

演習問題解答 第10章

問1 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = r \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta d\theta = \mu_0 J$ よって $2r\pi B_\theta = \mu_0 J$ これより $B_\theta = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}$ となる。

問2 円電流は電子の回転であり、これは角運動量と直接関係している。

問3 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ である。ここで

$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ なので Faraday の法則は確かに満たされている。

一方、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ は明らかである。

問4 観測者の座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする。また電流上の座標を $\mathbf{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ と書く。この時磁場は $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{za \cos \theta \mathbf{e}_x + za \sin \theta \mathbf{e}_y - (ya \sin \theta + xa \cos \theta - a^2) \mathbf{e}_z}{(r^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる。

(a) z-軸上での磁場

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z \text{ となる。}$$

(a) 遠方での磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\frac{3zx}{r^5} \mathbf{e}_x + \frac{3zy}{r^5} \mathbf{e}_y + \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \mathbf{e}_z \right], \quad m = J\pi a^2 \text{ となる。}$$

問5 観測者の座標を $\mathbf{r} = (0, 0, Z)$ とする。また電流上の座標を $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ と書く。この時、 $Jds' = K dx' dy' \mathbf{e}_y$ だから磁場は $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Kx' dx' dy' \mathbf{e}_z + KZ dx' dy' \mathbf{e}_x}{(x'^2 + y'^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$ と書ける。

$$\text{よって } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 K Z}{4\pi} \mathbf{e}_x \int \frac{dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 K}{2} \frac{Z}{|Z|} \mathbf{e}_x \text{ となる。}$$

問6 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$ より $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$ である。ここでゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いると $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ が求まる。