1.4　特殊と一般の相対性理論：言葉の解説

アインシュタインが特殊相対性理論という言葉とともに一般相対性理論という表現を用いたため，物理屋以外の人には多少の混乱を招いたことであろう．実際，この両者は同類だと考えている人達が予想以上に多いものである．ここでは，相対性原理，特殊相対性理論そして一般相対性理論について簡単な解説をしよう．但し，特殊とか一般という呼称は本当は適切な表現ではない．実際，特殊相対性理論は最も重要で一般的な変換式であり，特殊ではない．一方，一般相対性理論は系の変換とは関係なく，実は相対性理論ではない．ここでは，この辺の物理事情をきちんと説明しておくことにしよう．

1.4.1　相対性原理

物理学においてすべての出発点は相対性原理にある．この相対性原理は「どの慣性系でも物理的観測量は同じである」とする要請である．ここで慣性系の説明を簡単にしょう．それは例えば地球が止まっていると仮定して，地上の系を静止系としたとき，これが慣性系になっている．この地上で等速直線運動をしている電車の系もやはり慣性系をなしている．この場合，この二つの慣性系では，物理法則が同じになっていると要請している．実際，それが実験的にも成り立っていることは良く知られている事実である．

1.4.2　相対性理論

二つの慣性系では，物理法則が同じであるとしたが，その場合，どのような変換則を考えたらよいのであろうか？実は，この変換則の理論を定式化したのが相対性理論である．

• **Galilei 変換：**　ここで静止系の座標を $R(t,x,y,z)$ と書き，電車の系の座標を $S(t',x',y',z')$ と表記しよう．但し，電車は光速 c と比べて十分ゆっくり動いているとしている．具体的にはリニアモーターカーのスピードが約 140 [m/s] 程度なのに光速は $c=3\times10^8$ [m/s] であるから，条件は十分である．今，電車の系が $x-$ 軸方向に動いているとして，この時２つの座標系には次の関係式がある．

$$x=x'+vt',\quad y=y',\quad z=z',\quad t=t' \tag{1.1}$$

これを Galilei 変換という．これはニュートン方程式を不変に保つ変換式になっている．しかしながら，この変換式は Maxwell 方程式の形を不変に保つ事ができなかった．このため，相対性理論の変換式としては，Galilei 変換が一般的であるとはいえないことがわかる．

1.4.3　特殊相対性理論

S– 系の速度 v が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている．今度の場合，R– 系の座標を $R(t,x,y,z)$ とした時，S– 系の座標は $S(t',x',y',z')$ となり，時間は別のものになる．それは，どの系でも観測者が定義されているので，その観測者が固有の時間を持つことは当然である．相対性理論の本質はここにあり，慣性系では観測者がその系に存在できることが，相対性理論の最も重要なポイントである．そしてどの慣性系でも観測者が物理的な観測量を測定したならば，それらは必ず同じ量になっている．

• **ローレンツ変換：**　この場合 S– 系が x– 軸方向に動いているとして，ローレンツ変換は

$$x=\gamma(x'+vt'),\quad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\quad y=y',\quad z=z' \tag{1.2}$$

であり，$\boxed{\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$ と定義されている．この式は Maxwell 方程式が S– 系でも R– 系でも同じ形の微分方程式になるべきであるという要請を充たすことにより導出されている．この式を見てもわかるように，この変換式は $v<<c$ の時には，Galilei 変換に帰着される．従って，これは「特殊」ではない．むしろ，相対性理論としては Galilei 変換を含むという点では一般的な変換式となっている．

• **４次元空間：**　相対性理論ではよく４次元空間という言い方をしている．これは空間座標の x,y,z と時間 t を一緒にして４次元空間を形成していると考えているからである．ローレンツ変換では確かに時間と空間を一緒にして，あたかも４次元の空間での変換のように書いているし，それなりに意味があることである．それは ローレンツ変換を考える時の数学的な空間は，そのベースとして４次元空間を考える事により，うまく記述できるからである．しかしながら，この４次元空間とはあくまでも数学的な空間であり，実際の空間とは直接の関係はない．例えば，よくベクトル空間を定義して，何次元空間という

言い方が良く使われるが，これも実際の空間とは無関係である．その意味で，相対性理論で使われる４次元空間という表現は，必ずしも物理の本質からすると正しい表現とはなっていない．時間は空間座標とは本質的に異なっている．

• $3 \oplus 1$ **次元空間：**　実際，ダイナミックスを考えると，時間は空間とは全く異なった役割を担っている．ある物理量が時間によるかどうかと言う問題は，物理の中では本質的に重要である．ある物理量 (例えば角運動量) が時間に依らなければ，それは保存量となっている．また，場の量子化においては「場の量」が時間によるか依らないかが場の量子化の一つの条件となっている．それは場の量子化によって，それに対応する粒子が生成されたり消滅されたりする (時間に依っている) からである．

このため，物理学においては空間が３次元であり時間が１次元であることをはっきり示すために $\boxed{3 \oplus 1 \text{ 次元空間}}$ という書き方をよくするが，これが最も適した表現法である．相対性理論はキネマティックスなので，時間と空間を一緒にしても特に問題が生じることはないため，この４次元空間という言い方が定着してしまったのである．

1.4.4　一般相対性理論の未知関数

相対性理論は運動学であり，自然界を記述する物理法則とは直接は関係していない．もう少し正確にいうと「物理の基本方程式は相対論的な変換に対して不変である」ことが必要であり，相対性理論は運動方程式が満たすべき条件となっている．これに対して一般相対性理論はこれとはまったく異なっている．アインシュタインは時空を測るために計量テンソルを導入して，この計量テンソルに対する方程式を構築している．そしてこの方程式に関連する物理を一般相対性理論と呼んだのである．彼が何故「相対性理論 (Relativity)」という言葉にこだわったのかは良くわからない．一般相対性理論の方程式は計量テンソルに対する方程式であるため，慣性系における相対性の現象はどこにも現れていない．これらのことからみても明らかなように，一般相対性理論はある系ともう一つの慣性系との関係を扱う相対性理論とはまったく無関係である．従って，一般相対性理論という言葉の導入はどう見ても不適切としか言いようがないものである．

1.4.5　計量テンソル

それでは一般相対性理論の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とは何であろうか？これは最初は Minkowski 空間の定義から出発したのであろう．Minkowski は４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2=(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2$ を定義したが，これは $(ds)^2$ がローレンツ変換に対して不変なためである．ここでこれをより一般的に書くために，$dx^\mu=(dt,dx,dy,dz)$, $dx_\mu=(dt,-dx,-dy,-dz)$ を導入して $(ds)^2=(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2=g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ として計量テンソルを定義しよう．この場合，$g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$ となり，これは Minkowski の計量である．

• 計量テンソルの拡張：　一般相対性理論の方程式ではこの計量テンソルを拡張して，これが座標の関数であるとして $g^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}(t,x,y,z)$ と書いている．この場合，一般相対性理論の方程式は簡単な式であり，それを言葉で書くと

$$\boxed{g^{\mu\nu}\ \text{で書かれたテンソル量}\ =\ \text{星の質量などから作られたテンソル量}}$$

というテンソル (行列) 方程式となっている．左辺は Ricci テンソルという微分幾何による量が入っているが，それら全ては計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれているので左辺は計量テンソルだと考えて十分である．従って，この方程式は星があると計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が影響されるとしている式である．しかしこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の変化分がわかったとして，それは物理的に何を意味するのであろうか？計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が Minkowski の計量からずれたら，それが物理的にどういう効果があるのか，良くわからない．この一般相対性理論では，こういう基本的な問いかけが欠如している．

• 計量テンソルの座標：　それではこの計量テンソルにでてくる座標 (t,x,y,z) はどの座標系のものなのであろうか？これはやはり慣性系を定義したときの座標系なのであろう．物理学にとって座標系は物理現象の表現空間であり，それをきちんと定義しておく必要がある．自然現象の記述はこの座標系を表現空間としており，その表現空間をいじったら物理法則自体もゆがんでしまい，もはや収拾がつかなくなることは自明の理である．

• エネルギー・運動量テンソルの座標：　一般相対性理論の方程式において左辺は前述したとおり，計量テンソルから成り立っているテンソル量である．一方，右辺はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる量で本当は古典力学で定義するには無理がある量である．しかし一般相対性理論ではそれも特に気にすることはなく，エネルギー・運動量テンソルは星の質量分布関数を用いて書かれている．それではこの場合の座標は何を意味するのであろうか？これは星の質量分布と関係しているのでやはり星の座標を表しているのであろう．この場合，座標の原点は星が分布していたときの重心になる．その原点からみて，星の質量によって計量が少し変わるということを示しているのが一般相対性理論の方程式である．しかし，これは何を意味しているのであろうか？結果的には，このような現象は自然界とは無関係であったということである．

1.4.6　一般相対性理論と重力場

一般相対性理論は重力の理論だと一般的には考えられているが、これはアインシュタインがそのように主張したからであろう。しかし以下に見るように、一般相対性理論を重力の理論と関係つけることは容易ではない。重力場 ϕ_g に対する Poisson 型方程式は $\boldsymbol{\nabla}^2\phi_g = 4\pi G_0\rho$ であり、$g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g$ とおくと確かに重力場 ϕ_g に対する Poisson 型方程式が得られることが知られている。そして、弱い重力場ではこのように置くことができると仮定して一般相対性理論は重力理論であると考えられてきた。しかし、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は方程式の未知関数であり、何故、それが重力場 ϕ_g と関係つけられてこのようにおけるのかという議論はなされていなく、またその理論的な根拠を見つけることはできていない。さらに進んで、$g^{00} \simeq 1 - 2\phi_g$ とおくと重力場が斥力になってしまうことがわかる。この不定性からみても「一般相対性理論は重力理論である」という主張を理論的に正当化することはほとんど不可能であることがわかる。

1.5　一般相対性理論の問題点：直感的解説

一般相対性理論に関してその方程式の詳しい計算を解説することはこの本の目的ではないし，ましてや本の「あらすじ」紹介の所で説明する問題ではない．しかし一般相対性理論がどういうものなのかをある程度知っておいた方がこの本を理解するのにプラスになるものと思う．従って，ここではむしろ直感的に，この一般相対性理論とはどういうもので，どこにどういう問題があるのかを簡略に解説しておこう．

1.5.1　計量 (テンソル) と物差し

一般相対性理論における計量とは物差しのことである．従って，最初にこの計量を導入した根拠は「時間・空間」の物差しを考えようとしたことに対応している．しかし何故，アインシュタインがこの物差しを考えようと思ったのかは不明である．

• **物質の物差し：**　まず，一般相対性理論の物差しを議論する前に，我々の物質における物差し (基本単位) は何であるかを解説しよう．実は，物質を記述する理論は量子力学の方程式である．この場合，物差しは全て電子の質量になっている．もう少し具体的に言うと，電子の質量が最小単位になっていてこれが全ての基本的な物差しを与えている．陽子の質量も原子核の質量も電子の質量の何倍かで測れるので，我々の世界の全ての基本的な物差しは電子の質量であるとして十分である．物質を形成している固体を考える場合には格子とその格子間隔が重要になるが，その格子定数も電子の質量で測られている．

1.5.2　一般相対性理論の物差し

それでは一般相対性理論の物差しである計量テンソルには，基本単位に対応する長さスケールが入っているのだろうか？実はこれが一般相対性理論の最も深刻な問題点なのである．一般相対性理論の方程式には基本的な定数スケールが入っていない．それでは一般相対性理論で空間が膨張したと主張する時，何と比べて空間が膨張したと考えるのであろうか？

• **「点」が出発点：**　一般相対性理論で空間の膨張を考える時，その出発点は「点」となっている．もともと空間の各点に対する方程式であるため，空間の膨張もまずは各「点」を考えるのは当然ではある．さらに，スケールがない

からどうしても「点」から始めざるを得ないことも確かである．しかしこれには直感的に言ってかなり無理がある．実際,「点」を何倍しても点でしかない．これは点に大きさがないためそれに何をかけてもやはり「点」でしかないのである．その意味で，ビッグバン模型が「点」から膨張したと主張されても，どのように膨張するのかその描像を描くことができていない．実際，一般相対性理論の研究者にこの点を問いかけて見ても有意な答が返ってくることはない．

読者は，それではその「点」に何かを足して (掛け算ではなく足し算で) 行けば膨張するのではないか，と思われるかも知れない．しかし，この場合，足し算するそのスケールがどうしても必要になってしまうのである．それに足し算したら，それは「点」ではなくなっている．

• **スケール不在：**　この問題点は，結局，一般相対性理論に基本的なスケールが存在しないことにあり，この基本スケールの不在がこの方程式がわかり難い最も大きな理由となっている．従って一般相対性理論の問題点を解決することは本質的に不可能であるとしか言いようがないものである．

1.5.3　等価原理

一般相対性理論には重要な仮定がある．等価原理と呼ばれているものであるが，これは等加速度運動をしているエレベータの「空間」と一様重力下における「空間」が等価であるという仮定である．しかしこの仮定は正当化できないことがすぐにわかる．ここでは混乱を避けるため，このエレベータの空間の代わりに「等加速度運動の電車」を考えて，これと「等速直線運動の電車」との対比で議論を進めよう．

• **等加速度運動の電車：**　問題は「等加速度運動の電車」という空間が定義できないことである．等加速度運動をしているのは電車の箱であり，その箱の空間ではない．これは等加速度運動をしている系が慣性系ではないことと関係している．実際，この「等加速度運動の電車の空間」に観測者を定義することはできない．

• **慣性系と等加速度運動の電車の空間の相違：**　箱が動くことと空間が移動することは別次元の問題であることは，それこそ思考実験を考えなくても明らかである．それは慣性系における空間の定義と関係している．慣性系ではその空間に観測者を定義できる．この場合，観測者が例えば，等速直線運動の電車の箱の中 (慣性系) にいたとして，その観測者を原点とした慣性座標系を定義することができる．この場合，その電車の箱を取っ払っても観測者に影響する

事はない．これが慣性系の空間が観測者とともに存在しているとしてよい物理的な意味合いである．

一方，等加速度運動の電車 (エレベータ) の空間の場合，そこに観測者がいたとしてその箱を取っ払ってしまうとそこに観測者は存在できない．観測者が空間と一緒にいるからである．これは，観測者が慣性系のみに要請できることと関係している．そしてその仮定は十分に検証されて，物理学の基本になっている．一方において，等加速度運動系などというものは，物理学上，一般相対性理論を除いて議論されることもなく，従ってこの系が問題になることもない．ここでコメントであるが，加速度がある系に載って物理を議論する事はよくある．例えばニュートン力学では「回転系」ではニュートン方程式が変更を受けて，遠心力やコリオリ力があらたにでてきている．これは単に座標変換によりでてくる力で，勿論，良く理解されている現象である．

1.5.4　計量テンソルの座標

一般相対性理論が計量テンソル $g^{\mu\nu}(t,x,y,z)$ に対する方程式であることは前述したとおりである．そしてこの方程式を解くことも数学的にはまったく問題ないことは確かである．ところがここでその方程式の解をみつけたとして，それが物理的にはどのような意味があるのかという疑問が全く議論されていない．

• **空間スケールが時間の関数？：**　一般相対性理論の方程式の解が求まった後，人々は座標の空間スケール (ただしそれは無次元) と時間とを関係つける式を求めている．しかしこれが何を意味しているのかよくわからない．まさか人々がニュートン力学と同じだと考えて空間スケールを時間の関数として見たとは考えられないが，それにしてもこれは物理の基本常識から相当ずれている．時間と空間は物理学における表現空間である事は前述したが，次元を持たない空間スケールが時間の関数として変化するということは，一体，何を意味しているのであろうか？「点」に何をかけても，それが大きくなったり小さくなったりすることはなく，そもそもその数学的な意味さえ不明である．

関連図書

[1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009

[5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", (McGraw-Hill Book Company,1964)

[7] J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (addison-Wesley,1967)

[8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, "Global Positioning System", Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)

[9] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), " Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Result