「復習」

Maxwell eq.

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex]
\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\[2ex]
\nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\[2ex]
\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

[問題設定]

電荷分布 ρ と
電流 i が存在しているとき

⇓

電場 E と
磁束密度 B は
どうなっているのか?

様々な場合を考えてみる。

[1] $\dot{i}=0$, ρ のみ存在する

↓ 静電場

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\mathbb{E} = 0 \end{cases}$$ ($\mathbb{B}=0$とするから)

このとき $\mathbb{E}$ を求める

どういう条件の分布 ρ になっているか?

(a) 対称性があるとき

(i) $\rho(r)$ が球対称

Gauss の定理を使う

$$\int_{\text{球}} \nabla\cdot\mathbb{E}\, d^3r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{球}} \rho\, d^3r$$

$$\int_{\text{球の表面}} E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(r)\, d^3r$$

$$\therefore \quad 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi \int \rho(r') r'^2 dr'$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \underline{\int \rho(r') r'^2 dr'}}$$

$\Downarrow$

一般に これは
rによっている

(ii) $\rho(r)$ が円筒 → 同様

(b) 対称性のない場合

$\mathbb{E} = -\nabla\phi$ として

$\phi(r)$ についての式にする

$$\underline{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poisson eq.

No.
Date 10.2

ϕに2つの境界条件を入れて
Poisson方程式を解く

◎ Green関数の方法

$\phi(\infty)=0$とする

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

とし、まずこれを解く

このとき

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r'$$

となる

Green関数の解は

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

これより $$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$ 6.24.a

(2) $\boldsymbol{i}$ が存在する

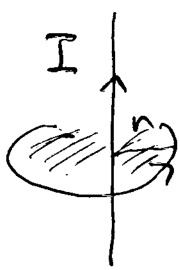
その他 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

↓ 磁束密度 $\mathbb{B}$ を求める

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \end{cases}$$

(a) 対称性がある場合

(i) 直線電流



$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}$$

$$\int \nabla \times \mathbb{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Stokesの定理より

$$2\pi r B_\theta \Leftarrow \int \mathbb{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \int \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\therefore \boxed{B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

(b) 時間的変化のない場合

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$ とする

ゲージ条件から $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$ とする

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \mu_0 i$$

$$\therefore \nabla^2 \mathbb{A} = -\mu_0 i$$

Green 関数と同じ手法で解ける

$$\mathbb{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i(r')}{|r - r'|} d^3 r'$$

この式を $\mathbb{B}$ の中に入れると

$i(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = I\,d\mathbf{s}'$ として

$$\boxed{\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

Biot - Savart の法則

より。

これを解いて $\mathbb{B}$ が求まる

(3) $\mathbb{B}$が時間変化

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$ (Faradayの法則)

$$\Phi = \int \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S}$$ とすると

$$\int \nabla \times \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = -\frac{d}{dt}\int \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = V$$

$$\therefore V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

起電力が生じる

No.

Date 10/7

(4) $\mathbb{E}$ が時間変化

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$$i_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

変位電流

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 (i + i_d)$$

新しく電場が加わった

$\mathbb{B}$ が求まる

$$S = \frac{1}{\mu_0} \mathbb{E} \times \mathbb{B}$$

Poynting ベクトルの存在

● エネルギーの流れ (輻射のエネルギー)

仕事率

$$W = \int \mathbf{i} \cdot \mathbb{E} \, d^3r$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int \left(\nabla \times \mathbb{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \right) \mathbb{E} \, d^3r$$

$$\boxed{W = -\frac{d}{dt} \int \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbb{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbb{B}|^2 \right) d^3r - \int \nabla \cdot \mathbb{S} \, d^3r}$$

Poynting ベクトル

電場・磁場のエネルギーに加えて
$\mathbb{S}$ による仕事が存在する