13-5 Lorentz 変換

$$
\begin{cases}
x' = x \ , \quad y' = y \\
z' = \gamma(z + vt) \\
t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2} z\right)
\end{cases}
$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz 変換 という

- $\frac{v}{c} \ll 1$ のとき $\gamma \simeq 1$

$$
\begin{cases}
z' \simeq z + vt \\
t' \simeq t
\end{cases}
$$

Galilei 変換 となっている

- v が 光速 c に近いときは

Galilei 変換 とは 全く 異なる

系 が それぞれの 時間 をもっている

特電.

- $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$

$$= x^2 + y^2 + \gamma^2 (z + vt)^2 - c^2\gamma^2\left(t + \frac{v}{c^2} z\right)^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad //$$

- $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'}$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}$$

$$\therefore \quad \underline{\frac{\partial}{\partial z} = \gamma \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}}$$

同様にして

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t} = \gamma v \frac{\partial}{\partial z'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}}$$

- 電場 $\mathbb{E}$ に対する方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbb{E} = 0$$

である.

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \left(\gamma\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2$$

$$- \frac{1}{c^2}\left(\gamma v\frac{\partial}{\partial z'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \left(\gamma^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$+ \left(\left(\frac{\gamma v}{c^2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$= \nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

すなわち

$$\underline{\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}}$$

2" 不変.

Maxwell eq. は Lorentz 変換に対して不変

【運動量の変換】

$$
\begin{cases}
p_x' = p_x , \quad p_y' = p_y \\
p_z' = \gamma \left(p_z + \frac{v}{c^2} E \right) \\
E' = \gamma \left(E + v p_z \right)
\end{cases}
$$

このとき

$$E'^2 - \mathbb{p}'^2 c^2 = E^2 - \mathbb{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbb{p}^2 c^2}$$

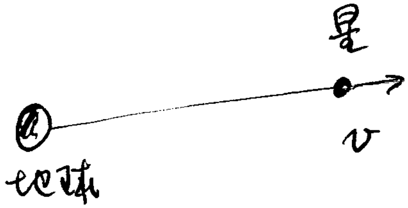
Einstein の関係式という

◉ $m \gg |\mathbb{p}| c$ のとき

$$E = mc^2 + \frac{\mathbb{p}^2}{2m} + \cdots$$

静止質量　　非相対論の運動エネルギー

[Doppler shift]



光の場合

$m=0$

だから $E=|P|c$

$$P_z' = \gamma\left(P_z - \frac{v}{c^2}E\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

星の光の運動量 $P_z = P$ とする。

$$E = pc$$

地球でみる星の光の運動量 p'

$$p' = \gamma\left(p - \frac{v}{c^2}pc\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,p\left(1-\frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\;p$$

$p = \frac{h}{\lambda}$ だから

$$\boxed{\lambda' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\;\lambda}$$

v が c に近くなると λ' が大きくなる

赤方偏位 という

[1]

$$x_\mu = \left(ct,\ \overset{x,\ y,\ z}{\cancel{x_1, x_2, x_3}}\right) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$\boxed{x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} x_\nu}$$ とおく、つまる

<u>今の場合</u> :
$$\begin{cases} z' = \gamma z + \gamma v t \\ t' = \gamma t + \dfrac{\gamma v}{c^2} z \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} z' &= \gamma z + \frac{\gamma v}{c} ct \\ ct' &= \gamma ct + \frac{\gamma v}{c} z \end{aligned}}$$

$$x'_3 = \gamma x_3 + \frac{\gamma v}{c} x_0$$

$$x'_0 = \gamma x_0 + \frac{\gamma v}{c} x_3$$

$$x'_1 = x_1$$

$$x'_2 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{\gamma v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma v}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{\{a_{\mu\nu}\}} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

[2] 内積の定義

$$(x_\mu \cdot x_\mu) \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} x_\nu' \quad \text{とおく}$$

$$\sum_{\mu=0}^{3} (x_\mu \cdot x_\mu) = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu' \sum_{\nu'} a_{\mu\nu'} x_{\nu'}'$$

$$= \sum_\mu \sum_{\nu\nu'} a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} (x_\nu' \cdot x_{\nu'}')$$

$$= \sum_{\nu\nu'} \underbrace{\left(\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'}\right)}_{= \delta_{\nu\nu'}} (x_\nu' \cdot x_{\nu'}')$$

$\delta_{\nu\nu'}$ とすればよい

$$\therefore \boxed{\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}}$$

直交変換になっている