5.7 経済物理学

近年，経済物理学 (econophysics) が少しずつ発展し始めている．経済学を物理的な観点から研究することは，非常に面白い事ではある．最初の発展は金融工学 (financial engineering) への応用から始まったと考えてよいであろう．しかしこの考え方は必ずしも経済物理としての進展を意味するものとは言えない面があり，その後の発展はあまり見られていない．一方，株価のゆらぎ分布の問題は物理的な模型により詳細に研究されている．実際，株価の平均値からのゆらぎ (fluctuation) の分布はランダム行列という物理学における手法により，非常にうまく記述されることがわかっている．

ここでは金融工学で導入された概念とそれに関係する方程式について簡単に解説しよう．また今後，経済物理学の発展の基礎となるべき「リスク管理 (risk management)」の考え方についての解説を試みて行こう [7].

5.7.1 ブラック・ショールズの方程式

金融工学という一見，奇妙な分野を発展させたのはブラック (Black) やショールズ (Scholes) 達によるものであろう．この場合，投資の対象となる「金融商品」に対して，デリバティブズ (金融派生商品) という量が考案されている．まずは，その言葉の解説を簡単にしておこう．

- **先物取引**： 例えば，ある商品をある期日に「予定価格」で売買する取り決めを「先物取引」としよう．これは単純で，商談が成立すればその価格で取引が行われる事になる．しかし実際に売買された価格は「予定価格」と異なる可能性が高くそのリスクは避けられない．

- **オプション**： ここで新しい考え方として「オプション」と言う商品が提案されている．それはある商品をある期日に「予定価格」で売買する権利のことである．その場合，そのオプションに対して少額のプレミアムを付けることで先物取引で起こるリスクを軽減しようという事である．

- **ブラック・ショールズの方程式**： ブラック・ショールズの方程式はそのデリバティブズが満たすべき微分方程式であり，

$$\frac{\partial W_d(\tau, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W_d(\tau, z)}{\partial z^2} \tag{5.42}$$

と書かれている．ここで W_d がデリバティブズの分布関数であり，また σ は商品価格変動の標準偏差である．τ は時系列の流れに関係しており，また z と

言う変数は価格変動を記述する時系列変数に関係している．しかしこれらの説明はここでは省略しよう．式 (5.42) には特殊解が知られている．それは

$$W_d(\tau, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2\tau}} \tag{5.43}$$

となっている．c は任意定数である．現実的にはこの解が有用とは到底考えられないものであり，実際に成功を収めたと言う事実はない．熱の伝達を売買価格の変動と関係すると考えたことはある程度は，理解できる．しかしながら，そこに「人為性」が入らないという保証はなく，従って方程式が予測している価格変動の分布関数が充分信頼できるとは到底，言えるものではない．

5.7.2　ランダム行列とゆらぎの分布関数

経済物理学において株価などの価格変動の平均値を記述しようとしても，それを予測することは不可能であろう．この事は経済活動が単純に「自然界の現象」として扱う事ができない事と関係している．従って，価格変動の平均値を解析して，その変動が何を意味しているのかと言う問題を議論することは科学的に意味がある事であろうが，予測はできないことである．

• **経済物理における観測量：**　それでは価格変動に関するもので，自然現象として扱える「観測量」は存在するのであろうか？これは重要な質問であるが，ある程度「自然現象」として扱う事ができるものが知られている．それは価格変動における「ゆらぎ」である．ゆらぎとは，価格変動に対してその平均値からのズレを意味している量である．そしてこの価格変動のゆらぎはランダム行列による予言値により，正確に記述される事が知られている．この事はゆらぎの分布は何らかの普遍性 (universality) がある事を意味している．しかしここで使っている数学はそう易しいものではないので，その詳細な数式を追う必要はない．その結果だけを応用することを学んでほしい．

• **量子論のハミルトニアン：**　ランダム行列を議論する場合，その出発点になるものがハミルトニアン H である．これは量子力学において最も重要な物理量である．量子力学では基本的に状態のエネルギーを求める事が目標である．このため，その状態のエネルギーを決める物理量が基本的なものとなり，それがハミルトニアンである．そしてその固有値がエネルギーとなっている．固有値が実数であるためにはハミルトニアンはエルミート行列である事が必要である．ここで扱うランダム行列ではそのハミルトニアンが実対称行列と仮定されている．従ってその行列要素はすべて実数である．

• ランダム行列： ランダム行列の方法とは，ある量子系を考えたとして，その「ハミルトニアンの各行列要素がすべてランダムな分布をしている」と仮定するものである．簡単な模型として２行２列のハミルトニアン H を

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

としよう．この時，それぞれの行列要素 H_{11}, H_{22}, H_{12} がすべてランダムな量だとして，これらが ガウス直交系アンサンブルの分布関数 $P(H)$ に従っていると仮定しよう．すなわち

$$P(H) = P(H_{11})P(H_{22})P(H_{12}) = Ne^{-\alpha(H_{11}^2+H_{22}^2+2H_{12}^2)} \tag{5.45}$$

である．但し N, α は定数である．ここで，式 (5.44) のハミルトニアンの固有値を E_1, E_2 として，その差を $s = |E_1 - E_2|$ としよう．この時， このエネルギー固有値の差 s の分布関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{\pi}{2D^2}\, s\, \exp\left\{ -\frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{D}\right)^2 \right\} \tag{5.46}$$

となる事が示されている．ここで D は α に関係する量であり，また $P(s)$ は規格化されている．この分布関数はウィグナー分布と呼ばれていて，例えば原子核における複合核のエネルギー準位間差のゆらぎの分布関数の実験値と非常によく一致することが分かっている．

5.7.3 リスク管理

自然界で観測されたゆらぎの分布関数がランダム行列による理論計算と一致した事実は重要である．実際，これは何かもっと普遍的な現象である可能性が高いと言える．実際，確率的な現象におけるゆらぎの分布関数はこのランダム行列により普遍的に理解されることがわかっている．

• 株価のゆらぎへの応用： このランダム行列の模型計算が株価の変動に対するゆらぎの問題に応用されている．そして，観測された株価のゆらぎがランダム行列による予言値により，非常によく再現されている事が知られている．詳細は説明できないが，基本的にはエネルギー準位のゆらぎの記述と同じものと考えて分布を取り扱うと上手く行くと言うことである．この事は，株価の平均値自体は自然科学の対象にはならないが，その株価平均値からの変動である

ゆらぎ分布は物理学の対称になると言う事である．従って，このゆらぎを扱う模型計算が経済物理学の一つの方向を示していると言える．

● **リスク管理への応用：**　この事実を利用してリスク管理の考え方に応用した例題を議論しよう．今，例えば１０００社の株価のゆらぎ分布を解析したとしよう．この時，基本的には，すべての会社の株価のゆらぎ分布は理論と一致することが予想される．しかしながら，このうち３社の株価のゆらぎ分布は理論の予想から大幅にずれていた事がわかったとしよう．この場合，理論の予言値と一致しなかった３社の株価のゆらぎ分布はどのように理解したら良いのであろうか？

● **不一致の原因：**　株価のゆらぎ分布が理論計算と合わなかった原因はそう単純ではないであろう．しかしながら，これは「普遍性」からずれていると言う意味で，この３社の株価ゆらぎに何らかの問題があることを示している．株価の変動に何らかの人為性が加わることは良くあることであろう．しかしこの影響がゆらぎに反映された場合，その株の会社が持っている何らかのトラブルが影響した可能性があるとも言える．

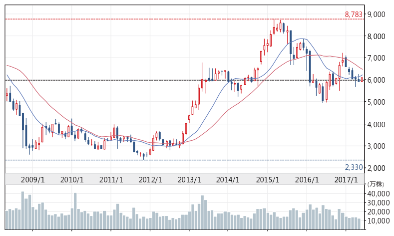

図 5.5: 株と平均値

まだその原因まで関係付けることはできていないが，これがリスク管理の問題である．残念ながら，そのリスクが何であるかは理論的にはわからないが，しかし何か問題が発生している可能性がある事は指摘できている．純粋に数学的な指標により，その企業に対するある種の「リスク」の存在がわかることは面白い手法と言えよう．

● **経済物理学の将来：**　この分野はまだ始まったばかりではあり，様々な問題点が出てくるものと思う．しかしながら，経済の現象においてもある種の「物理量」をうまく取り出すことができれば科学的な解析がある程度は可能になると言う事であろう．