0-1 物理の準備

Maxwell 方程式

→ これがすべての基礎

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \, i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$\mathbb{E}$: 電場

$\mathbb{B}$: 磁束密度

ρ : 電荷密度

μ_0 : 透磁率

ε_0 : 誘電率

$\mathbb{E}(\mathbb{r}, t)$

$\mathbb{B}(\mathbb{r}, t)$

$\rho(\mathbb{r})$

$i(\mathbb{r})$

→ 場所によっている!!

0-2 数学の準備

0-2-1 ベクトル $\underbrace{\text{内積}}_{\text{スカラー量}}$, $\underbrace{\text{外積}}_{\text{ベクター量}}$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{e}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$$

0-2-2 微分

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: 偏微分

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}$: y と z をとめておいて x だけで微分すること

● $\boxed{\text{合成微分}}$ $\phi(\mathbf{r}(t))$ のとき

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$= (\nabla\cdot\phi)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

但し $\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

● $\boxed{\text{divergence}}$ (発散)

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$\equiv \mathrm{div}\,\mathbf{E}$ とも書く

物理的な意味：

$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauss法則)

$\mathbf{E}$ が ρ から流れ出る

または

流れている「源」が ρ である

③ 微小量 Δx で考える

(1) $\phi(x(t))$ のとき

$$\Delta\phi \equiv \phi(x(t)+\Delta x) - \phi(x(t))$$

$$= \frac{\Delta\phi}{\Delta x}\cdot\Delta x = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\Delta x$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \underset{\Delta t\to 0}{\frac{\Delta\phi}{\Delta t}} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}$$

(2) $\phi(x(t), y(t))$ のとき

$$\Delta\phi \equiv \phi(x(t)+\Delta x, y+\Delta y) - \phi(x, y)$$

$$= \phi(x+\Delta x, \underline{y+\Delta y}) - \phi(x, \underline{y+\Delta y})$$

$$+ \phi(x, y+\Delta y) - \phi(x, y)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\Delta y$$

ただし
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \dfrac{\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x, y)}{\Delta x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \equiv \dfrac{\phi(x, y+\Delta y) - \phi(x, y)}{\Delta y} \end{cases}$$

よって
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad //$$

◎ gradient (勾配)

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\mathbb{E} = -\nabla \phi}$$ とかく

ϕ : 電位 という
(スカラーポテンシャル ともいう)

何故、こう書けるか？

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{E} = 0}$$ が Maxwell eq. の中にあるから。

$\mathbb{E} = -\nabla \phi$ より

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\nabla \times \nabla \phi = 0$$

は自動的に満たされる

No. 4/2/
Date 9

◎ No charge ($\rho = 0$)

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$$

$\mathbb{E} = -\nabla\phi$ を入れると

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

↓

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$

どんな意味があるのか？

答：$\boxed{\phi = \dfrac{\alpha}{r}}$ (α：定数) ($r \neq 0$ のとき)

が上式をみたす!!

∵

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = -\frac{1}{r^3} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

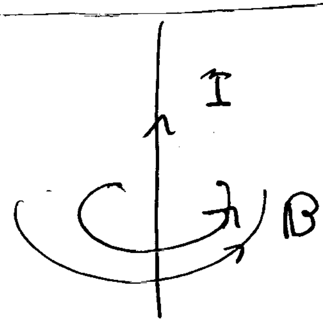
よって

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right) = 0$$

但し $r \neq 0$ が重要

◎ rotation : $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \, \mathbf{i}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \equiv \mathrm{rot}\, \mathbf{B}$$



電流があると
「うず」ができる

0-2-3 積分 (Integral)

$\boxed{\text{積分}}$: 公式は絶対に覚えること

少なくとも 公式がどこに のっているか知っていること!!

1. 線積分

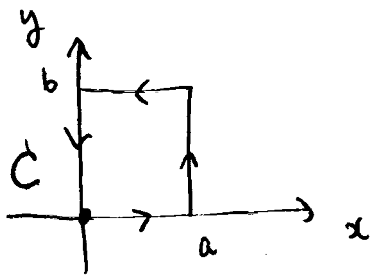
線に沿って積分する
積分は 1次元
但し 3次元空間で行う

$$\boxed{I = \int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbf{s}}$$

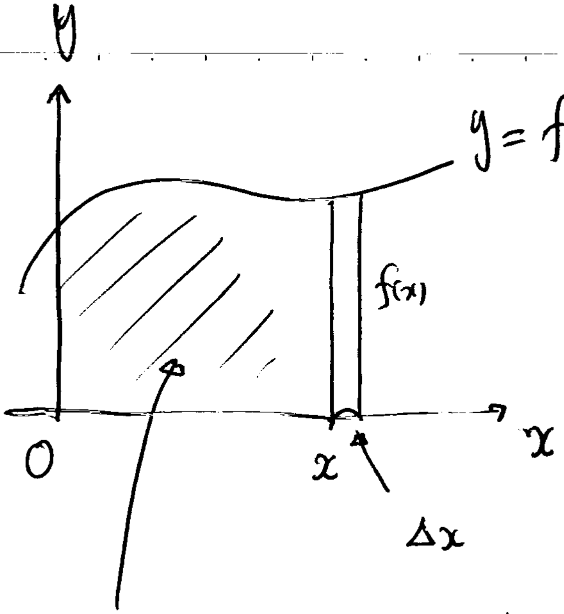
$\mathbb{A}$ という量を C という線に沿って積分する

(Example) ①

$$\mathbb{A} = (x^2+y^2,\ xy,\ 0)$$



$$d\mathbf{s} = (dx,\ dy,\ 0)$$



$$S(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

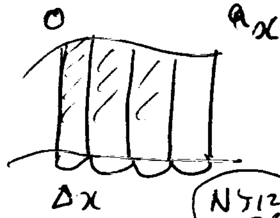
$$S(x+\Delta x) = S(x) + \Delta x \cdot f(x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ とすれば

$$\boxed{f(x) = \frac{dS}{dx}}$$

積分用法



Nコに分割

$$\sum_i f(x_i)\,\Delta x$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{x}{N}}$$

$$\boxed{x_i = \Delta x \cdot i}$$

$$\sum_i f(x_i)\,\Delta x \quad (N \to \infty)$$

$$\equiv \int_0^x f(x)\,dx = S(x)$$

とおく.

2. 面積積分

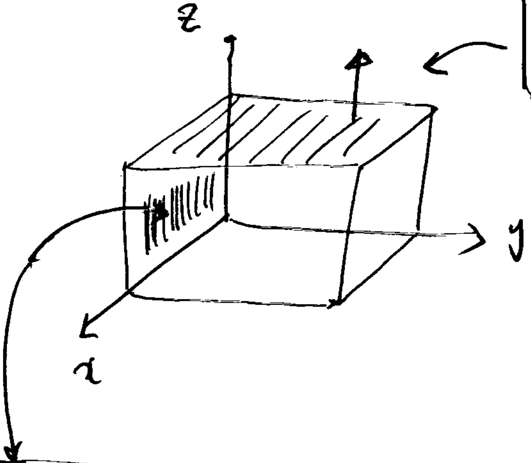
$$I = \int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \cdot dS$$

↑ 微小面積 dS が
その面の法線方向の向きのベクトル

$\boxed{\text{必ず外向き}}$

(a) 直方体



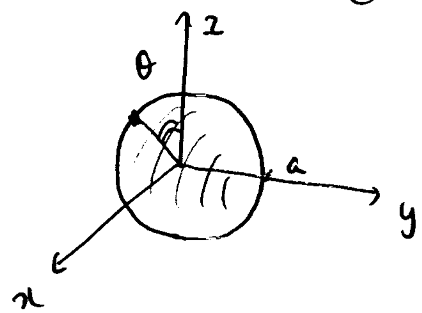
$$\boxed{d\boldsymbol{S} = dx\,dy\,\boldsymbol{e}_z}$$

$$\boxed{d\boldsymbol{S} = -\,dx\,dz\,\boldsymbol{e}_y}$$

体積に対して
常に外向き

これが定義

(b) 球面上 (半径 a)



$$\boxed{d\mathbf{S} = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \mathbf{e}_r}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$ とする

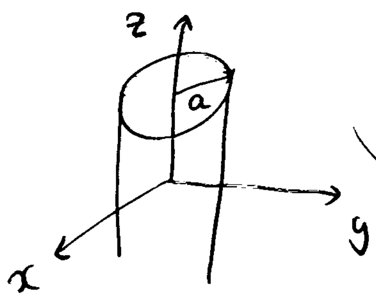
$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int A_r \cdot a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= A_r \cdot a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 4\pi a^2 A_r \quad //$$

(c) 円筒上



$\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$ とする

$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int A_r \cdot a\, d\theta\, dz$$

$$= 2\pi a \int A_r \cdot dz$$

$$d\mathbf{S} = a\, d\theta\, dz \cdot \mathbf{e}_r$$

3. 体積積分

$$\int d^3r \equiv \int dx\,dy\,dz$$

極座標

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\,dr\,d\theta\,d\varphi}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{r^2\sin\theta}$$

但し

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

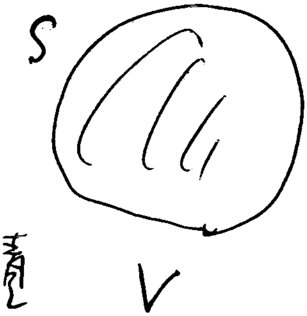
$$\int d^3r = \int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

0-3 Gaussの定理とStokesの定理

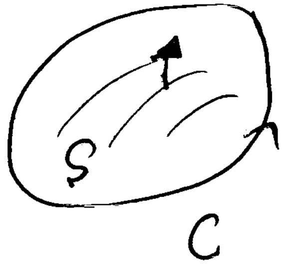
◎ Gauss : $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\cdot d^3r = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$

◎ Stokes : $\displaystyle\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$



V : 有限の体積
S : その体積を囲む面積

S : 曲線 C で囲まれた面積

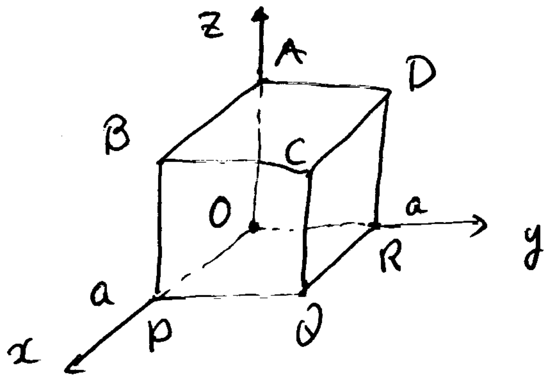


(右ねじ則)

◎ Gaussの定理の証明

[3つのstepで考える]

1. Step 1　1辺がaの立方体を考える



$$\int_{立方体} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\cdot d^3r = \int \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \int \frac{\partial A_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \int \frac{\partial A_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int \Big[A_x(x,y,z)\Big]_{x=0}^{x=a} dy\,dz + \int \Big[A_y(x,y,z)\Big]_{y=0}^{y=a} dx\,dz + \int \Big[A_z(x,y,z)\Big]_{z=0}^{a} dx\,dy$$

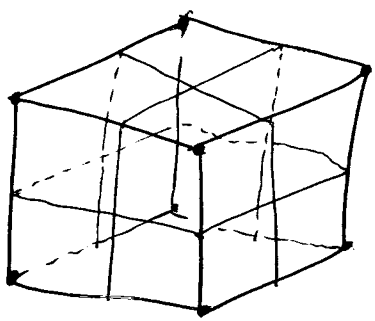
$$= \int \Big(A_x(a,y,z) - A_x(0,y,z)\Big)\,dy\,dz + \int \Big(A_y(x,a,z) - A_y(x,0,z)\Big)\,dx\,dz + \int \Big(A_z(x,y,a) - A_z(x,y,0)\Big)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\text{面 PQCB}} A_x\,dy\,dz - \int_{\text{面 ORDA}} A_x\,dy\,dz + \cdots$$

$$= \int_{\text{全表面}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$\mathbf{n}$: 法線方向の単位ベクトル
体積から見て外向

[Step 2]　8つの立方体に分割



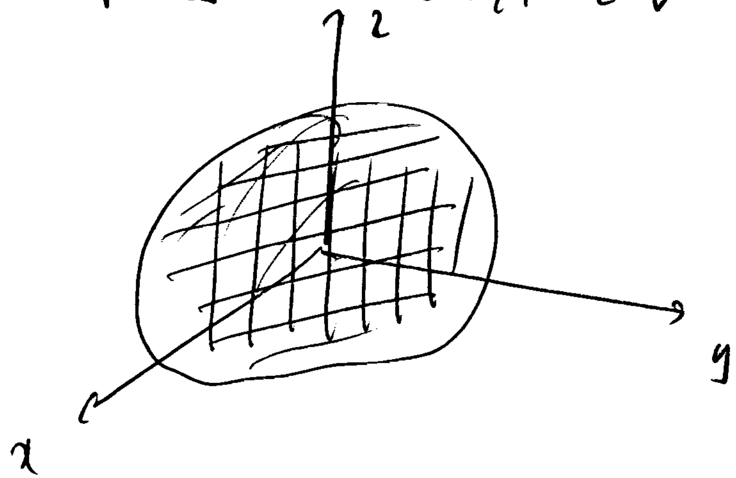
面が重なった
ところは逆向きで
打消合う

$$\int_{\text{全体積}} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,d^3r = \sum_i \int_{[i\text{ 立方体}]} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,d^3r$$

$$= \sum_i \int_{\left(\substack{i\text{-立方体}\\\text{の表面}}\right)} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\substack{\text{全体の}\\\text{表面}}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

No.
Date 18

[Step 3] 任意の体積 V



[有限個の立方体に分割]

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d^3r = \sum_i \int_{\left(\substack{i\text{立方体}\\\text{の体積}}\right)} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d^3r$$

$$= \sum_i \int_{\left(\substack{i\text{立方体}\\\text{の表面積}}\right)} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

重なるところは打消し合う

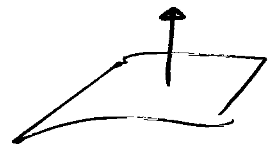
$$= \int_{\left(\substack{\text{全体}\\\text{の表面}}\right)} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

分割を無限に細かくする

$\to V$

$$\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\, d^3r = \int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

[法線] $\boldsymbol{n}$:



$|\boldsymbol{n}| = 1$

面に垂直なベクトル
常に外側に向く

[接線] $\boldsymbol{t}$:

$|\boldsymbol{t}| = 1$

面に平行

ここでいう面とは
微小面積 の意味