11-2 磁性体 (magnetic media)

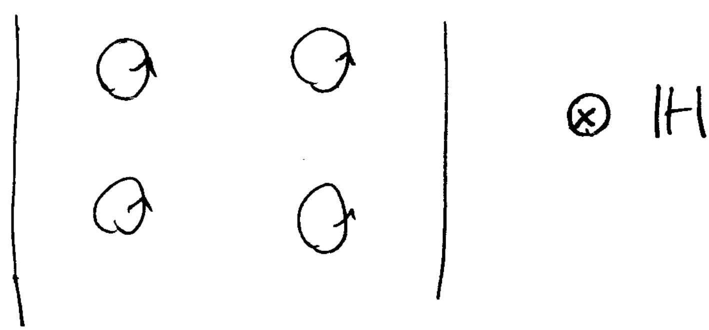
磁化 (magnetization)

$$\boxed{\mathbf{M} = n\,\mathbf{m}}$$

磁気双極子モーメント

磁場をかけると

磁気双極子ができる



x-y 平面内に円電流ができる

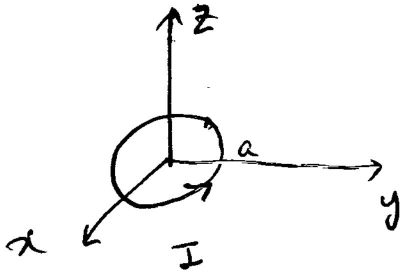
m

方向は z 軸

No.

Date 47

11-2-1 円電流の作るベクトルポテンシャル



ベクトルポテンシャル $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')\,d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$\int \mathbf{i}\,d^3r' \Rightarrow I\,d\mathbf{s}$ として

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}$$ となる

遠方では $\left(|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{s}|\right)$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})}{r^2} + \cdots\right)$$

$$\begin{cases} \mathbf{s} = a\cos\theta\,\mathbf{e}_x + a\sin\theta\,\mathbf{e}_y \\ d\mathbf{s} = -a\sin\theta\,d\theta\,\mathbf{e}_x + a\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$ とかける。から

$\oint d\mathbf{s} = 0$ より 展開の第1項はゼロ

$$\left(\mathbb{a} \times (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = (\mathbb{a} \cdot \mathbb{c}) \mathbb{b} - (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) \mathbb{c} \right)$$ 49'

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbb{i}(\mathbb{r}') d^3 r'}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}'|}$$ の導出

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{i}$$, $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$ として

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \mu_0 \mathbb{i}$$

$$-\nabla^2 \mathbb{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A}) = \mu_0 \mathbb{i}$$

ここで ゲージを適当にとって $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$ とする。

$$\therefore \quad \nabla^2 \mathbb{A} = -\mu_0 \mathbb{i}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbb{r} - \mathbb{r}')$$ であるから

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbb{i}(\mathbb{r}') d^3 r'}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}'|}$$ となる

$\left(\mathbf{r} = (x, y, z) \right)$

より

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\, d\mathbf{s}$$

$$\therefore \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} (ax\cos\theta + ay\sin\theta) \times (-a\sin\theta\, d\theta\, \mathbf{e}_x + a\cos\theta\, d\theta\, \mathbf{e}_y)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left[-a^2 y \pi\, \mathbf{e}_x + a^2 x \pi\, \mathbf{e}_y \right]$$

ここで $\mathbf{m} \equiv I\pi a^2 \mathbf{e}_z$ とすると

$$\mathbf{m} \times \mathbf{r} = I\pi a^2 (x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x)$$ より

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}}$$ となる.

このとき $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を計算すると

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} \right]$$

となる.

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbb{m} \times \mathbb{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbb{m} \times \nabla \frac{1}{r}$$

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbb{m} \times \nabla \frac{1}{r} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbb{m} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) - (\nabla \cdot \mathbb{m}) \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right]$$

- $\cancel{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbb{r})}$　原点を除いてゼロ (rは十分遠く)
- $(\nabla \cdot \mathbb{m}) \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = (\nabla \cdot \mathbb{m}) \left(-\frac{\mathbb{r}}{r^3} \right)$

$$\therefore \mathbb{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbb{m}) \frac{\mathbb{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbb{m}}{r^3} - \frac{3(\mathbb{r} \cdot \mathbb{m})\mathbb{r}}{r^5} \right] \quad //$$

これは

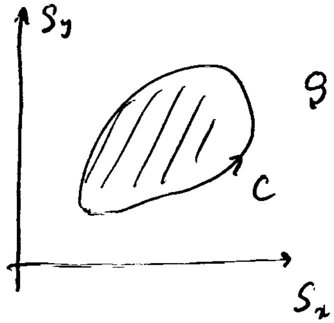
$$\mathbb{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbb{m} \cdot \mathbb{r}}{r^3} \right)$$ とも書ける

(参考:
電気双極子

$$\mathbb{E} = -\nabla \phi = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbb{p} \cdot \mathbb{r}}{r^3} \right)$$

● 一般のループの場合

(x-y 平面上に存在)



$$\begin{cases} \displaystyle\int_C s_x \, ds_x = 0 \\ \displaystyle\int s_x \, ds_y = S \\ \displaystyle\int s_y \, ds_x = -S \end{cases}$$

よって

$$\int_C (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} = S\,(x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x)$$

$$\mathbf{m} = IS\,\mathbf{e}_z \quad \text{として}$$

$$\mathbf{m}\times\mathbf{r} = IS\,(x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x)$$

$$= I\int_C (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\, d\mathbf{s}$$

これより

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

No

Date 50

磁化 (Magnetization) $\mathbb{M}(\mathbf{r})$ の作る

ベクトルポテンシャル

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{n\,\mathbb{m} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbb{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

n : 磁気双極子 $\mathbb{m}$ の分布関数

(電荷分布のときは $\rho(r)$ であった)

$\mathbb{M} = n\,\mathbb{m}$ として

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbb{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbb{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'$$

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{\nabla' \times \mathbb{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' - \underbrace{\int \nabla' \times \left(\frac{\mathbb{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'}_{\text{表面電流}\ \to\ 0}\right]$$

$$\therefore\ \boxed{\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\nabla' \times \mathbb{M}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'}$$

又，ここで $\dot{i}_M \equiv \nabla' \times \mathbb{M}(\mathbf{r}')$ と定義すると

$$\mathbb{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{i}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

如く 電流が作られた

↑

$\mathbb{M}$ による電流

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)_x d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(M_y(\mathbf{r}') \times \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' \quad - (y \leftrightarrow z)$$

(部分積分

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial M_y(\mathbf{r}')}{\partial z'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \quad - (y \leftrightarrow z)$$

$$+ (\text{surface term})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left(\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right)_x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\therefore \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left(\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

全電流 $\underline{i_T = i + i_M}$ となる

より

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i_T = \mu_0 (i + i_M)$$

$$i_M = \nabla \times \mathbb{M} \quad \text{より}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbb{B}}{\mu_0} - \mathbb{M} \right) = i$$

$\mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbb{B} - \mathbb{M}$ とすれば

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{H} = i}$$ となる

このとき $\underline{\mathbb{B} = \mu_0 (\mathbb{H} + \mathbb{M})}$ である.

Ampereの法則は

$\int \mathbb{H} \cdot d\mathbf{r} = I$ となる.

◉ 磁束密度 $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = \mu_0 (\mathbb{H} + \mathbb{M})$$

$\mathbb{M} = \chi_m \mathbb{H}$ とかける

χ_m : 磁気感受率 という

よって

$$\mathbb{B} = \mu_0 (1+\chi_m) \mathbb{H} = \mu \mathbb{H}$$

$\mu = \mu_0 (1+\chi_m)$

μ : 透磁率 という

● $\chi_m > 0$: 常磁性体 (paramagnetic)
$\mathbb{B}$ を強くする

● $\chi_m < 0$: 反磁性体 (diamagnetic)
$\mathbb{B}$ を弱くする

● 強磁性体 : $\mathbb{B}$ と $\mathbb{H}$ が非線形
(ferromagnetic)

[磁気モーメント まとめ]

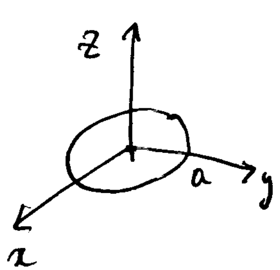
No 12/8
Date 54

◎ $$\mathbb{m} \equiv \frac{1}{2} I \int \mathbf{s} \times d\mathbf{s} \quad (定義)$$

$$\int I\, d\mathbf{s} = \int \mathbf{i}\, d^3 r = e\mathbf{v}$$
$(\mathbf{s} = \mathbf{r})$

$$\therefore\ \mathbb{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times e\mathbf{v}$$
$$= \frac{e}{2m} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$
$$\therefore\ \boxed{\mathbb{m} = \frac{e}{2m} \mathbb{L}} \quad (\mathbb{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} : 角運動量)$$

◎ 円電流



$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r$$
$$d\mathbf{r} = a\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbb{m} = \frac{1}{2} I \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$
$$= \frac{1}{2} I a^2 \cdot 2\pi\, \mathbf{e}_z$$
$$\therefore\ \mathbb{m} = I \pi a^2 \mathbf{e}_z$$

◎ 磁気モーメントが作る磁束密度 $\mathbb{B}$

◎ ベクトルポテンシャル $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{|r - s|}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \oint (r \cdot s)\, ds$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3}\, r \times \underbrace{\frac{I}{2} \int s \times ds}_{m}$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times r}{r^3}}$$

◎ 磁束密度 $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = \nabla \times A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(m \times \nabla \frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[m \left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) - (\nabla \cdot m)\left(\nabla \frac{1}{r}\right) \right]$$

$$\left(\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta(r),\ (\nabla \cdot m)\left(\nabla \frac{1}{r}\right) = (\nabla \cdot m) \frac{-r}{r^3} \right)$$ より

$$\mathbb{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \cdot m) \frac{r}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m}{r^3} - \frac{3(m \cdot r)\, r}{r^5} \right]$$

これは $\mathbb{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{m \cdot r}{r^3}\right)$ とも書ける.