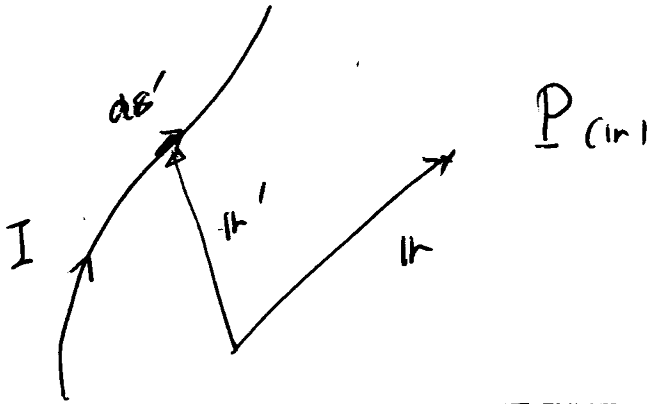
10. 電流の作る磁場

10-1 Biot-Savart の法則



$d\boldsymbol{s}' \equiv d\boldsymbol{r}'$

$\boxed{d\boldsymbol{s}' = (dx', dy', dz')}$

の意味

$$\boxed{d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{s}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}}$$

↑ Ampère の法則と同じもの

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}}$$

◎ Biot-Savart の法則の導出

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \end{cases}$$

(磁荷はない)

(1つの方程式)

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ より

$\boxed{\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}}$ と書くことができる

$\because$ $\nabla \cdot \mathbb{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbb{A}$

$= \nabla \times \nabla \cdot \mathbb{A} = 0$

$\mathbb{A}$: ベクトルポテンシャル という

◎ ポイント : $\mathbb{A}$ でかくと自動的に $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ は みたされている

$\mathbb{B}$ は 3つの成分

$\mathbb{A}$ も 3つの成分 1つ 自由度が余分

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ を使っているので

Ampere の法則 $\quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\boxed{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{i}}$$

ここで $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ と とることができる

(1つ自由度が余分)

$\Updownarrow$ ゲージ不変性

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ とおいたが

$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \cdot \chi(r)$ とおいても

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$ となる

よって $\quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \chi = 0$

となるように χ を選ぶ

(ゲージ固定という)

i の方向を z 軸方向とする

$$\boxed{\nabla^2 A_z = -\mu_0 i_z(r)} \qquad (\, \boldsymbol{i} = i_z \boldsymbol{e}_z \,)$$

$$(\ \nabla^2 A_x = 0 \ , \ \nabla^2 A_y = 0 \ )$$

$A_x = 0$, $A_y = 0$ ととって十分

この式は $\nabla^2 \phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ と同形.

$$\therefore \boxed{A_z(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i_z(r')\, d^3r'}{|r - r'|}}$$

(証明 : $\nabla^2 \dfrac{1}{|r - r'|} = -4\pi\, \delta(r - r')$ に注意.

$$\nabla^2 A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i_z(r') \underbrace{\left(\nabla^2 \frac{1}{|r - r'|} \right)}_{-4\pi\, \delta(r - r')} d^3r'$$

$$\therefore \nabla^2 A_z = -\mu_0 i_z$$)

電流 i の方向が任意でも

$$\boxed{\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i(\mathbf{r}')\, d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

これより

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 r'$$

ここで $\left(\nabla \times \left(\frac{i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{i_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{i_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$$= - \frac{i_z (y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{i_y (z - z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{\left(i(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right)_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$ より

$$\boxed{\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'}$$

ここで

$$\int \mathscr{i}\, d^3r' = I\, d\mathbf{s}'$$ と書ける

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}$$

$(d\mathbf{s}' = d\mathbf{r}'$ と同じ$)$

Biot - Savart $\Longleftrightarrow$ Ampere

$$\nabla \times \mathbb{E} = 0$$

$\mathbb{E} = -\nabla \Phi$ とかける.

$\mathbb{E}$　3つの自由度

Φ　1　〃

方程式を使ったから