

演習問題解答 第5章

問1 具体的に入れればすぐにチェックできる。

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1,5} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \text{とする時、} U = \frac{1}{2} \sum_{i=1,5} q_i \phi_i \text{ となる。}$$

問2
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 d^3r = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \rightarrow \infty$$

点電荷の場合、例えば電子が本当に点であるかどうかは良くわからない。しかし、自己エネルギーが無限大になっても観測できないので別に困る事はない。

問3 (a) 一様電荷分布

$$\begin{aligned} r < R, \quad E_r &= \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \\ r > R, \quad E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \end{aligned}$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \right] = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

(b) 表面電荷分布

$$\begin{aligned} r < R, \quad E_r &= 0 \\ r > R, \quad E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \end{aligned}$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

問4 電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ の時、その全体の Coulomb エネルギーは $U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r'$ と

書ける。電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ の作る電位 $\phi(\mathbf{r})$ は $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$ である。よって

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) d^3r \text{ となっている。}$$

問5 重力 F が電氣的な力 eE と釣り合うので $F = mg = eE$ となる。ここで $E = \frac{V}{a}$ なので必要な電位差 V は $V = \frac{mga}{e}$ から求まる。

問6 $U = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$, $R = 1.2A^{\frac{1}{3}}$ fm. 但し, $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. $\hbar c = 197$ MeV · fm

$$U = \frac{3}{5} Z^2 \alpha \frac{1}{R} = \frac{3}{5} (92)^2 \frac{197}{137 \times 1.2 \times 238^{\frac{1}{3}}} \text{ MeV}$$

$$U' = U_1 + U_2 = \frac{3}{5} \left(\frac{(Z_1 e)^2}{R_1} + \frac{(Z_2 e)^2}{R_2} \right), \quad R_1 = 1.2A_1^{\frac{1}{3}}, \quad R_2 = 1.2A_2^{\frac{1}{3}}$$