるが，どの三角形ダイアグラムの場合も発散は何処にもないのである．一見，見かけ上は線形発散に見えるのであるが，実際は線形発散も Log 発散もトレースとパラメータ積分の段階で厳密にゼロになるのである．これは大変重要な事を意味している．それは，これらの物理的な過程に発散がないと言う事は，フォトンの自己エネルギーは繰り込みに関係していないという当然の結果になった

のである．後でもう少し詳しく議論するが，この三角形ダイアグラムから頂点 Γ を取り除いたダイアグラムがフォトンの自己エネルギーである事がポイントである．この結果,「朝永の推論」は方向としては正しいのだが，フォトンの自己エネルギーはゼロではなくて，やはり 2 次発散がある事は確かだが，繰り込みには無関係であったという事である．

この三角形ダイアグラムの T 行列の計算法に関しては，西島先生の教科書「Fields and Particles」に１２ページに渡って詳細に解説されている [1]．これは驚くべき事であるが，この本が出版されたのが１９６９年であり，従って１９６８年には原稿が出版社に渡っている事が分かっている．ところが，Adler が三角形ダイアグラムの異常を主張したのが１９６９年なのである．きちんと計算すれば何処にも発散などなく，何故彼が「アノマリー」を主張したのかはわからない．しかし彼の計算で何故１次発散が存在すると思ったのかと言う事は論文を読めば分かる事である．彼の計算には 2 個の光子の入れ替えたダイアグラムの計算が正しく行われていないのである．２つのファインマン図を足して計算するとそれがゼロになるべきである事はある定理 (Landau-Yang の定理) からわかっている事でもある．この定理とは 2 個の光子からは 1^+ の状態は作れないと言うものである．角運動量の合成では $1^- \otimes 1^-$ では 0^+, 1^+, 2^+ が可能であるが，光子はボーズ粒子なので 2 光子の状態は対称である必要があるのに対して，1^+ の状態は反対称の性質を持つため作れないのである．これは回転群の知識が正確であれば間違う事はあり得ない事である．但し，0^+ の状態の場合は対称に成っているため， $\pi^0 \to 2\gamma$ の計算においては 2 つのファインマン図が同じになりそのまま 2 倍しても正しく，実際，トレースの計算からもそれが確かめられている．しかし，$Z^0 \to 2\gamma$ の場合には 2 つのファインマン図が打ち消しあってゼロになっているという事である．この $Z^0 \to 2\gamma$ の正確な計算が最近まで行われなかったことは物理学全体に大きな問題を投げかけている (阿部龍生氏, 修士論文 2013 年)．しかし，それ以上に，たかがある種のファインマンダイアグラムを計算して，それを正則化したら最も基本的な軸性ベクトルカレントの保存則が壊れたように見えたら，それは正則化の何処かがおかしいと思うべきである．

5.9.2 アノマリー方程式の消滅

すべての三角形ダイアグラムの T 行列が有限で求まったと言う事は，即ち，アノマリー方程式は物理的に意味のない方程式であったと言う事である．このアノマリー方程式自体，あまり面白い方程式ではなかったので，もともと解説

はしてなかったのであるが，結局，物理とは無関係の方程式であったと言う事である．そもそも，物理的に言って，Noether の定理から導き出されたカイラル電荷の保存則が，ある種のファインマンダイアグラムを正則化する事によって壊れるなどと言う事は，物理的にあってはならない事である．それは正則化が単に数学の手法であり物理とは直接関係しないと言う事を考えれば，至極当然の事であったわけである．正則化に関しては，例えば Pauli-Villars の正則化があるが，これに対して，朝永さんのコメントが知られており，そのコメントとは「Pauli-Villars の正則化は間違いである」と言う事であった．このコメントに関しては，Pauli-Villars の正則化が間違いと言うよりも，「この正則化は無意味であり不要である」といった方がより正確であると思われる．

5.9.3　フォトンの自己エネルギーと繰り込み理論

フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，それが2次発散していても構わない事は前述した通りである．それではフェルミオンのバーテックス補正と同じように，フォトンの自己エネルギーも使い道があるのだろうか？これは繰り込み理論の最も重要で本質的な問題である．真空偏極が起こって，それに関連した物理的に観測可能な過程は何であろうか？この質問に対する答えは単純で，それは真空偏極が起こっている場合のフェルミオンか反フェルミオンのどちらかに何らかのバーテックスが付いた場合である．前述したように，最もよく知られているのは，$\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊過程である．この場合，バーテックスは γ_5 である事はよく知られており，この三角形ダイアグラムを計算して T-行列を求め，それから崩壊確率を計算して π^0 の寿命を求めるとこれは実験値と良く合っているのである．また，自分で計算してみればすぐわかることであるが，三角形ダイアグラムはどのバーテックスでも線形発散も Log 発散も厳密に消えてしまい，存在していない事が証明される．すなわち，自然界に起こっている物理的な過程は全て有限で求められているのである．

• **繰り込み不要**：　三角形ダイアグラムの T 行列がすべて有限で求められている事はアノマリーが物理的に無意味であった事を示しているが，これは前述した通りである．しかし，この事は繰り込み形式に対しては非常に重要な意味を持っている．真空偏極にどのバーテックスが付いても物理的な T-行列に発散が無いという事は，これらの過程では繰り込み不要であるという事を意味している．これはすなわち，フォトンの自己エネルギーはどの繰り込みにも使われる事が無く，従ってフォトンの自己エネルギー自体は物理的には意味がない

事に対応している．結局，フォトンの自己エネルギーの場合は，そのままほって置いても全く問題ないことが明白になったのである．この事は，この三角形ダイアグラムに関連している場の理論の計算手法が極めて健全である事を示している．その意味では，電子のバーテックス補正に関する場の理論の計算手法は，まだどこかに不健全さが残っているという事であろう．

5.9.4 Curie の原理 (対称性の保存)

対称性の問題を物理的にきちんと考えたのは恐らく Pierre Curie が最初であろう．彼は「圧電効果」を発見し，また「放射能の発見」でノーベル賞を受賞した事でよく知られているが，対称性に関しても重要な仕事をしている．特に，自然現象において「非対称性の物理現象はその原因がない限り結果として非対称性が現われる事はない」という Curie の原理を提唱している．

これまで議論してきた「カイラルアノマリー」の問題も Curie の原理に抵触している．原因がないのにカイラルカレントの保存則が勝手に破れる事はないとこの原理は言っているが，実際，その通りであった．

また自発的対称性の破れの問題も，もし「Curie の原理」をしっかり理解していたらあのような愚かな理論が提唱される事はなかった事であろう．現実には，カイラル対称性が自発的に破れる事などあり得ない事が今は厳密解によって証明されている．そしてこの事は Curie の原理の言っているとおり，対称性を破る相互作用 (原因) がない限り系の対称性が自然に破れる事はないと言う極めて自然な結果であった．

ここで対称性が破れている弱い相互作用について考えてみよう．これは最初の Lagrangian にパリティを破る相互作用を入れる事により現象を説明していて，確かに Curie の原理と矛盾してはいない事がわかる．その他に対称性を破る力としては CP 対称性を破る相互作用が知られている．これはしかしオペレータでその対称性を破っているわけではなく，その相互作用の結合定数を複素数にする事により CP 対称性を破っている．この現象も Curie の原理とは矛盾しないが，しかし物理的には今ひとつ理解し難い問題でもある．すなわち，対称性をオペレータでなくて，その強さをあらわす係数で破る事が直感的には良くわからない．観測量 (実験値) は実数なので何処かにジャンプがあるものと思われるが $\cdots$ しかし人々はわかっているのであろう．

5.10　弱い相互作用の繰り込み理論

Higgs 粒子が９５%の確率で存在しないと言う事が実験的に分かり始めている現在，弱い相互作用の繰り込みの問題を検証する事は必須条件になっている．もともと，Weinberg-Salam 理論はゲージ理論信仰に支えられて作られたものである．しかし，このゲージ理論ならば繰り込み可能と言う主張が物理的には無意味であり，つぶれてしまった事でもあり，その意味でも弱い相互作用の繰り込みの問題を考える事が避けられない問題である [2, 3].

Weinberg-Salam 理論は SU(2)⊗U(1) の非可換ゲージ理論から出発して，対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である．これは，物理的には対称性の破れの問題を誤解しており，技術的には局所ゲージ不変を勝手に破ってしまった手法が基本になっているため，およそ信頼できる模型とは言い難いものである．この事は教科書で詳しく解説しているので，ここでは省略する．しかしながら，Weinberg-Salam 模型の最終的な Hamiltonian は弱い相互作用の実験事実をよく再現するように作られている．その意味では，Higgs 粒子を除いたり，またいくつかの修正を加えれば，信頼できる模型になりうると考えられる．そうだとすると，有限質量のボソンにより媒介されている弱い相互作用の繰り込みの問題をきちんと理解する事は，非常に重要になる．

5.10.1　自発的対称性の破れ

弱い相互作用の繰り込み理論を議論する前に「自発的対称性の破れ」という言葉の誤解を解いておく必要がある．ここではカイラル対称性に対して議論するが，この自発的対称性の破れという表現はその物理現象を正しく表していなく，これはほとんど驚くべき事であるが，量子力学を理解していない事に対応している．今，ハミルトニアン $H = H_0 + H_I$ を考えた時，この H_0 は自由粒子のハミルトニアン を表すとして，H と H_0 ともにカイラル変換に対して不変であるとしよう．ここで H の固有状態である真空を $|vac\rangle_{exact}$ で表し，自由場の H_0 の固有状態である真空を $|vac\rangle_{free}$ で表そう．これは共に負のエネルギーの状態に粒子が詰まった状態を表している．この時，カイラル電荷に対する固有値は $|vac\rangle_{exact}$ に対して

$$e^{i\alpha\hat{Q}_5}|vac\rangle_{exact} = e^{\pm i\alpha}|vac\rangle_{exact} \tag{5.50}$$

となる．一方，$|vac\rangle_{free}$ に対して

$$e^{i\alpha\hat{Q}_5}|vac\rangle_{free} = |vac\rangle_{free} \tag{5.51}$$

となっている．この事は何を意味しているか，答は簡単である．自由場の真空が持つカイラル電荷はゼロであったのに対して，相互作用している真空のカイラル電荷はゼロではなくて有限であったと言う事である．これが「自発的対称性の破れ」という物理の全てである．ただ単に，自由場と比較して相互作用する場の理論の真空状態のカイラル電荷が変わっても当たり前のことで，別に新しい現象があるわけでも何でもない．

ところが南部や Weinberg 達は相互作用する場の理論自体がカイラル対称性を破ったと誤解してしまったのである．何故このような事が起こり得たのであろうか？これはある程度想像はできるが，それ以上はわからない．普通は，考えているハミルトニアンの固有状態がカイラル対称性を破ったように見えたら，自分の計算過程で重大な近似をしてしまったからか，または模型計算において何かの思考法に重大な誤りがあったのであろうと考えて，謙虚な物理屋ならば，狂うほどに注意深く検証する事になるものである．勿論，相互作用する場の理論の対称性が自然に破れたらこれはとんでもない事で，そうだとしたら自分は物理の研究をやめた方が良いという事になる．現実には，南部－Jona-Lasinio の論文においては，上述した２つの事が原因 (近似は Bogoliubov 変換，思考法の誤りはカットオフの理解不足) でカイラル対称性が破れたように見えただけの事である．まとめると，孤立系において対称性が自発的に破れるなどと言う事はなく，対称性が破れた状態（真空に限らず）が実現されるのは対称性を破る相互作用項を手で付け加えた場合のみに起こる事である．

しかし，問題はその後にもある．この「自発的対称性の破れ」の誤解がさらに誤解を呼んで Higgs 機構に至るのである．Higgs 機構ではさらに進んでゲージ対称性をオペレータの部分で破ってしまうが，それでも「自発的対称性の破れ」のマジックがあるから平気であり，それから標準模型が作られてしまったのである．

但し，弱い相互作用の理論はフェルミ理論から CVC 理論に至る過程で常に実験を再現するように作られており，標準模型はその正しい部分の構造を引き継いでいるために Higgs 機構を除去し，また非可換ゲージ場ではなく通常の有限質量ベクトル場を導入するなどの修正を加えれば，実験を良く再現している理論体系である事は間違い無い事である．

5.10.2 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 Z^μ の伝播関数を求める事が必要である．この場合，まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [3]．ベクトル場 Z^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M^2 Z_\mu Z^\mu \tag{5.52}$$

で与えられる．ここで $G^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$ である．この場合，運動方程式は

$$\partial_\mu (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + M^2 Z^\nu = 0 \tag{5.53}$$

となる．自由粒子の解は

$$Z^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{5.54}$$

の形である事が知られているので，この式を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式をを求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{5.55}$$

となる．ここで ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロ，すなわち

$$\det\{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{5.56}$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \tag{5.57}$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{5.58}$$

が求められる．これは QED では Lorentz 条件として良く知られている式である．しかし，これがゲージ固定とは無関係に運動方程式から導かれたと言う事は QED にとっても大変なことである．それは Lorentz ゲージがゲージ固定としては意味をなさない事に対応している．

それ以上に，これまで何故この運動方程式を解くことがなされなかったのであろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが，この場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$) が求まり，それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まるのである．

5.10.3　有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定する事が大切になる．出発点となるのはS行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場のT-積が問題となる．ここで，２個のボソン場のT-積は

$$< 0|T\{Z^\mu(x_1)Z^\nu(x_2)\}|0 >= i\sum_{\lambda=1}^{3}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{5.59}$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)$ の形はLorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda) = -\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \tag{5.60}$$

と決定される事がわかる．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{5.61}$$

と一義的に決定される事がわかる．この伝播関数は通常使われているものとほんの少しだけ異なっている．実際，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものである．しかし，これだと，フェルミオンの自己エネルギーとバーテックス補正には２次発散が出てしまう事は良く知られている．このため，この形では繰り込み不可能であるとこれまで考えられてきたのである．

5.10.4　ベクトルボソンによるバーテックス補正

しかしながら，新しく求められた伝播関数でバーテックス補正を計算すると驚いた事に，Log 発散がすべて消えてしまい，有限で求められるのである．実際，電子の $g-2$ に対する Z ボソンの影響を計算したところ，非常に小さくて($\delta g \sim 10^{-13}$)，この値は確かに実験と一致している事が分かったのである [3]. 従って，弱い相互作用においては，繰り込みは一切不要である事が明確になった．この事より，フォトンの伝播関数がある意味で異常であり，この場合の取り扱いが最も難しいものである．さらに深刻な問題として，Feynman の伝播関数が正しくはない事である．この事はすでに１９６０年代に良く知られていた事であり，場の理論の教科書でも議論されているのだが，幸か不幸か，電

子ー電子散乱などの on-shell 散乱では Feynman の伝播関数と正しい伝播関数がともに同じ正しい散乱振幅を与える事が分かっていたのである．従って，取り扱いが簡単である Feynman の伝播関数が使われ続けられてきたのはある意味では自然な事でもあった．しかしながら，この Feynman の伝播関数はループを含む計算であるバーテックス補正に使ってはいけない事は明らかな事である．ところが，正しい伝播関数でバーテックス補正を計算しようとすると，この計算における積分が極めて難しいものとなっている．Feynman の伝播関数を用いる場合，運動量積分は常に４次元から実質１次元に帰着されたが，正しい伝播関数を用いる場合，そう簡単にはなってくれないのである．恐らくこの困難さはフォトンの質量がゼロであると言う所から来ているものと考えられるが，この点に関しては，現在もまだ良くはわかっていない．しかし，この一点を除けば，繰り込みは非常に簡単な形で理解された事になったのである．有限質量のベクトルボソンによるバーテックス補正には発散がなくて，質量ゼロのベクトルボソンであるフォトンによるバーテックス補正にのみ発散があらわれると言う事実を考えてみれば，理論形式の問題と言うよりも，フォトンの伝播関数の問題として捉えるのが最も自然である事は明らかである．いずれにしても，ゲージ理論こそが奇妙な発散を持ち難しい理論になっている事は明らかであり，ゲージ理論のみが繰り込み可能で正しい理論であると言う定説が如何に無意味な「信仰」であったかがよく分かるものである．

5.11　繰り込み理論のまとめと未解決問題

これまで見てきたようにフェルミオンとフォトンの自己エネルギー自体は確かに発散している．しかしこれらは観測量ではないので，物理的にも理論形式の観点から言っても特に問題にはならないし，放って置いてよい事である．しかしながら物理的な観測量に発散がある場合には，本来の理論形式から言っても繰り込み理論を構築する前にどこか他に問題があるかどうかの注意深い検証こそが必要なはずであった．これはDiracの主張でもあり，また念願でもあったと考えられる．フェルミオンの場合は，バーテックス補正の計算が物理的な観測量になっていて，これに発散がある場合は繰り込みが必要となる．一方，フォトンの場合は，三角形図の計算が観測量に関係しておりこれに発散があると繰り込みを考える必要がある．これまで見てきたように，観測量の計算で発散があるのは唯一フォトンによるバーテックス補正の計算のみである．まとめて見ると

繰り込み関連の計算のまとめ

	繰り込み関連のファインマン図	発散度	参考文献
1.	γ^5 バーテックスの三角形図 ($\pi^0 \to 2\gamma$)	有限	文献 [1]
2.	スカラーバーテックスの三角形図	有限	文献 [2]
3.	$\gamma^\mu\gamma^5$ バーテックスの三角形図 ($Z^0 \to 2\gamma$)	有限	文献 [3]
4.	バーテックス補正 (有限質量ベクトルボソン)	有限	文献 [3]
5.	バーテックス補正 (フォトン) [$(g-2)$ の計算]	Log 発散	文献 [6]

となっている．これが現在の状況であり，これから見ても正しい伝播関数により $(g-2)$ の計算を実行する事が重要であると考えられる．この $(g-2)$ の計算が正しい伝播関数により有限で求まれば繰り込み理論は不要となる．これが量子場の理論における繰り込み関連では唯一の未解決問題である．

5.12　場の理論のまとめ

結局，真空中における全ての物理法則は基本的には量子電磁力学と量子色力学の体系に重力と弱い相互作用をうまく含み入れたラグランジアン密度により完全に記述されており，これら全ての相互作用を考慮した理論模型は概念的な困難がない量子場の理論として完成されたものと考えてよい．一つだけまだ完全にはわかったとは言えない問題はフォトンのバーテックス補正の計算であるが，これはいずれ解決されるべきものであり，理論形式全体を揺るがすほどの問題ではない．

いずれにしても，弱い相互作用における重いベクトルボソンによるバーテックス補正が有限で求められている事は非常に重要である．これまで，ゲージ理論のみが繰り込み可能であるという常識が物理の世界を支配してきた．しかし，現実の物理は逆でゲージ理論のみが物理的な観測量に対しても奇妙な発散を持っていて，従って繰り込みという不自然な定式化を考えざるを得なかったのである．実は，発散という基本的で深刻な問題は Feynman の伝播関数を使った事に主な原因がある事は分かっている．これはゲージ自由度をうまく処理できなくて，結局，正しくは無いが誰でも簡単に計算できる Feynman の伝播関数を使う事になったのである．実際，正しい伝播関数を用いようとすると計算がべらぼーに大変になり，これは誰でも出来るわけでは無くなってしまうのである．しかし，自然界を記述するためには簡単であるかどうかは「基準」にはなり得ない．簡単な計算例として電子ー電子散乱の場合を考えると，これは Feynman の伝播関数でもまた正しい伝播関数でも，同じ結果が出る事が証明されるのである．そして，確かにその通り，いくつかの昔の教科書ではその証明を解説している．しかしながら，ループを含む計算には適用できない事は明らかであり，その事をしっかり検証しなかったために，正しい方向性を失ってしまったものと考えられる．

これまで，素粒子および宇宙論においてはネーミングのみが先行してその物理は極めて不明確であり，また貧弱であった．例えば，ブラックホールというネーミングは確かに興味をそそるものであったが，しかし，その実体は専門家自身が全く理解していない状態で研究が推移してきたのである．人々は，ブラックホールとは一般相対論の方程式の特異点であるという説明をしてきたが，それが物理的にどういう状態なのかと言う事に関しては，言葉でしか答えられなかったのである．勿論それは物理ではなく，単なる SF であった．

自発的対称性の破れと言う言葉も確かに人々の気を引く良いネーミングであったが，しかし物理的には前述したように全くの間違いであった．しかしそ

れ以上に，それを語っている人々はほとんどその物理がわかっていない状態であり，例えば自発的対称性の破れがあると Goldstone ボソンが現れると言う事を検証もしないで受け入れてきたのである．それで,「Goldstone ボソンは物理的にはどのような状態として記述できますか」と専門家に質問すると,「それは集団運動の状態だから簡単には記述できない」と人々は答えて来たのである．これは勿論，物理ではない．実際には，厳密解によれば Goldstone ボソンなど最初からあり得ないものだったのである．そして，そもそも自発的対称性の破れは，その場の理論模型における「真空」の性質のみが議論の対象となっているため，その現象がどのような形にせよ物理的な観測量に直接結びつく事はあり得ない事ではあったが，それ以上に，孤立系の場の理論においてその系の対称性が自然に破れる事など，勿論，あり得ない事である．

その他の楽しいネーミングとして，少し専門的なものではあるが「カイラルアノマリー」,「格子ゲージ」,「繰り込み群」,「漸近的自由」,「大統一理論」,「超弦理論」などが良く知られているが，それらはすべて物理的には無意味であり，いずれ消えて行くものである．

このように量子場の理論は非常にシンプルに理解できる定式化により完成されたものと考えてよい．この理論形式の解説は Bentham 出版社から「Fundamental Problems in Quantum Field Theory」の題名で e-book の教科書として出版されている．詳細はこの本を読んでいただければ良い．どの分野においても何かをシンプルに理解できた時には正しい定式化が完成したと考えてよい場合が多いものである．しかしこの場合，そのシンプルな理解に到達するまでに膨大な努力とあらゆる形の試行錯誤や不要と思われる様々な検証を経て初めて可能になるものである事は言うまでもない．

5.13　量子生物

生命の起源は恐らくは海底における火山活動と関係しているものと考えられる．高分子がさらに結合してより大きな高分子になるためには，必ず触媒に対応する物質が必要である．この触媒の役割をする事ができる物質は電離した鉄などのイオンであろう．これらの化学反応を電子の言葉で理解する事が今後の物理学の最も重要な課題になって行くものと思う．これには低エネルギーの電子の振る舞いを正確に理解する必要があるし，これこそが量子生物という学問になるものと思う．但しこれまで，物理屋は電子の波が１個の分子サイズを大幅に超えたような物理現象に関してその描像を作る事を完全に怠ってきたので，この分野で物理学を応用しようとしてもその手法を全くしらないのである．まずは基本的な低エネルギーの物理現象からしっかり理解する事が重要になるであろう．

5.13.1　量子生物

物理学の主流は今後，量子生物の研究になって行くことであろう．それは生物を電子の言葉で理解するという事である．サイエンスとしては膨大な自然現象が広がっているがそれを量子生物として理解する事は，非常に難しい事であろう．しかし，サイエンスが自然を理解しようとする学問である限り，生物自体を量子力学の言葉でどうしても理解したいものである．

例えば，生物における神経の伝達を考えると，その情報を伝えるものは，やはり電子であろうと考えられる．しかし，それが電流のように伝達するのか，あるいは何らかの「波」のように密度波として伝達するのか，まだ全くわからない．もし電子による伝達ならばどのように電位差ができるのであろうか？さらに最小単位の電位差は一体どのくらいなのであろうか？

疑問は尽きないが，しかしそれに答えるのに，まだ糸口さえつかめてはいない．それは電場にしても磁場にしても，溶液中でどうなるのかと言う問題を物理学はほとんど答えて来なかったからでもあろう．生物は水を中心にして成立していることから，生物での現象は基本的に溶液中での化学反応に対応している．

5.13.2　溶液の物理

　これまでの物理学は基本的には真空中に存在している物質の振る舞いを研究する事が主力であった．量子場の理論は当然真空のみが興味の対象であったし，また固体物性も結晶が存在するところは基本的には真空，あったとしても空気中ということである．そして，その物理は，かなりの精度で現象を記述できる理論体系が完成されたと考えて良い..

　今後の方向として，量子生物の研究のまえに，溶液中の物理の研究は極めて大切である．生物を物理の言葉で理解しようとすると，どうしても，溶液中における化学変化の問題にぶつかるのである．この場合，化学反応の現象論は良く理解されているのだが，その化学反応を電子の言葉で物理的に理解する仕事は，まだ，全くといって良いほどわかっていない．溶液だと何故，化学反応が起こり易くなってるのだろうか？溶液中では，例えば，水分子における電子は隣の水分子とどのような相互作用をしているのだろうか？

　このように見て行くと，溶液中の化学変化の前に，溶液それ自体の性質をまず理解する必要がある事がわかる．溶液とは何かと言う事である．はっきりわかっている事として，溶液の場合，これ自体は真空中では存在できないと言う事である．即ち，溶液が溶液として存在するためにはそれを支える物質（容器）と圧力の存在が必須条件であると言う事であり，これは，溶液が全体としては束縛状態になっていないと言う事を意味している．この事より，溶液の状態は固体状態と決定的に異なっている事がわかるのである．

　いずれにせよ，すべてはまだ疑問だらけである．恐らくは，何か決定的に重要な事があり，それを物理の言葉で理解する事が，今後のこの分野の進展に大きな影響を与える事になると考えられる．これからしばらくは，何が決定的に重要な役割を果たしているのかを探す事であろう．

関連図書

[1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009

[5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", (McGraw-Hill Book Company,1964)

[7] J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (addison-Wesley,1967)

[8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, "Global Positioning System", Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)

[9] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), " Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Result