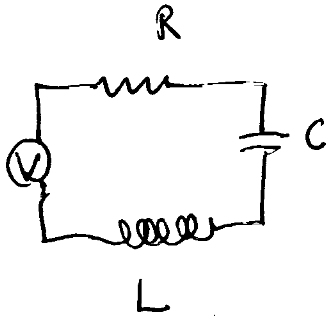
12-3 LCR 回路



$$V = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

(i) V : 定数

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad \text{より}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

$I(t) = I_0 e^{\gamma t}$ の形を仮定する

$$\gamma^2 + \frac{R}{L}\gamma + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\therefore \gamma = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0$ のとき

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right]$$

2つ初期値を与えると A, B が決まる

(ii) $V = V_0 \cos\omega t$ のとき

$$\frac{dV}{dt} = -\omega V_0 \sin\omega t$$ だから

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{\omega V_0}{L}\sin\omega t$$

$$= \frac{\omega V_0}{L}\, R_e\, e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$= \underbrace{\frac{\omega V_0}{L} e^{\frac{\pi}{2} i}\, e^{i\omega t}}$$

の Real part.

$$\underline{\frac{d^2 \tilde{I}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{\tilde{I}}{LC} = \frac{\omega V_0}{L} e^{\frac{\pi}{2} i}\, e^{i\omega t}}$$

を解いて $\underline{I = R_e\, \tilde{I}}$ とすればよい

◎ 特解 : 同のことをみつける

$$\tilde{I} = \tilde{I}_0\, e^{i\omega t}$$ とすると

$$\left(-\omega^2 + \frac{R}{L} i\omega + \frac{1}{LC}\right)\tilde{I}_0 = \frac{\omega V_0}{L}\, i$$

$$\therefore\ \tilde{I}_0 = \frac{i\omega V_0}{L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + i\frac{R\omega}{L}\right)}$$

$$\boxed{\therefore\ \tilde{I}_0 = \frac{V_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}}$$

$$\tilde{I}_0 = \frac{V_0\, e^{-i\delta}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\begin{cases} \cos\delta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\[2ex] \sin\delta = \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{cases}$$

これより 特解は

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{V_0\, e^{i(\omega t - \delta)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

その Real part が解

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

この特解に

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

の一般解を加える

$$I = A e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t + \delta_0)$$

これより

$$\boxed{I(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t + \delta_0) + \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta)}$$

$$Z \equiv R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

を インピーダンス(複素) という

このとき

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta)$$ とかける

(注) $\hat{D}$: 線形微分オペレータ

e.g. $\hat{D} = a\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c$

⓪ $\hat{D}\,\tilde{f}(t) = g(t)$ の解法

1. 特解をみつける
これを $f^{(0)}(t)$ とする

$$\hat{D}\,f^{(0)}(t) = g(t)$$

2. $\hat{D}\,f(t) = 0$ の一般解を求める

$\hat{f}(t)$ は

$\hat{f}(t) = f(t) + f^{(0)}(t)$ で与えられる

① $\hat{D}\left(\hat{f} - f^{(0)}\right) = 0$

この一般解を $f(t)$ とすれば

$$\hat{f} - f^{(0)} = f(t)$$

$$\therefore\ \hat{f} = f(t) + f^{(0)}$$ //

Example①

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\sin\delta t$$

特解 : $x_0 = a\sin\delta t$ とおく

$$(-\delta^2 + \omega_0^2)\,a = A$$

$$\therefore\ a = \frac{A}{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \delta^2}\sin\delta t}$$

よって $x = C_1\sin\omega_0 t + C_2\cos\omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \delta^2}\sin\delta t$