

物理学講義 3

電磁波の物理学

目次

第3章 電磁波の物理学	1
3.1 電磁波	2
3.1.1 光の理論	3
3.1.2 フォトン(光子)	3
3.1.3 電子と電磁場の相互作用	4
3.1.4 フォトンの状態関数	4
3.1.5 電磁波の発振機構	5
3.2 光と波	6
3.2.1 光のドップラー効果	6
3.2.2 音波	7
3.2.3 音のドップラー効果	8
3.2.4 地震波	8
3.3 フォトンの性質：波長と偏極ベクトル	9
3.3.1 空の青さと光の散乱	10
3.3.2 黒体輻射	11
3.3.3 太陽光発電	12
3.3.4 電子レンジ (Microwave oven)	12
3.4 Homework Problems	14
3.4.1 問題 1	14
3.4.2 問題 2	14
3.4.3 問題 3	14
3.4.4 問題 4	14
3.4.5 問題 5	14
3.4.6 問題 6	14
3.4.7 問題 7	15
3.4.8 問題 8	15
3.4.9 問題 9*	15
3.4.10 問題 10	15

3.4.11	問題 11	15
3.4.12	問題 12	15
3.4.13	問題 13	16
3.4.14	問題 14	16
3.4.15	問題 15	16
3.4.16	問題 16	16
3.4.17	問題 17*	16
3.4.18	問題 18	17

第3章 電磁波の物理学

電磁波とは質量がゼロの粒子の事であり，このためその性質はその波長によって特徴づけられている．電磁波の事をフォトン(光子)と言うが，これは2個の自由度を持っていてそのスピンは1である．

現実の世界ではマクロスケールの数のフォトンが関与するためこれは光として捉えられている．この場合，光は波としての振る舞いがよく見られることになる．しかしながら，媒質を伝搬するものが波として定義されたとしたら，光は波ではない．光は真空中も伝搬できるからである．

電磁波はその波長によって様々な呼び方がされている．波長が長いと電波と呼ばれ，短くなると赤外線や可視光や紫外線となる．さらに短い波長だとX線や線と呼ばれる放射線になっている．

3.1 電磁波

光は日常生活で最も身近な存在であり、同時に非常に重要な役割を果たしている。この光には電波、赤外線、背景輻射、 γ 線などと様々な名前がついているが、それらは波長の違いがあるだけで、すべて同じ光、すなわち電磁波である。その簡単なまとめを下記に書いておこう。

電磁波の波長とその特徴

この表における数字は大雑把な目安として書いてあり、必ずしも正確なものとは言えない。またラムシフトはもともと水素原子における $2s_{\frac{1}{2}}$ と $2p_{\frac{1}{2}}$ のエネルギーレベルの差の事であるが、その差に対応する電磁波の波長を書いている。マイクロ波は電子レンジで使用されている波長領域を書いている。

電磁波	波長 [λ]	エネルギー	周波数	特徴
MF	$\sim 0.4 \times 10^5$ cm	$\sim 0.4 \times 10^{-8}$ eV	~ 1 MHz	電波
VHF	$\sim 0.4 \times 10^3$ cm	$\sim 0.4 \times 10^{-6}$ eV		電波
UHF	~ 40 cm	$\sim 0.4 \times 10^{-5}$ eV	~ 1 GHz	電波
ラムシフト	40 cm	0.44×10^{-5} eV	1 GHz	電波
マイクロ波	15 ~ 45 cm	$\sim 10^{-5}$ eV	0.9 ~ 2.5 GHz	電波
背景輻射	0.8 cm	2.5×10^{-4} eV	50 GHz	電波
赤外線	$\geq 10^{-3}$ cm	≤ 0.1 eV	$\leq 2 \times 10^{13}$ Hz	光
赤	0.8×10^{-4} cm	1.6 eV	4×10^{14} Hz	可視光
紫	0.4×10^{-4} cm	3.3 eV	8×10^{14} Hz	可視光
紫外線	$\leq 10^{-5}$ cm	≥ 10 eV	$\geq 2 \times 10^{15}$ Hz	光
X線	~ 1 Å	~ 10 keV		放射線
線	$\leq 10^3$ fm	≥ 1 MeV		放射線

[注]：放射線の中には α 線、 β 線、 γ 線が良く知られている。このうち、 α 線は He 粒子のビームであり、また β 線は電子ビームである。すなわち、 γ 線以外は粒子線である。それ以外にも重粒子線や中性子線が知られている。

3.1.1 光の理論

光を理論的に理解する事は電磁気学の範囲を少し超えているためかなり難しいものと考えて間違いない。大方の電磁気学の教科書では、Maxwell 方程式から電磁波がでてくると言う書き方をしているが、この表現は必ずしも正しいとは言えない。物質がない時のマックスウェル方程式をベクトルポテンシャルで書くと $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} = 0$ と求まり、これは自由フォトンが満たすべき方程式ではある。しかしこの式は電磁波の存在を示唆してはいても電磁波の生成・消滅とは無関係である。電磁波の生成・消滅は場の量子化を行わない限り理解できなく、また電磁波は生まれたり消えたりする事で初めて物理的に意味のある存在となる [3, 4, 5]。

3.1.2 フォトン (光子)

フォトン (photon) は電磁場 (ベクトルポテンシャル場) を量子化する事により、その結果として場が粒子 (フォトン) になったものと考えてよい。場の量子化を実行する時は、まずベクトルポテンシャル \mathbf{A} を自由粒子の状態で

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \left[c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (3.1)$$

と展開する。ここで $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ が偏極ベクトルである。フォトンの状態を理解するためには場を量子化する必要がある。

- 場の量子化： 場の量子化とは係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k},\lambda}$ を演算子と見なす事である。 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k},\lambda}$ が生成・消滅演算子と呼ばれていてこれらは交換関係式

$\left[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$ などを満たしている。この式 (3.1) の右辺の第 1 項がフォトンを生じさせ、第 2 項が消滅させる項に対応している。光はもはや電場・磁場とは全く関係なく、フォトン粒子と考え、その振る舞いを波として扱えばよい。

- フォトンのエネルギー、運動量とその波長： フォトンのエネルギー $E_{\mathbf{k}}$ とその角振動数 $\omega_{\mathbf{k}}$ は $E_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}$ と結びついている。また運動量 \mathbf{p} と波数 \mathbf{k} の関係は $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ となっている。さらに波数と波長 λ の関係を見ると $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (但し $k = |\mathbf{k}|$) となっている。フォトンは波長により特徴づけられていてその波長が長ければ電波と呼び、可視光 ($\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$) を中心にして更に短い波長だと X-線や γ -線と呼ばれている。

3.1.3 電子と電磁場の相互作用

多くの電磁気学の教科書において、フォトンが電場 E と磁場 B と関係していると言う記述が見受けられる。しかしこれまでの議論で明らかのように、これは間違いである。ベクトルポテンシャル A をゲージ固定した後、その場を量子化したものがフォトンである。これはもはや電場や磁場と関係つけられないし、関係つける必要はさらさない。相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

である。この相互作用から e が相互作用の強さである事が良くわかると思う。この e を結合定数とも言う。ここで重要な事は電磁波の生成・消滅はこの相互作用によってのみ起こっている事である。それはベクトルポテンシャルが式 (3.1) で量子化されている事に依っている。

3.1.4 フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数であるが、フォトンの状態関数は複素数である。これは電磁波の状態関数 $\Psi_{k\lambda}$ が

$$\Psi_{k\lambda} \equiv \langle \mathbf{k}, \lambda | A(x) | 0 \rangle = \frac{\epsilon_{k,\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2)$$

と表されている事から理解される。フォトンの偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ には

$$\epsilon_{k,\lambda} \cdot \epsilon_{k,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \epsilon_{k,\lambda} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.3)$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している。従って、フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直交する平面でそれぞれが直交するような2個のベクトルで成り立っている事が分かる。但し、フォトンには静止系が存在しないため偏極ベクトルの描像を正確に作る事は至難の業である。

• フォトンのスピン： 現実問題として、フォトンが電子と相互作用する瞬間のみ、偏極ベクトルが重要となっている。従って、偏極ベクトルの記述は電子の静止系においてのみ物理的に意味がある対象となっている。フォトンのスピンは1であるが、その自由度は2である。そしてフォトンが電子と相互作用する瞬間において、フォトンと電子のスピンに関する保存則が成り立っている。但しフォトンの偏極ベクトルは Lie 代数を満たさないため、スピンとは性質が少し異なる。しかし偏極ベクトルはランク1のテンソルであるため、スピン1の状態とほとんど同じに扱ってもそれ程、間違えることはない。

3.1.5 電磁波の発振機構

電磁波が生成される機構はどうなっているのでしょうか？ここでは電磁波の発振機構を解説しよう．電磁波の生成には電磁場と電子との相互作用

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (3.4)$$

から考える．但し e は \mathbf{j} に組み入れてある．この相互作用の時間変化は

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = - \int \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3r \quad (3.5)$$

となる．ここで電場は $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ と書けている．よって W は

$$W = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (3.6)$$

となる．右辺第2項は電場で書かれており電磁波とは無関係である．よって式(3.6)の右辺第1項を W_1 として $W_1 \equiv - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r$ を評価しよう．

● Zeeman 効果のハミルトニアン：ここでは非相対論的な量子力学を用いよう．相互作用は Zeeman 効果のハミルトニアンなので

$$H = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (3.7)$$

である．また外場 B_0 は座標 r の関数であるとしている．ここで外場 B_0 を z -軸方向にとっても一般性を失わないので $B_0 = B_0(r)e_z$ としよう．この時、非相対論の量子力学ではカレント \mathbf{j} が

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{m_e} \psi^\dagger(t, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \psi(t, \mathbf{r}) \quad (3.8)$$

で与えられている．但し、 $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ である．これより

$$\frac{\partial \mathbf{j}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{\mathbf{p}} \psi + \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{e^2}{2m_e^2} \nabla B_0(r) \quad (3.9)$$

と計算される．従って電磁波を含む単位時間のエネルギー変化率は

$$W_1 = \int \frac{e^2}{2m_e^2} (\nabla B_0(r)) \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (3.10)$$

と求められた．電磁波はこの式の最後にある \mathbf{A} から発生する．

3.2 光と波

波の問題をきちんと解説することは専門家に対して説明する場合でも非常に難しく、ましてや物理学の素人に解説することは実際問題としては不可能に近い。従って、ここでは音波や地震波を光と対比させながら、その基本的な性質を簡単に説明しよう。光と音波には本質的な相違がある。光子は粒子であり、その状態関数の座標依存性は $e^{i\omega t - ik \cdot r}$ という複素関数で記述されている。一方、音波の状態関数は $\sin(\omega t - k \cdot r)$ などの実関数で表されているが、これは音波が媒質の振動によって伝搬しているからである。ちなみに光の状態関数の絶対値 $|e^{i\omega t - ik \cdot r}| = 1$ はその粒子の存在確率がゼロにならないことを保証しているが、媒質の振動ではその振幅がゼロになっても不思議ではない。

前述したように、光の状態関数 $\Psi_{k\lambda}$ は $\Psi_{k\lambda} = \frac{\epsilon_{k,\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{i\omega t - ik \cdot r}$ と表されているが k , ω は光の波数ベクトルと角振動数である。光は自由粒子であり、この点で取扱いは単純明快である。さらに光が波の性質（干渉や回折）を持っていることは式から明らかであろう。

3.2.1 光のドップラー効果

相対性理論の場合、一つの慣性系が光の速度に近い場合、日常我々が持っている常識と矛盾する場合が出てくる。例えば、その慣性系から光を放つと光の速度はやはり光速 c である。ただし、そのエネルギーが変わるため、近づいてくる慣性系から放たれた光はその波長が小さくなり、逆の場合は大きくなるのである。それは、光のドップラー効果としてよく知られている事である。基本的には、音のドップラー効果と同じであるが、音の場合よりもよりシンプルでわかり易い。音波の場合は地球上にある空気という系がすでに指定されているため、音源と音の受け側以外に、もう一つ地上という系があり、これが音のドップラー効果を複雑にしている。それに対して、光の場合は光が粒子として伝播して来るために、常に光源と光の受け側の2つしか系が存在していないので、単純にローレンツ変換式でドップラー効果が理解できるのである。

● ローレンツ変換： ローレンツ変換の式は粒子の持つエネルギー E と運動量 p に対しても成り立つものである。すなわち

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (3.11)$$

となっている。但し、ここでは星が地球から遠ざかって行き、その星から発せられた光の波長が変化する事を示して行こう。星が波長 λ の光を発するとそ

の運動量は $p = \frac{\hbar c}{\lambda}$ となる．従って，星が速度 v で遠ざかっているとすれば，地球上で観測する光の運動量は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (3.12)$$

となり，光の運動量は減少して見えるのである．これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (3.13)$$

となるので，光の波長は大きくなり，これを赤方遷移という．波長が大きくなる事を「Red Shift」というのは，ただ単に可視光においての光の性質から来ている．可視光においては，赤っぽいのは波長が長く青っぽいのが波長が短いため，波長が長くなることを赤方遷移と呼ぶがその物理的な意味は全くない．

3.2.2 音波

音波は日常的に接しているため誰でもよく知っている物理量である．ところが，これを物理学として解説することは容易なことではない．音は媒質（空気や水）を伝搬するがこれはそれぞれの媒質密度の振動として伝搬しているため密度波とも呼ばれている．この場合，大気中の各点の振動とその伝搬を記述する必要があり，これは多体問題となっていて厳密に解くことは事実上不可能である．通常，音は大気中に広がって伝搬しているので，その伝わり方は3次元的であり，その難しさが想像できるであろう．ここで音波に対して最も単純化された方程式を書いておこう．その導出法もそれ程難しくはないが，ここでは結果だけを書くことにしよう．音波（媒質）の変位 $u(\mathbf{r}, t)$ に対して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.14)$$

の方程式が成り立っている．ここで $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ であり， ρ は大気の密度， P は圧力を表している．但し，それらは場所に依らず一定と仮定している．

一方，人工的に超音波を発生させるとこの波の広がりは少なくなり，ビームに近くなっている．このため超音波の性質は少し単純になり，物理的には取扱い易くなっている．

3.2.3 音のドップラー効果

光や音に関して最もよく知られている現象はドップラー効果であろう。これは興味深いことであるが、前節で解説したように光のドップラー効果は単純でわかりやすいものである。ところが音波の場合、かなり難しくなっている。それは音波が伝搬する大気と音源の運動それと観測者の運動との3体問題になっているからである。

● 観測者が速度 v_{ob} で音源に近づくドップラー効果： 観測者が速度 v_{ob} で音源に近づく時は相対論と同じである。これは音源と媒質が同じ系となっているためであり、観測者が感じる音の速度は観測者と音源との相対性理論(ガリレー変換)によって決まるものである。すなわち、観測者が音源に近づいて行く場合、速度は足し算になっている。従ってこの場合、ドップラー効果による振動数 n' は

$$n' = \frac{v + v_{ob}}{v} n \quad (3.15)$$

となっている。

● 音源が v_{ss} で近づくドップラー効果： 一方、音源が v_{ss} で近づく場合、観測者と媒質が同じ系になっているため、観測者にはその波長が短くなって観測される。従って観測される波長 λ' は

$$\lambda' = \frac{v - v_{ss}}{v} \lambda \quad (3.16)$$

となっている。

3.2.4 地震波

空中と水中を伝搬する波は音波と呼ばれているが、地中を伝搬する波は地震波である。地殻は明らかに固体であるが、ここでも密度波は存在している。波の方程式としては音波と同じであるが、密度と圧力はかなり異なっている。地震波はその変動が急激に起こった場合に生じており、これは音波と同じである。地震波の伝搬速度は $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ であり、音波の20倍程度の速さが観測されている。しかし実際の地震波はさらに複雑であると考えられる。

3.3 フォトンの性質：波長と偏極ベクトル

ベクトルポテンシャルの場を自由粒子の状態で展開した式には偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ があらわれている．光の特徴はその波数ベクトル k と偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ により決められる．

- 偏極ベクトル： この偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ は波数ベクトル k の依存性に加えて偏極の自由度を記述する量子数に対応する λ にも依っている．この $\epsilon_{k,\lambda}$ は基本的にはフォトンのスピンの事であると思って良い．しかしスピンの持っている重要な性質が欠けている．すなわち角運動量の性質 (Lie 代数) を満たしていない．さらにフォトンのスピンの大きさは 1 であるが，フォトンの状態は 2 個しかなく，通常のスピン 1 の状態の 3 個とは異なっている．
- 偏光状態： それでは偏光 (状態) とはどのような現象なのであるだろうか？ 偏光とはフォトンの 2 個の状態のうち，1 個だけが実現された光の事である．そしてこの 2 個の状態を指定するのが偏極ベクトルに現われる λ であり，状態を指定するこの量子数は磁気量子数と同じで必ず保存する量となっている．ここで最も重要な事として，光は波長と偏光状態によってその性質が決定されると言う事である．そして一般的な光，例えば白色光は様々な波長が混じった状態であり，さらに偏光状態のフォトンが等分に混ざっている多数のフォトンの集合体である．以下に簡単なまとめを書いておこう．

- 太陽光： 太陽からくる光は様々な波長と 2 個の偏光状態が等分に混ざったものである．太陽光の偏光に関しては日常の世界にあらわれる事はあまりないが，沢山の波長が混じっている事は虹を見れば明らかである．
- レーザー光： レーザー光はその光がすべて同じ波長を持っている．その偏光に関しては，そのレーザー光によっては偏光している場合もあると考えられている．
- 偏光： 波長は混じっていても光の偏極状態は 1 個だけにした状態の光を偏光と呼ぶ．昔から偏光版を通して偏光した光を取り出す事はよく行われていた．

3.3.1 空の青さと光の散乱

フォトンと荷電粒子との相互作用で生成または吸収される事がある。しかしフォトンと荷電粒子の弾性散乱もよく起こる散乱過程であり、量子場の理論による Compton 散乱の計算は最もよく知られている。これはフォトンが電子に吸収され、直ちにその電子がフォトンを出して、結果としてフォトンと電子の弾性散乱過程に対応していると言うものである。この散乱過程は古典電磁場による計算でも予想以上に実験を再現する事がある。

- 空はなぜ青いか？： 空の青さは光と大気分子との散乱が Rayleigh 散乱 (断面積: $\sigma_R \simeq \sigma_{Thom} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$, λ_0 は定数) である事から理解される。すなわち太陽からの光が大気と衝突する場合、青い光は波長 λ が短い分より多く散乱される。このため地上の観測者からすると青っぽい光が空により多く飛び散りその反射光が見えて空が青っぽく見えている。夕焼けが赤いのは観測者が見る光は散乱されにくい光、すなわち波長の長い赤っぽい光を見るためである。

- Thomson 散乱と Compton 散乱：

フォトンと電子の散乱過程において電子が自由粒子の場合、吸収は起こらない。これはエネルギー・運動量の保存則から禁止されているからである。その代わりに、フォトンと電子の弾性散乱が起こっている。このうち一般的な散乱過程としては Compton 散乱が知られていて、場の理論の教科書における初等の定番問題である。Compton 散乱断面積 $\{\sigma_{Com}\}$ の非相対論極限を取ると Thomson 散乱の断面積 $\{\sigma_{Thom}\}$ が求まるが、これは古典電磁場の理論で計算されたものである。

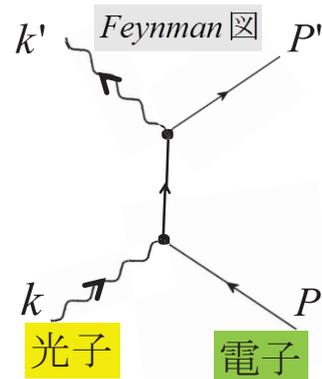


図 3.1: Compton 散乱

- Rayleigh 散乱： 可視光が物質 (N_2 など) と散乱した場合は Rayleigh 散乱として知られている断面積になっている。この散乱断面積は古典電磁場で求められているがその計算はかなり複雑で検証は簡単ではない。しかし場の量子論による計算も実行されており、結果は一致している事が知られている。

3.3.2 黒体輻射

光が生成されるメカニズムは場の量子化というかなり難しい概念を導入しないと理解できないものであった。しかし光自体は我々生物にとって最も身近な存在である。最も重要なものが太陽光であることは明らかであろう。現在の太陽ではその内部において核融合反応が起こっていて、これが太陽の熱エネルギーの直接の源になっている。我々が見ている太陽光は太陽の表面における熱輻射に依っている。

• Planck の公式：ここで Planck の公式を書いておこう。特に覚える必要はないが、量子論の先駆けとなった重要な公式である。この式の導出で最も重要な仮定が「振動数 ν のフォトンのエネルギー E は $h\nu$ であり連続的ではない」と言うものであった。この場合、温度が T の場合の黒体輻射の「強度」 I は

$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3.17)$$

となっている。 k は Boltzmann 定数である。輻射の「強度」とは基本的に言って「その振動数のフォトンの数」だと思って十分である。

• Stefan-Boltzmann 則：有限温度の物質は輻射によりエネルギーを失っている。例えば地球は太陽からの輻射エネルギーを吸収し続けているが、地球の表面温度が一定値であるのは Stefan-Boltzmann 則 $[U = \sigma T^4]$ によるエネルギー放射と太陽からの輻射エネルギーが平衡状態になっているからである。この Stefan-Boltzmann 則は式 (3.17) を ν で積分すれば

$$U = \sigma T^4, \quad \text{但し,} \quad \sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (3.18)$$

と求まる。

• 固体の黒体輻射：ところで、物質がある温度を持っていると光を放射する(黒体輻射)が、有限温度の物質が電磁波をどのように放射するのかと言うメカニズムは難しすぎて理論計算ができていない。現象自体はかなり良くわかっているのだが、放射のメカニズムは物質が量子力学の多体系である事と関係しているため、最も単純な評価の計算さえもこれまでなされてはいない。

3.3.3 太陽光発電

発電形態としてよく使われているのは電磁誘導を利用したものである。これは回転エネルギーを電流に変える方法が基本である。一方、光電効果を利用して光のエネルギーを電流に変える手法を用いているのが太陽光発電である。

- 光電効果： 光が粒子の性質を強く示している現象が光電効果であり、これは光が電子と相互作用して電子にそのエネルギーを与える物理過程である。

その際、格子（電荷 Z ）に束縛されている電子が光子を吸収して自由電子になる。この時光子の運動量を k 、束縛電子のフェルミ運動量を p_F 、その衝突後の運動量を p とすると

$$k + p_F = p, \quad k + E_B = \frac{p^2}{2m_e}$$

が運動量とエネルギーの保存を示したものである。但し E_B は束縛電子の束縛エネルギーである。光子の吸収確率は光子 - 束縛電子の散乱断面積

$$\sigma_K \simeq \sigma_{Thom} \alpha^4 Z^5 2^{1.5} \left(\frac{m_e}{k}\right)^{3.5}$$

- 光の発電機構： 光電効果により光を吸収した電子を電流として取り出し、それを太陽電池としてエネルギー変換したのが太陽光発電である。この場合、半導体を利用する事により電子のエネルギーをうまく電流に変換している。しかし、光と物質の散乱で熱エネルギーに転換する部分をどの程度抑えられるかが高い変換効率を得るポイントであろう。

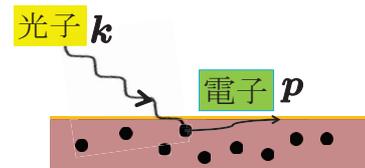


図 3.2: 光電効果

3.3.4 電子レンジ (Microwave oven)

電磁波は光子であり、その質量はゼロであるがその性質は波長によって特徴づけられている事は前述した通りである。そしてそのエネルギーは波長の逆数に比例している。従って電磁波はエネルギーそのものである。この電磁波を利用して物質にエネルギーを与えて熱を起させる様々な方法がある。そのうち、マイクロウェーブを用いた「電子レンジ」は日常的に最もよく知られている電気機器である。この電磁波の波長として 2.45 GHz が日本では使われている。ところが水分子 1 個の共鳴状態は 2.45 GHz からは程遠くそれよりも 3 桁も高い周波数領域にある。しかし電磁波の吸収は必ず電子により起こるのでその吸収メカニズムを考える必要がある。

● 熱による水分子のゆらぎ： 水によるマイクロ波吸収の機構は水分子の共鳴状態による吸収と考えようとするとさらに深刻な問題がある．水は 0 以上であるので，この熱は 0.03 eV 程度の分子運動のエネルギーに対応している．従って，このエネルギーは水分子による吸収エネルギー ($\Delta E \sim 10^{-5}$ eV) よりも遥かに大きいのである．従って，2.45 GHz に対応する状態は大きな分子運動の熱ゆらぎ (Thermal fluctuation) の中にある．しかし電磁波には電子に吸収される以外の相互作用が存在していないので，電子の速度 v_e と分子運動の速さ V_{H_2O} を比較して見て行くしか方法はない．今の場合，電子の速度は $v_e \simeq 6.3 \times 10^{-6}c$ であり，一方，水分子の熱運動の速度は $V_{H_2O} \simeq 1.9 \times 10^{-6}c$ である．よってギリギリで電子の方が速く運動している事がわかる．しかしながら，電磁波と電子の反応で形成された量子状態に対して，ゆらぎがかなり大きな影響を与える事は確かであろう．

● 水分子の量子状態： マイクロ波を吸収する量子状態は励起エネルギーが $\Delta E \simeq 1.01 \times 10^{-5}$ eV である事から集団運動状態の可能性が高い．

それは吸収直後の電子の波長が

$\lambda \simeq 3900 \text{ \AA}$ である事にも依っている．明らかにこれは水の状態になった時に特別に生じる量子状態である．しかし水によるフォトンの吸収過程は共鳴散乱ではない事は確かであろう．恐らくは水においては集団運動状態の準自由電子が存在していて，光電効果と同じメカニズムでこの電子によるフォトンの吸収が起こっているものであろう．マイクロ波を吸収した後の電子は他の水分子との衝突を繰り返して，結果的にマイクロ波のエネルギーが熱エネルギーに変換されるものと考えられる．

これは「水光電効果」(Hydro-photoelectric effect) とでも呼ぶべき物理過程であると考えられる．宇宙に大量に存在している背景放射はマイクロ波であり，「水光電効果」はこの電磁波が水に吸収されて熱エネルギーに変換されている事を示している．この現象が自然現象にどのような影響を与えているかを明らかにする事は今後の研究テーマの一つになるものと思われる．

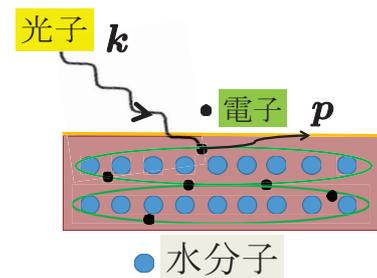


図 3.3: 水光電効果

3.4 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事．

3.4.1 問題 1

質量 m の粒子のエネルギー E とその運動量 p には $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$ の関係式が成り立っている．この場合，粒子の速度 v は $v = \frac{pc^2}{E}$ で定義されている．この場合，光の速度が c となることを示せ．

3.4.2 問題 2

光には慣性系がない．それでは人々が円偏光とか直線偏光などと言っている場合，どの慣性系で議論していると思うか？

3.4.3 問題 3

光は自由粒子の状態しか存在しない．すなわち，束縛状態はない．何故だと思うか，自分の考えを述べよ．

3.4.4 問題 4

背景輻射とは何か，自分の知っていることを述べよ．

3.4.5 問題 5

電磁波の状態関数は $\Psi_{k\lambda} = \frac{\epsilon_{k,\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx}$ と複素数で書かれている．この場合，フォトンの存在確率はどうなっているか？

3.4.6 問題 6

音波の状態関数は実数で書かれている．何故，実数である必要があると思うか？

3.4.7 問題 7

フォトンにはスピンの自由度があり，それは2個である．それでは100個のフォトンがあると上向きのスピンと下向きのスピンの数はどうなっていると思うか？

3.4.8 問題 8

ベクトルポテンシャルは実数関数である．しかしフォトンの状態関数は複素数である．何故，このようなことが可能となったかを考察せよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.9 問題 9*

電子と電磁波との相互作用のハミルトニアンから電荷 e はその強さを表している事が理解できたと思う．マクロスケールの数 (N) の電子が集まっている場合，その電荷は $Q = NE$ であるとして相互作用の強さを表して十分良い近似である．これは何故だと思うか？
(ヒント：Maxwell 方程式の線形性に依っている)

3.4.10 問題 10

通常，スピンが1である粒子は3個の自由度を持っている．しかしフォトン は2個の自由度しかない．これは何故だと思うか？

3.4.11 問題 11

音の速度を v として，観測者がその音源から速度 V で遠ざかって行く時，観測者が感じる実際の音の速度はいくらか？

3.4.12 問題 12

空が何故，青いかを中学生にもわかるように解説せよ．また夕焼けの光が何故，赤っぽいかを説明せよ．

3.4.13 問題 13

光電効果を説明しようとする時、光が波だとすると実験を説明できない。これは何故だと思うか？

(ヒント：波の場合、そのエネルギーは振幅の2乗に比例する。)

3.4.14 問題 14

地球は黒体輻射によって熱エネルギーを放出し、これにより冷却されている。この場合、Stefan-Boltzmann の法則を用いて地球の放射エネルギーを計算せよ。

(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.15 問題 15

地球の表面温度は平均的に言って $T \sim 300 \text{ K}$ である。この場合、黒体輻射による電磁波の波長はどの程度か計算せよ。

3.4.16 問題 16

地球がその熱エネルギーを失う唯一の方法は地球表面からの放射冷却である。この場合、電磁波は空気と散乱するがこれはその大半が弾性散乱であるためエネルギーを失うことはほとんどない。放射冷却が抑えられるのは雲があるときであるが、これは何故だと思うか？

3.4.17 問題 17*

地球表面から放射される電磁波は雲がない限り、そのエネルギーを失うことはほとんどない。しかし CO_2 による温暖化を主張している人々(これは物理屋ではない!)は、放射された電磁波が何故、 CO_2 によって吸収されると思ったのか各自、自分の考えを述べよ。

(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.18 問題 18

最近の研究によると， CO_2 による温暖化の割合は 0.5 % 以下であることが分かっている．この場合，温暖化の原因は太陽そのものである可能性が高い．この場合，地球規模での温暖化や寒冷化に対してどのような物理的なメカニズムが可能であるか，調べてみよ．

(注：これは希望者のみの宿題)

関連図書

- [1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)
- [2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)
- [3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)