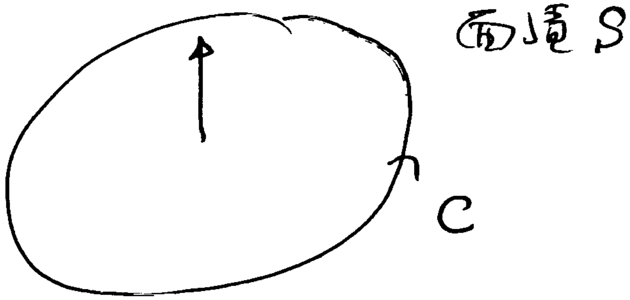
10-4 Stokesの定理

任意のループ C

任意のベクトル量 $\mathbb{A}(r)$

に対して



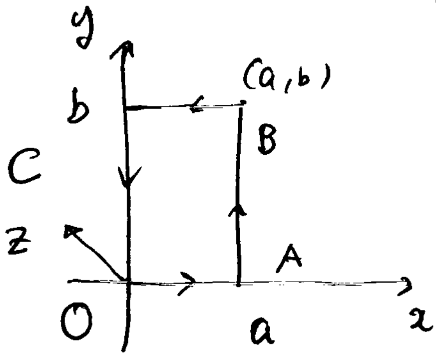
$$\boxed{\int_S \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \oint_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r}}$$

が成立する。<u>Stokesの定理</u>

[証明]

[1] Step 1： ① 面を xy 平面に選ぶ

② 長方形を考える



このとき

$$d\mathbb{S} = dx\,dy\,\mathbb{e}_z$$

$$\nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \cdot dx\,dy$$

となる。

S : 長方形

$$\int_S (\nabla \times \mathbb{A}) \cdot d\mathbb{S} = \int_S \frac{\partial A_y}{\partial x}\, dx\, dy - \int_S \frac{\partial A_x}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^b \left[A_y(a, y, z) - A_y(0, y, z)\right] dy$$

$$- \int_0^a \left[A_x(x, b, z) - A_x(x, 0, z)\right] dy$$

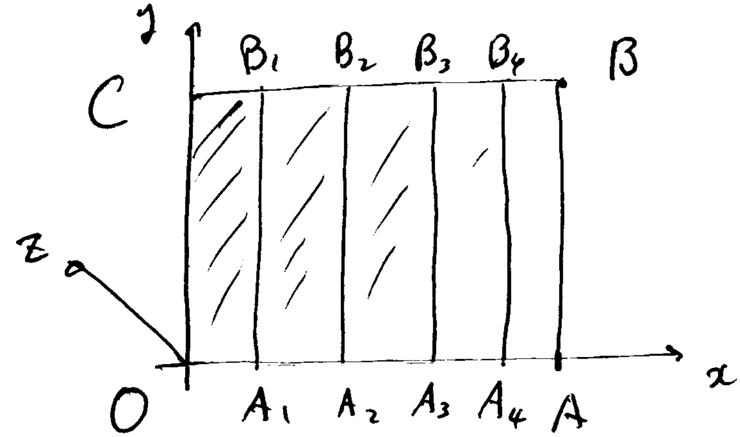
$$= \int_A^B A_y\, dy - \int_O^C A_y\, dy - \int_C^B A_x\, dx + \int_O^A A_x\, dx$$

$$= \int_O^A A_x\, dx + \int_A^B A_y\, dy + \int_B^C A_x\, dx + \int_C^O A_y\, dy$$

$$= \oint_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} \quad //$$

$$\therefore \int_S \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r}$$

(2) Step 2 : 面を分割する



$$\int_{[OABC]} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \int_{OA_1B_1C} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} + \cdots$$

$$+ \int_{A_4ABB_4} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$$

それぞれの分割された面では

$$\int_{OA_1B_1C} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \int_{OA_1B_1CO} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{w}$$

$$\vdots$$

$$\int_{A_4ABB_4} \nabla \times \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = \int_{A_4ABB_4A_4} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{w}$$

が成立する

ところが

$$\int_A^B \mathbb{A}\cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbb{A}\cdot d\mathbf{r}$$

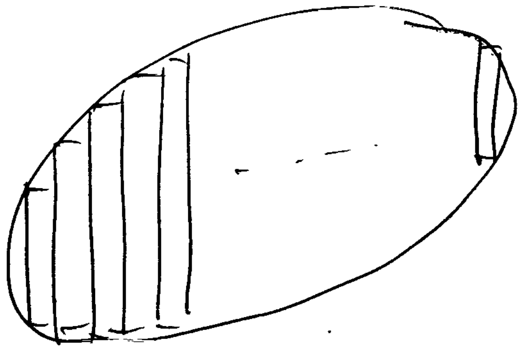
これあるので 逆向きのところは
打消し合う

よって

$$\int_{OABC} \nabla\times\mathbb{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{OABCO} \mathbb{A}\cdot d\mathbf{r}$$

が成立する

[3] Step 3 : 任意ループ



N個に分割する

$$\int_S \nabla\times A\cdot dS = \sum_i \int_{S_i} \nabla\times A\cdot dS$$

$$= \sum_i \int_{\left(\substack{S_i\text{を囲む}\\ \text{ループ}}\right)} A\cdot dr$$

重なったところは
打消し合う

$$\therefore \int \nabla\times A\cdot dS = \int_{\substack{\text{外周の}\\ \text{ループ}}} A\cdot dr$$

N→∞ とすれば Stokesの定理となる