# 演習問題解答　第８章

問 1　外からの力は電気双極子の重心に働く。この場合、電気双極子は何らかの形で束縛されていると考える。

問 2　コンデンサー板間であるが、たまたま方向が同じだったためにコンデンサー板間に働く力と考えてよい。

問 3　Lagrangian は $L = \dfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\left\{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \phi(\boldsymbol{r},t)\right\}$ なので、この Lagrangian は次のゲージ変換

$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{r},t), \qquad \phi'(\boldsymbol{r},t) = \phi(\boldsymbol{r},t) - \dfrac{\partial\chi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$ をすると

$L = \dfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\left\{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t) - \phi'(\boldsymbol{r},t)\right\} - e\dfrac{d\chi}{dt}$ となる。

ここで、全微分の項は運動方程式に効かないのでこの Lagrangian はゲージ変換に対して不変となっている。

問 4　原点の電荷 $-q$ と点 $\boldsymbol{d}$ の電荷 $q$ が作る電位は $\phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{-q}{|\boldsymbol{r}|} + \dfrac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{d}|}\right]$ となるが，遠方の点 ($|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{d}|$ ) では $\phi(\boldsymbol{r}) \simeq \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ となる.

この場合、電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{p}}{r^3} - \dfrac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\right]$ となっている.

問 5　電場のエネルギーは $U_I = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{r^3} - \dfrac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\right]$ と書けている.

但し $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ である。

問 6　電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が作る電位は $\phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{|z|<a}\dfrac{n\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r'$ である。今は $z$ 方向にのみ興味があるので $x=0,\ y=0$ として十分である。よって

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{|z|<a}\frac{n(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_z)[z-z']}{[(z-z')^2+r'^2]^{\frac{3}{2}}}dz'r'dr'd\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\pi n(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_z)\int_{-a}^{a}\frac{z-z'}{|z-z'|}$$

これより $\phi(z) = \dfrac{n(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_z)}{\varepsilon_0}z.$　よって $E_z = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = -\dfrac{n(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_z)}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\sigma_p}{\varepsilon_0}.$