13. 電磁波

13-1 Maxwell equation

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\nabla\cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (\text{Gauss}) \\
\nabla\cdot \mathbb{B} = 0 & (\text{no magnetic monopole}) \\
\nabla\times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} & (\text{Faraday})
\end{array}
\right.
$$

$$\nabla\times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \qquad (\text{Ampere})$$

◎ Ampere の法則

$$\nabla\times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}$$

$$\nabla\cdot \nabla\times \mathbb{B} = \underline{\mu_0 \nabla\cdot \boldsymbol{i} = 0}$$

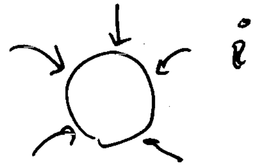
これは連続の方程式

$$\underline{\nabla\cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$ と矛盾

$$\underline{\nabla\cdot \nabla\times \mathbb{B} = \mu_0 \left(\nabla\cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0}$$

となるべき

連続方程式



$$\nabla\cdot i + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\cdot i = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$Q = \int\rho\, d^3r$$

$$\int_V \nabla\cdot i\, d^3r = -\frac{d}{dt}\int\rho\, d^3r = -\frac{d}{dt}Q$$

$$\int_S i_n\, dS = -\frac{dQ}{dt}$$

表面から流れでる総電荷（単位時間当り）

電荷がどのぐらい減ったか

Gaussの法則から

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ だから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbb{E}$$ よって

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0\left(\nabla\cdot i + \varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\right)$$

$$= \nabla\cdot\left[\mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\right]$$

となるべき.

Ampereの法則 → Maxwell eq.

$$\boxed{\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 i + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}}$$

とすれば連続の方程式と

矛盾しない!

No
Date 7/2

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$ （c：光速）なので

$$\underline{\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}}$$ と書ける

$$\underline{\boldsymbol{i}_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}}$$

を変位電流という

● 真空中での波（光）⟹ 電磁波

真空中 $\rho = 0$, $i = 0$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbb{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \mathbb{B} + \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbb{B})}_{=0} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{B}$$

$$\therefore \boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{B} = 0}$$

波の方程式になっている.

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 e^{i\mathbb{k}\mathbb{r} - ik_0 t}$$ とすれば

$$\mathbb{k}^2 = \frac{1}{c^2} k_0^2$$

$$\therefore |\mathbb{k}| = \frac{k_0}{c}$$

$k_0 = \omega$ と書くと $\boxed{\omega = c|\mathbb{k}|}$ 光の分散関係式

13-1-2 電磁場のエネルギー

仕事率

$$仕事率 = \mathbb{F}\cdot\mathbb{v} \qquad (但し\ \mathbb{v}=\dot{\mathbb{r}})$$

↕ Newton 力学

$$m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F}$$

$$m\dot{\mathbb{r}}\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{r}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2\right) = \mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{r}}$$

$T=\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2$ は運動エネルギー

$$\underbrace{\frac{dT}{dt} = \mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{r}}}_{} \equiv W$$

仕事率と定義

単位時間あたりの
運動エネルギーの増加

$$W = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = \dot{\mathbf{r}} \left(e\mathbf{E} + e\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right)$$

↑ 電磁場中の力

$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0$ より

$$\boxed{W = e\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}}$$

N個電荷があるときは

$$W = Ne\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}$$

↓ 分布しているときは

$$W = \int \rho\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}\, d^3r$$

$\rho \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{i}$ だから

$$\therefore\ W = \int \boldsymbol{i} \cdot \mathbf{E}\, d^3r$$

$\int W dt$ が仕事になる

[W(仕事率)の計算]

$$W = \int \mathbf{i} \cdot \mathbb{E} \, d^3r$$

Maxwell eq.

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$ を使い

（但し $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ ）

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int \left(\nabla \times \mathbb{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbb{E} \, d^3r$$

ベクトルの公式

$$\underline{\nabla \cdot (\mathbb{E} \times \mathbb{B}) = \mathbb{B} \cdot \nabla \times \mathbb{E} - \mathbb{E} \cdot \nabla \times \mathbb{B}}$$ を使うと

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int \left(\mathbb{B} \cdot \nabla \times \mathbb{E} - \nabla \cdot (\mathbb{E} \times \mathbb{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \cdot \mathbb{E} \right) d^3r$$

- ここで Faradayの法則

$$\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$$ を使うと

$$W = -\frac{1}{\mu_0}\int\left(\mathbb{B}\cdot\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\cdot\mathbb{E}\right)d^3r$$
$$-\frac{1}{\mu_0}\int\nabla\cdot\left(\mathbb{E}\times\mathbb{B}\right)d^3r$$

- ここで Poyntingベクトル を定義

$$\mathbb{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbb{E}\times\mathbb{B}$$

これより

磁場のエネルギー　　電場のエネルギー

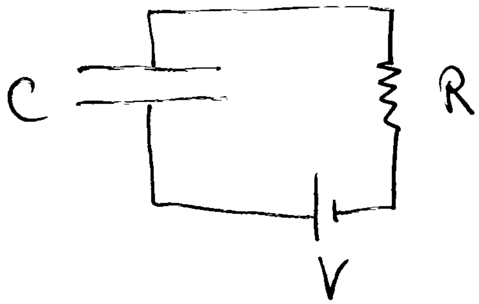
$$W = -\int\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\mu_0}\mathbb{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbb{E}^2\right]d^3r$$
$$-\int S_n\cdot dS$$

↑ 輻射エネルギーの流れ
(電磁波は無限遠まで伝播する)

Example ①

コンデンサーは

円板とする (半径 a, 距離 d)



コンデンサーの容量 C

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2} = \frac{V}{d}$$

$$\therefore \quad C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$$

回路に流れる電流を I とすれば

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

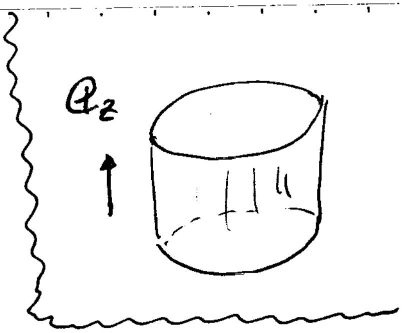
$$V = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

乃 $t=0$ で $Q=0$ とすれば Q の解は

$$Q = VC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$ となる

これより

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



◎ コンデンサーの電場 $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2} e_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) e_z$$

$\mathbb{E}$ が時間によるので変位電流 i_d が考えられる

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \frac{V}{\pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

このとき、この電流による磁束密度 $\mathbb{B}$ は

Ampère の法則より　(半径 r の円を考える)

$$\int_C \mathbb{B} \cdot ds = \mu_0 i_d \cdot \pi r^2$$

$$\therefore B_\theta = \frac{\mu_0}{2} r i_d = \frac{\mu_0 r}{2} \frac{V e^{-\frac{t}{RC}}}{\pi a^2 R}$$

よって Poynting ベクトル $\mathbb{S}$ を

$r=a$ (表面)で求めると

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbb{E} \times \mathbb{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathbb{e}_z \times \frac{\mu_0 a}{2} \frac{Ve^{-\frac{t}{RC}}}{\pi a^2 R}$$

$$\therefore \underline{\mathbb{S} = \frac{V^2}{2\pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathbb{e}_r}$$

となる。

これは単位時間当り。

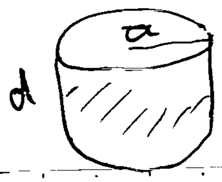
全時間で積分すると

$$\underline{\int_0^\infty S_n dt = \frac{V^2}{2\pi a R d} \cdot \frac{RC}{2} = \frac{CV^2}{4\pi a d}}$$

但し. $C = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{d}$ を使った

全エネルギーは $\int S_n dS$ だから表面積をかける

表面積 $= 2\pi a d$



よって

$$E_{tot} = \frac{CV^2}{4\pi a d} \cdot 2\pi a d = \frac{1}{2} CV^2 \quad //$$

801

[[2a ξ 9 2 ξ u d']]

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$$

$$E_C = \int \frac{\varepsilon_0}{2} |E^2| \, d^3r$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{(VC)^2}{(\varepsilon_0 \pi a^2)^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 \pi a^2 d$$

$$= \frac{d}{2 \varepsilon_0 \pi a^2} (VC)^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 = \frac{CV^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2$$

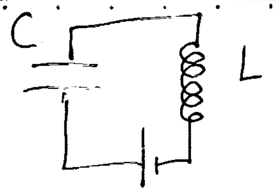
$$E_R = RI^2 = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{V^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$W = -\frac{d}{dt}\left(E_c + E_R\right)$$

$$\int W \, dt = -\left(E_c + E_R\right)\Big|_0^\infty$$

$$= -\left[\frac{CV^2}{2} - \left(\frac{V^2}{R}\right)\right]$$

［・保存系］



$$V = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \underline{C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}}$$

$$= L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}$$

$$\therefore \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = \frac{V}{L}$$

$\omega^2 = \frac{1}{LC}$ とおくと　$t=0$ で $\begin{cases} I = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$ とすると

$\cancel{Q = Q_0 \sin\omega t}$, $Q_0\omega = I_0$

$$\underline{Q = VC(1-\cos\omega t)}$$

$$\underline{I = \omega VC \sin\omega t}$$

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2}\mathbf{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}(1-\cos\omega t)\,\mathbf{e}_z$$

$$\underline{i_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2}\sin\omega t\ \mathbf{e}_z}$$

$$\underline{B_\theta = \frac{\mu_0}{2}r\,\frac{\omega VC}{\pi a^2}\sin\omega t}$$

ンデンサー ◉　$\displaystyle\int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbb{E}^2 d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2}\right)^2 \cdot \pi a^2 d = \frac{d}{2\varepsilon_0 \cdot \pi a^2}(VC)^2(1-\cos\omega t)^2$

$$= \frac{1}{2}CV^2(1-\cos\omega t)^2$$

イル ◉　$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2(VC)^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}\frac{1}{C}(VC)^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}CV^2\sin^2\omega t$

$$E_T \fallingdotseq \left(\int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbb{E}^2 d^3r\right) + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV^2\left[(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t\right] \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}CV^2\left[2 - 2\cos\omega t\right] = CV^2(1-\cos\omega t)$$

$W = -\frac{d}{dt}E_t$　　よって $\displaystyle\int W dt = -E_t\Big|_0^T = -CV^2\left[1-\cos\omega t\right]_0^T = 0$