演習問題解答　第４章

問１　第１項$= \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r^2}\right)\cos\theta = \dfrac{2}{r^2}\left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r^2}\right)\cos\theta$

第２項$= \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r^2}\right)\cos\theta = -\dfrac{2}{r^2}\left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r^2}\right)\cos\theta$

よって第１項+第２１項=0

問２　$\boldsymbol{r}$　を　$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}$　と置き換えればよい。

問３　$r < R,\quad \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial r} = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0},$

$r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial r} = -\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r^3 + C_0,$　よって

$\phi = -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 - \dfrac{C_0}{r} + C_1,$　$\phi(0)$ は有限だから $C_0 = 0$　よって $\phi = -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + C_1$

$r > R,\quad \phi = \dfrac{C_2}{r} + C_3$　ここで　$\phi(\infty) = 0$　より $C_3 = 0$

$r = R$　で接続条件より　$-\frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} = -\frac{C_2}{R^2}$　よって　$C_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}$

これより $\phi = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_3$

問４　(a)　$\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \dfrac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$

$E_z = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = -\dfrac{qd}{2\pi\varepsilon_0}(x^2+y^2+d^2)^{-\frac{3}{2}},$　　$z = 0$ を代入した

$\sigma = -\dfrac{qd}{2\pi}(x^2+y^2+d^2)^{-\frac{3}{2}}$

(b)　$F = -\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{4d^2}$　力は引力

問５　(i) $r < R,\quad 4\pi r^2 E_r = \dfrac{4\pi\alpha}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{n+3}r^{n+1},\quad E_r = \dfrac{\alpha}{(n+3)\varepsilon_0}r^{n+1}$

(ii) $r > R,\quad E_r = \dfrac{\alpha}{(n+3)\varepsilon_0 r^2}R^{n+3}$

問 6　(a) $G(x,x')$ の決め方：

$x \neq x'$ の時、$G(x,x')$ の解は $G(x,x') = Ax + B$ となる。
境界条件より $G(0,x')=0,\ \ G(1,x')=0$ だから
$x < x' \quad G(x,x') = Ax, \quad\ x > x' \quad G(x,x') = B(x-1)$ と書ける。
$x = x'$ での接続より $Ax' = B(x'-1)$ と求まる。また
$\displaystyle\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \frac{d^2G(x,x7)}{dx^2}dx = 1$ より $B - A = 1$ が求まる。これより

$x < x'$：　$G(x,x') = (x'-1)x$
$x > x'$：　$G(x,x') = x'(x-1)$　と書ける。

(b) $\phi(x)$ の決め方：

$\displaystyle\phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^1 G(x,x')\rho(x')dx' = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_\alpha^\beta G(x,x')dx'$
但し、 $\displaystyle\alpha = \frac{1-d}{2},\ \ \beta = \frac{1+d}{2}$

(i) $x < \frac{1-d}{2}\ \ \to x < x'$
$$\phi(x) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_\alpha^\beta (x'-1)x dx' = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}x$$

(ii) $x > \frac{1+d}{2}\ \ \to x > x'$
$$\phi(x) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_\alpha^\beta (x-1)x' dx' = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}(1-x)$$

(iii) $\frac{1-d}{2} < x < \frac{1+d}{2}$

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\int_\alpha^x (x-1)x'dx' + \int_x^\beta (x'-1)xdx'\right] \\
&= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[x(1-x) - \left(\frac{1-d}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$