演習問題解答　第１５章

問 1　Dirac 場は反交換関係で量子化する。

$$\begin{aligned}\{a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}, a_{\boldsymbol{p}'}^{\dagger(s')}\} &= \delta_{s,s'}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}, \qquad \{b_{\boldsymbol{p}}^{(s)}, b_{\boldsymbol{p}'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \\ \{a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}, a_{\boldsymbol{p}'}^{(s')}\} &= 0, \qquad \{b_{\boldsymbol{p}}^{(s)}, b_{\boldsymbol{p}'}^{(s')}\} = 0, \qquad \{a_{\boldsymbol{p}}^{(s)}, b_{\boldsymbol{p}'}^{(s')}\} = 0\end{aligned}$$

従って例えば $\{a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger(s)}, a_{\boldsymbol{p}'}^{\dagger(s')}\} = 0$ の式で $s = s'$,　$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$ とすると
$a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger(s)} a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger(s)} = 0$ となる。これは同じ状態に粒子は作れない事を示す。

問 2　$A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)$ を具体的に式を代入して真空期待値をとるとこの式が簡単の示す事ができる。ここで $\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} \to \int d^3k$ としている。ステップ関数は T-積から来ている。

問 3　複素積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - i\varepsilon} = \begin{cases} \frac{ie^{i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for} \quad t > 0 \\ \frac{ie^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for} \quad t < 0 \end{cases}$$

に注意すると (15.10) 式から (15.9) 式が簡単に求められる。

問 4　$\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\mu}\epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\nu} = -g^{\mu\nu}$　の式で k_μ を掛けると
$\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{2} k_\mu \epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\mu}\epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\nu} = -k_\mu g^{\mu\nu} = -k^\nu$　となる。この左辺の式は Lorentz 条件 $k_\mu \epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\mu} = 0$ よりゼロである。しかし右辺は k^ν となりこれはゼロではないので矛盾する。

問 5　Feynman の伝播関数が使えるのは On shell 散乱の場合だけである。それ以外の場合は正しい伝播関数を使うしか方法はない。