13-2 Maxwell方程式の解

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\
\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}
\end{cases}
$$

- 真空中 $\Longrightarrow$ $\rho = 0$, $i = 0$
  (電荷も電流もない!)

$$
\begin{cases}
\nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbb{E} = 0 \\
\nabla \times \mathbb{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbb{B} = 0
\end{cases}
$$

$$
\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}
$$

一方 $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbb{E})}_{=0} - \nabla^2 \mathbb{E}$

だから

$$
\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{E} = 0}
$$

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t}$$

として解を求めてみる.

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbb{E} = -\mathbb{k}^2 \mathbb{E}_0 e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} = -\omega^2 \mathbb{E}_0 e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t} \end{cases}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{E} = 0$$ に代入すると

$$\underline{\omega^2 = \mathbb{k}^2 c^2}$$

$$\therefore \boxed{\omega = c|\mathbb{k}|}$$

であれば解になっている.

$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$ であるから

$\mathbb{E}_0 \cdot \mathbb{k} = 0$

$\mathbb{E}_0$ の方向は進行方向 $\mathbb{k}$ と直交している

◎ 分散関係式

非相対論：$E = \dfrac{p^2}{2m}$

相対論：$E = \sqrt{\mathbb{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$

(Einstein の関係式)

$m = 0$ とすると $E = |\mathbb{p}| c$

これは電磁波の関係式と同じ