12. 電磁誘導

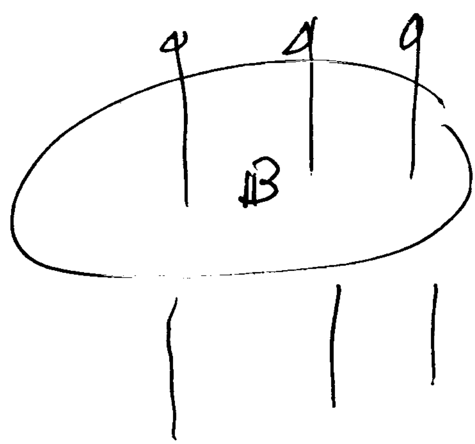
12-1 Faradayの法則

磁束密度 $\mathbb{B}$ が時間変化するとき

磁束 Φ

$$\Phi \equiv \int_S \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S}$$

閉じた回路をつらぬく磁束



面に垂直な成分を足しあげる

磁束が時間によると

$$\underline{V = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

の起電力が生じる

Faradayの法則という

$$V = -\frac{d}{dt}\int \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = -\int \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\, d\mathbb{S}$$

一方．$V = \oint \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \int \nabla\times\mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}$

$$\therefore \int_S \left(\nabla\times\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbb{S} = 0$$

任意のSに対して成立する

⇓

$$\boxed{\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}}$$

Maxwell eq. の一部

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

この式は $\mathbb{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$

をかいたことより導かれる

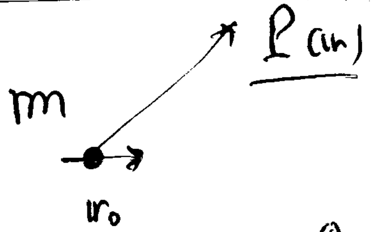
∵

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\nabla \times \nabla\phi - \nabla \times \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

(Because, $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$)

Example ① 磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ が
一定速度 $\mathbf{v}$ で動くときの起電力を求める
(電場)



このときのベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}.$$

ここで $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t$ と動く

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{だから}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{m}\times(-\mathbf{v})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{3\,\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}\right]$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{3\,\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}\right]$$

$\boxed{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 \Rightarrow \mathbf{r}}$ と取りかえれば

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{v}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}\times\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^5}\right]$$