10-6 電流に働く力

磁束密度 $\mathbb{B}$ の中

電流 I が流れている

$$\boxed{d\mathbb{F} = I\, d\mathbf{s} \times \mathbb{B}}$$

電流に働く力

力は通常「点」に作用するもの

「線」に作用するは考えにくい

力の源 は

Lorentz 力

$$\boxed{\mathbb{F} = e\mathbb{E} + e\mathbf{v} \times \mathbb{B}}$$

$\Downarrow$

$e\mathbf{v} = I\, d\mathbf{s}$ に対応

電流の流れ

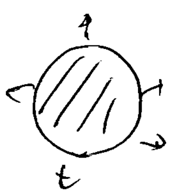
$$\int \underset{(密度)}{n}\, e v \, d^3r = \int i \, d^3r$$

$$= I \cdot ds$$

$\boxed{\text{流れとは}}$ （粒子がどれだけ流れたか）

単位時間

$$j \equiv \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t}$$



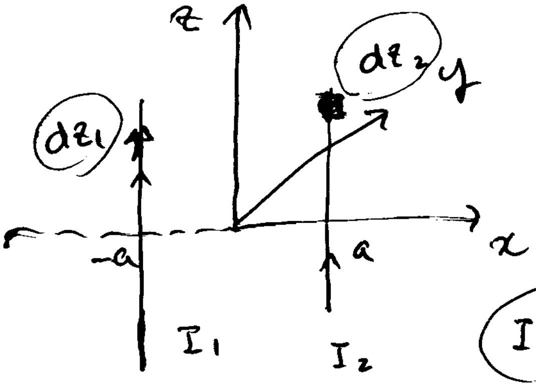
$$\underbrace{\int j_n \cdot dS}_{流れでる量} = -\underbrace{\boxed{\frac{\Delta \rho}{\Delta t}}}_{電気の増加量}$$

単位時間に

（電荷）

単位時間に

[Example ①] 平行電流間の力



I_2に注目

$$d\mathbb{F} = I\, d\mathbb{s} \times \mathbb{B}$$

$$d\mathbb{s} = (0, 0, dz_2)$$

$$(d\mathbb{F}_2)_x = -I_2\, dz_2 \cdot B_y$$

$\mathbb{B}$: I_1が作る磁束密度

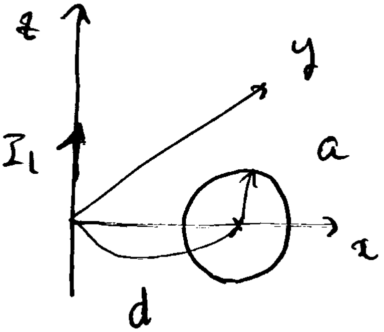
$$B_y = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2a)\, dz_1}{\left((2a)^2 + z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot 2a \cdot \frac{2}{(2a)^2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$$

$$\therefore \boxed{d\mathbb{F}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\, dz_2\, \mathbb{e}_x}$$

単位長さあたりの
意味がある量

[Example②]



I_1 の作る磁場は

$$\mathbb{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\, e_y \quad (x軸上)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{r} &= (d + a\cos\theta,\ 0,\ a\sin\theta) \\ ds &= (-a\sin\theta\, d\theta,\ 0,\ a\cos\theta\, d\theta) \end{aligned} \right.$$

$$\mathbb{F} = \int I_2\, ds \times \mathbb{B}_1$$

$$= I_2 \int \left(-a\sin\theta\, d\theta\, e_x + a\cos\theta\, d\theta\, e_z\right) \times \frac{I_1 \mu_0}{2\pi(d + a\cos\theta)}\, e_y$$

$$= \frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi} \int \left[\frac{-\sin\theta\, d\theta}{d + a\cos\theta}\, e_z - \frac{\cos\theta\, d\theta}{d + a\cos\theta}\, e_x \right]$$

◎ $$F_z = \frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi} \int \frac{d(\cos\theta)}{d + a\cos\theta} \qquad (t = \cos\theta)$$

$$\downarrow$$

(i) 上半面 : $0 \le \theta \le \pi$ $\quad (1 \le t \le -1)$

$$F_z = -\frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi a} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right)$$

(ii) 下半面 : $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $(t : -1 \leq t \leq 1)$

$$F_z = \frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi a} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right)$$

$$F_x = -\frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{d + a\cos\theta}$$

$$= -\mu_0 I_1 I_2 \left[1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right]$$

公式 $\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d + a\cos\theta} = \frac{d}{a} \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right)$

◎ Lorentz 力の導出

Free particle の Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$$

電磁場との相互作用

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - e\phi}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} : \text{vector potential} \\ \phi : \text{scalar potential} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$$

Gauge invariance

$$\begin{cases} \mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla \chi \\ \phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$ で $\mathbf{B}, \mathbf{E}$ は不変

χ は任意の関数

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + e\dot{r}\cdot A - e\phi}$$

は $A \to A' - \nabla\chi$, $\phi' \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$

の変換において不変. (ゲージ不変性)

(Proof)

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + e\dot{r}\left(A' - \nabla\chi\right) - e\left(\phi' + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + e\dot{r} A' - e\phi' - e\frac{d\chi}{dt}$$

$$\therefore \quad L = L' - e\frac{d\chi}{dt}$$

Lagrangian に全微分が入っていても運動方程式は不変

● 運動の方程式

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 + e \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} - e\phi$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z) - e\phi$$

x:
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + e A_x(\boldsymbol{r})\right) = e\left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - e \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ここで
$$\frac{d A_x(\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

を代入すると

$$m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$
$$= e\left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - e \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} = e \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - e\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - e \frac{\partial \phi}{\partial x} - e \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\therefore\ m\ddot{x} = e\left(\dot{y}\cdot(\nabla\times A)_z - \dot{z}\,(\nabla\times A)_y\right)$$
$$-e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$\begin{cases} \mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A} \\ \mathbb{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\mathbb{A}}{\partial t} \end{cases}$$ だから

$$\boxed{m\ddot{\mathbb{r}} = e\,\dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{B} + e\mathbb{E}}$$

Example ① 一様な磁場, 電場中

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (0, 0, E)$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \dot{y} B \mathbf{e}_x - \dot{x} B \mathbf{e}_y$$

よって

$$\begin{cases} m\ddot{x} = e\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -e\dot{x}B \\ m\ddot{z} = eE \end{cases}$$

● z方向 : $z = \frac{eE}{2m} t^2 + C_1 t + C_2$

C_1, C_2 は定数

● x, y方向 : 一回積分できる

$$m\dot{x} = eBy + c_0$$

これを $\ddot{y}$ の式に代入すると

$$m\ddot{y} = -\frac{e^2B^2}{m} y - \frac{ec_0}{m} B$$

$$\therefore \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -\frac{eB}{m^2}C_0$$

但し、$\omega = \dfrac{eB}{m}$ とおいた。

今 $\hat{y} = y + \dfrac{eBC_0}{\omega^2 m^2}$ とおくと

$$\ddot{\hat{y}} + \omega^2 \hat{y} = 0$$

これはすぐ解けて

$$\hat{y} = A\sin(\omega t + \delta)$$

よって

$$\boxed{y = A\sin(\omega t + \delta) - \frac{eBC_0}{\omega^2 m^2}}$$

と成る

これにより

$$\boxed{x = -A\cos(\omega t + \delta) + \omega y_0 t + C_0 t + D_0}$$

と求まる　$y_0 = -\dfrac{eBC_0}{\omega^2 m^2}$

$C_0 = 0$, $D_0 = 0$ のとき

$$\begin{cases} y = A\sin(\omega t + \delta) \\ x = -A\cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

これは

$\underline{x^2 + y^2 = A^2}$ の $\underline{\text{円運動となる}}$