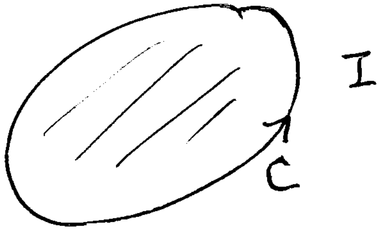
12-2 インダクタンス



［閉回路に電流 I が流れている］

磁束 : $\Phi = LI$　このLをインダクタンスという

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{s}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$ より

$$\Phi \propto I$$

● 磁場のエネルギー U によって

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$ でLを定義してもよい

◎ 閉回路のエネルギー

$$U = \frac{1}{2}\int i \cdot A \, d^3r \qquad \left(\leftarrow \int i \, d^3r = I \int ds\right)$$

$$= \frac{1}{2} I \int_C A \cdot ds$$

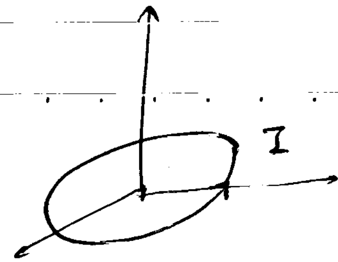
$$= \frac{1}{2} I \int_S \nabla \times A \cdot dS \qquad (\text{Stokes}の定理)$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{1}{2} I \int B \cdot dS}$$

$$\int B \cdot dS = \Phi \quad より$$

$$U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (\Phi = LI)$$

[Example ①]



円電流
(半径 a)

- 厳密に求めるのはむずかしい
- 原点での $\mathbb{B}$ (どこでも同じと仮定する)

$$\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{s} \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3}$$

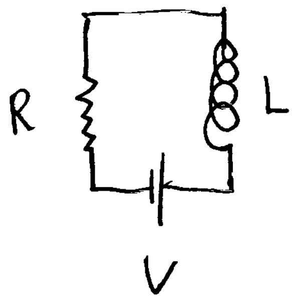
$\mathbf{s} = a\mathbf{e}_r$, $d\mathbf{s} = a\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta$ より

$$\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^3} \cdot 2\pi a^2\, \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2a}\, \mathbf{e}_z$$

$$\Phi \simeq \int \mathbb{B} \cdot d\mathbf{S} \simeq \frac{\mu_0 I}{2a} \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a}{2} I$$

$$\therefore \boxed{L = \frac{\mu_0 \pi a}{2}}$$

● 閉回路 (非定常)



$$V = RI + \frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi = LI$ より

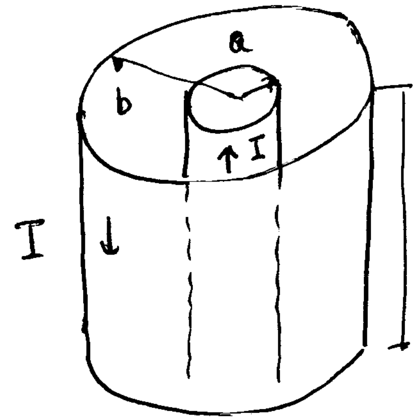
$$RI + L\frac{dI}{dt} = V$$

$$\therefore \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{V}{R}$$

$t=0$ で $I=0$ とすれば

$$\boxed{I = \frac{V}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right)}$$

[Example 9]



半径 a の円筒表面に電流 I が上向きに流れる

半径 b の円筒表面に電流 I が下向きに流れる

このときのインダクタンス L を求める

磁束密度 $\mathbb{B}$

$$\begin{cases} \text{(i)} & r<a & B_\theta = 0 \\ \text{(ii)} & a<r<b & B_\theta = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \text{(iii)} & r>b & B_\theta = 0 \end{cases}$$

よって磁場のエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int |\mathbb{B}|^2 d^3r$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int B_\theta^2 \cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\cdot\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2\cdot 2\pi l\cdot\int_a^b \frac{r\,dr}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} l \ln\frac{b}{a} \qquad U = \frac{L}{2}I^2 \text{ より}$$

$$\underline{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}} \quad \text{となる}$$