物理学講義１

相対性理論

目 次

第１章　相対性理論

物理学は自然現象を理解する事を目的とした学問である。どの理論体系にしても、これは対応する自然現象を理解する事が目標であり、そしてそれがすべてである。従って、理論模型が自然現象と遊離して一人歩きしたら非常に危険なことである。現在までのところ基礎的な場の理論模型はすべて正常な理論体系をなしている。しかしながら一般相対論だけが対応する自然現象が存在していない理論となっている。それはその方程式が座標系に対する方程式となっているからである。

1.1　空間

自然現象は空間内で起こっている。この場合、大半の読者は空間とは何かと考えた事があるものと思う。しかしながら空間とは物質が存在しない限り、認識が出来ないものである。物理学においてはこのため、空間に座標系を導入する。そしてそれぞれの軸を x 軸, y 軸, z 軸と定義する。この座標系が空間をあらわし、この系により自然現象を記述する事になる。

1.2　座標系

物理学においては空間に座標系を導入して質点の運動を記述することになる。座標系とは人が空間に仮想的に軸を設けて、それにより質点の運動を記述する事になっている。その座標系の中の１点の座標を (x, y, z) で表している。これを $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$ と書いた方が便利であるため、良くこのベクトル表示を取っている。しかし場の理論における計算では、むしろ成分 x_i で書いた方が計算が楽になるため成分表示が一般的である。結局、どれが便利であるかと言う問題である。

1.2.1　座標の原点

座標系を導入する場合、その原点を決める必要がある。何処にしたら良いのであろうか？一瞬、原点の取り方によって、自然現象の記述が変わってしまったらどうしようと言う不安を持つ人がいたら、それは非常に正常な反応と言う事になる。例えば、地球の公転運動を記述しようとしたら太陽を原点にしないとうまく行かないないのではないかと考えるのは不思議議な疑問ではない。実際問題としては、太陽を原点に取った方が簡単にはなっているが、別に何処を原点に取っても地球の公転運動は正しく記述される。この原因は物理学におけるすべての力が平行移動に対して不変である事に拠っている。結論として、座標の原点は何処にとっても構わないが、なるべく記述が便利なように選択するのがよい。例えば、地球の公転を記述したい時は太陽を原点に取ればよく、また地球の自転を議論したい場合は地球の中心を原点に取ればよいと言う事である。

1.2.2 デカルト座標系

座標系は数学の基本である．座標系を導入する事により様々な記述が可能になり，言語としては最高に便利である．座標系の基本はデカルト座標 (x, y, z) であり，これがすべての出発点である．この場合，座標は自然に定義されるし最もわかり易い事は事実である．しかしの物理の方程式を解こうとする場合，ポテンシャルが極座標表示で書かれている場合が多いため，極座標表示も重要になる．

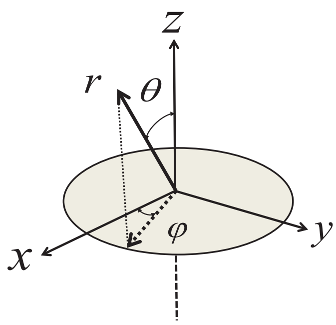

図 1.1: 座標系

- **極座標：** (r, θ, φ) と書いて $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ である．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdydz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

1.3 時間

時間とは何かと言う疑問に対しては、物理屋が答える事は出来ない。時間の流れは地球の公転により測定したり、原子の放出する光の周波数によって時間を測ったりしているが、これは「時間とは何か？」が分かったわけではない。この場合、人間が時系列を作成して、その時間を記述しているからであり時系列を認識している事は確かではある。しかしそれは時系列を通して時間を認識している事になっていて、時間そのものを認識できているわけではない。。

時間は一様に流れていると仮定されている。そしてそれと矛盾する現象は現在まで見つかってはいない。この時間の一様性はエネルギー保存と関係している事を見ても、厳密に成り立っていると考えられている。ちなみに、空間の一様性 (平行移動による不変性) は運動量保存と関係している。

1.3.1 時間の原点

時間の原点はどのように選んだらよいのであろうか？これは今考えている現象に対して、適当に時間の始点を選べばよい。物理学においては、質点の時間発展を求める場合があるが、この場合、観測者が考えている時間の始点から質点の時間発展を計算すれば十分である。

1.3.2 時間依存性

物理学においては「物理量」が時間によっているかどうかは非常に重要な点である。もしその物理量が時間に拠っていなければ、それはずっと同じでいる事になり保存量であると言う言い方をする。例えば、地球は太陽の周りを楕円運動しているが、その軌道は平面上にある。何故、地球が平面上を運動するのかと言う問題は地球が持っている角運動量の保存則と密接な関係にある。この角運動量が保存しているため、この角運動量の方向を決める事ができる。そうすると地球の運動はこの角運動量と直交することが簡単に証明できるため、地球の運動が平面になる事が証明できるのである。

1.4　相対性理論の基礎

物理学の基礎方程式はすべてこの時間と空間の中での自然界の運動を記述しようとする学問である。この場合、前述したように座標系を指定するが、ここで重要な原理が存在している。今、A と言う座標系に対して B と言う座標系が等速直線運動をしているとしよう。この時、すべての物理的な観測量は A 系と系 B で同じであると言う事が仮定されている。これを相対性原理と言う。これが成り立たないと、地球上で発展させてきた理論体系が他の宇宙の星では成り立たない可能性がある。これでは折角頑張って理論体系を作ると言う意味がなくなってしまう事になっている。現在までの膨大な検証結果、この相対性原理と矛盾する現象は見つかってはいない。

それではA系と系Bの間にどのような関係式を仮定すれば、相対性原理に矛盾しなくてすむのであろうか？これは良く知られており、Lorentz 変換と呼ばれる変換に対して運動方程式が不変になっていれば良いと言う事である。この Lorentz 変換は座標系間の変換となっていて、この場合、変換を行う空間の事が Minkowski 空間と呼ばれているものである。但し、これは４次元空間ではない。我々の空間は勿論、３次元であり、時間を空間の一部と同一視とすることは出来ない。 Lorentz 変換とはこの Minkowski 空間で $s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ と言う量が不変になるような変換の事である。ここで c は光速である。

1.4.1　Lorentz 変換

今、B 系に対して A 系が一定速度で x 軸に沿って運動している場合を考えよう。この場合、A 系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている．今の場合，B 系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時，A 系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり，時間は別のものになる．それは観測者の時間と考えればよい．この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \tag{1.1}$$

であり， γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式は Maxwell 方程式が A 系でも B 系でも同じ形の微分方程式になる要請を充たすように求められたものである．式 (1.1) で，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \tag{1.2}$$

となり，Galilei 変換の式と一致している．従って，普段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱っても間違える事は無い．実際，地球の公転速度 v が一番速いが，これは $v \simeq 10^{-4}\,c$ であり，光速より十分遅い事がわかる．

1.4.2　相対性理論の重要性

このLorentz 変換自体は極めて単純であり、誰でも簡単にチェックできる式である。しかしこの物理を深く理解することは結構、難しいものとなっている。余程、しっかり考えないと何を言っているか分からない可能性がある。結局、Lorentz 変換はMaxwell 方程式がどの系でも同じになると言う要請から来ている事は前述した通りである。ここでしっかり考える必要があるのは「どの系でも物理的な観測量は同じである」と言う要請である。この「物理的観測量とは何か？」と言う問いかけは極めて重要であり、きちんと自分の言葉で理解しておく必要がある。この講義では少しずつ、物理的観測量とは何かと言う問題に触れて、解説して行こう。

1.4.3　相対性理論の検証

相対性理論というとどうしても歴史的に説明している場合が大半であろうが、勿論、それも重要ではある。しかしここでの講義では科学史的に解説をするというスタンスは取らないで科学の論理として合理性の観点から解説を試みている。

現在、物理学で扱っているすべての自然現象は場の理論の形式で理解されている。そしてこの場の理論は必ずLorentz 変換に対する不変性を持っている。どの理論形式もLorentz 不変である事は絶対条件である。その意味において、系の相対性は現代物理学の基礎であり、これと矛盾するいかなる理論も受け入れる事は出来ない。実験的にも系の相対性は膨大な検証の下に確立している。この事をしっかり理解する必要がある。例外が存在しない事ぐらい、しっかり考えられる人ならば、誰でも理解できる事であろう。

1.5　一般相対論

Einstein が一般相対論に関する論文を発表したのは１世紀近く前のことである。この方程式は星が分布していると計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が変更を受けるだろうと言う方程式である。しかしながらその変更の物理的な理由や原因はすべて仮定されたものであり、自然界からの要請ではない。

1.5.1　超・簡単化された Einstein 方程式

Einstein 方程式とは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式であり、微分幾何の言葉で書かれているため、見かけ上は複雑になっている。ここではこの方程式を時間と空間１次元と近似して方程式を書いておこう。すなわち $g_0(x),\ g_1(t)$ に対する２回の微分方程式のことである．このうちで $g_0(x)$ に対する方程式を

$$\frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} = 2G\varrho_0(x) \tag{1.3}$$

と書こう．これは超簡単化された方程式ではあるが，その基本構造は４次元の Einstein 方程式と同じである．$\varrho_0(x)$ は質量 M の物質により生じた物理的な作用である．これは４次元の Einstein 方程式ではエネルギー・運動量テンソルに対応していて，基本的には星の質量分布である．

- **質量分布記述の座標系：**　ここで問題なのは $\varrho_0(x)$ を記述する座標系は古い座標系と考えられるが，これはどこで設定されたのであろうか？質量分布があると座標系の計量が変化を受けるとしても，それと $\varrho_0(x)$ を記述する座標系との関係が良くわからない．これは因果律を破っていると考えられている．

1.5.2　一般相対論と重力理論の関係

一般相対論がこれまで信じられてきた主な理由は Einstein 方程式から重力場のポアソン型方程式が導出されると考えられていたからである．ところがこの導出を証明することは実は不可能である．その証明には物理的に正当化できない方程式が仮定されているからである．その式とは

$$g_0(x) \simeq 1 + 2\phi_g \tag{1.4}$$

である．こうすると確かに，１次元の重力ポアソン型方程式が導出されることが簡単に確かめられる．これは３次元重力場でも同じである．

• **力学変数と座標系：**　ところが，この仮定の式 (1.4) は物理的に無意味である事がすぐにわかる．それは，計量テンソルは座標系であるのに対して，重力場 ϕ_g は無次元ではあるが，力学変数である事に依っている．これは異なるカテゴリーを足し算しているため，どのように頑張っても物理学の式として承認することには無理がある．

• **一般相対論は相対性理論か？：**　これまで見てきたように、一般相対論は計量テンソルを決める方程式である。しかし星が分布していたらそこの計量が座標の関数として決まるという事は相対性理論ではない。むしろ系の相対性とは矛盾してしまうのであるが、人々は何故、これでよいと思ったのであろうか？

• **重力理論の今後：**　上記に見たように，一般相対論が重力理論と無関係であることが証明されている．それでは今後，重力理論はどうなるのであろうか？この疑問に対しては，幸い新しい重力理論が提案されており，これまでの重力関係のすべての観測結果はこの新しい重力理論により矛盾なく説明されることがわかっている．とくに慣性質量と重力質量の等価性が自然な形で証明された事実が非常に重要である [5].

1.6 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事。

1.6.1 問題 1

Lorentz 変換の式 (1.1) により、s^2 を計算してこれがどの系でも同じになる事を確めよ。具体的には $s^2 = s'^2$ を示せばよい。

1.6.2 問題 2

座標の微分量として

$$dx^\mu \equiv (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \equiv (cdt, dx, dy, dz) \tag{1.5}$$

$$dx_\mu \equiv (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{1.6}$$

を導入しよう。この上付き、下付きの書き方は Bjorken-Drell が便利さのために導入したシンボルである。例えば スカラーの定義は

$$dx_\mu dx^\mu \equiv dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 \tag{1.7}$$

$$\equiv (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{1.8}$$

となっている。このように μ が繰り返しでてきたら、これは
$\mu = 0, 1, 2, 3$ の和を意味するように約束をした事になっている。ただそれだけの事である。ここで Minkowski は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.9}$$

によって導入した．この場合，$g^{\mu\nu}$ はどう書けているか？

1.6.3 問題 3

Einstein は一般相対論でこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時間・空間の関数であるとした。この時、$(ds)^2$ の Lorentz 不変性はどうなると思うか考えよ。

1.6.4　問題 4

真空中を古典的な波が伝播したとしたら、それは系の相対性と矛盾している。重力波を主張する人々はどのように伝播したと思っているのか、各自、自分の言葉で考えて見よ。

1.6.5　問題 5

音波は媒質 (空気や水) の振動により伝播している。この場合、音源 (例えば救急車) と観測者の間の相対性はどうなっていると思うか？

(注) 音波のドップラー効果の式の導出が難しいのは、系の相対性と関係している。それに対して、光のドップラー効果の式の導出は非常に簡単である。これは後の講義で解説しよう。

関連図書

[1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)

[4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)