2.2 電位 ϕ

$$\boxed{\mathbb{E} = -\nabla\phi}$$

とみなす $\phi(\mathbf{r})$ を「電位」という

$\phi(\mathbf{r})$ は観測量にならない
↑
基準点が必要

$\mathbb{E} = -\nabla\phi$ って何故書いてよいのか?

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{E} = 0}$$

が Maxwell eq. で保証されている

◎ $\mathbb{E}$ を積分する

$$\int_A^B \mathbb{E}\, ds = -\int_A^B \nabla\phi \cdot ds = -\int_A^B d\phi$$

$$= \phi(A) - \phi(B)$$

[道すじによらない]

2-2-1 1個の点電荷のつくるϕ

$$\boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}$$

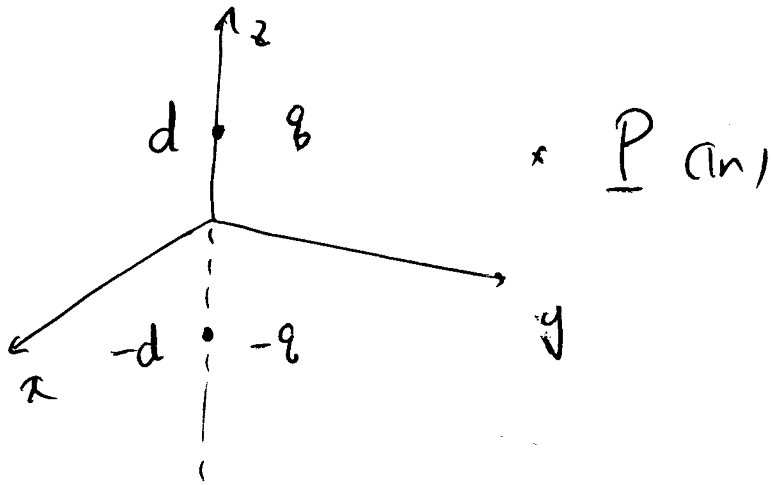
但し $\phi(\infty) = 0$ とした

このとき

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\mathbf{e}_r$$

2' OK

2-2-2 2つの点電荷のつくる $\phi(\mathbf{r})$



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

◎ 遠方では ($|\mathbf{r}| \gg d$ のとき)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{2zd}{r^2}+\frac{d^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{2zd}{r^2}+\frac{d^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots$$ より

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[1+\frac{zd}{r^2}-\frac{d^2}{2r^2}+\cdots-\left(1-\frac{zd}{r^2}-\frac{d^2}{2r^2}\right)\cdots\right]$$

これより

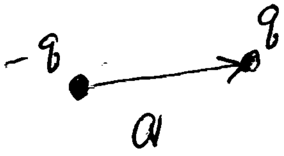
$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2zdq}{r^3}} \quad (|\mathbf{r}| > d)$$

$$\boxed{p \equiv 2qd}$$ 電気双極子能率という

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \text{ より}$$

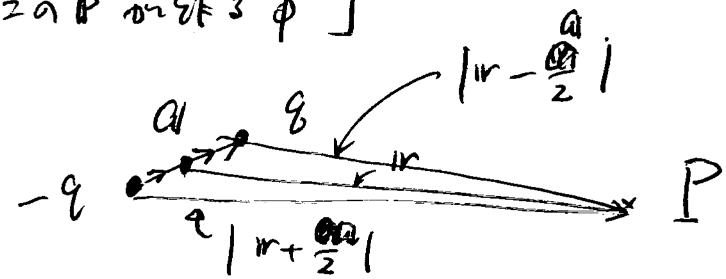
$$\therefore \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3pxz}{r^5} \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3pyz}{r^5} \\ E_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{3pz^2}{r^5} - \dfrac{p}{r^3}\right] \end{cases}$$

【電気双極子モーメント】



$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$$ 電気双極子モーメント

［この $\boldsymbol{p}$ が作る ϕ］



$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{|\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}|} + \frac{q}{|\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}|}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{(r^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q}{(r^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{a}|$ とする。

$$\therefore \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\left(1-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{2r^2}+\cdots\right)+\frac{1}{r}\left(1+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{2r^2}\right)\cdots\right]$$

$$\therefore \boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

2のとき の 電場 $\mathbb{E}$

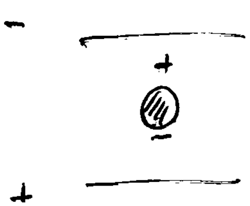
$$\mathbb{E} = -\nabla\phi$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbb{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbb{p}\cdot\mathbb{r})\,\mathbb{r}}{r^5}\right]}$$

◎ 双極子モーメントの重要性

↓

分極と関係している



(電場をかけると
分離する)

・電気双極子モーメント：

中性子　(u, d, d)

$\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)e$

全電荷はゼロ

(遠くからみると、電気双極子のようにみえる)

[実験事実]

$$|p_N| < 10^{-26}\ [e\cdot cm]$$

もし有限でみつかると

時間反転不変の破れがわかる

・中性子の edm

どうやって trap するのか

ultra-cold neutron

もし、反中性子が trap できたら 重力がわかる!!

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \qquad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{r^3}$$

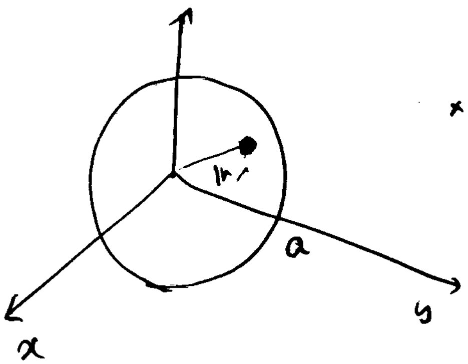
$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\frac{-3}{r^4}\,\frac{x}{r}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,x}{r^5}\right]$$

$$\therefore\ \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}\right]$$

2-2-3 連続体の電荷分布をもつ球の電位



$\mathbf{r}' = (x', y', z')$

× P(x, y, z)

球内の微小体積

$$dV' = dx'dy'dz' \equiv d^3r'$$

の電荷

$$\Delta Q = \rho \, dx'dy'dz'$$

ρ 電荷密度

P点での ΔQ が作る電位

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho \, dx'dy'dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

重ね合わせの原理

$$\therefore \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho \, dx'dy'dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

【ρ が一定のとき】

$$\phi(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}}$$

$$\begin{cases} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta d\theta \end{cases} \text{ とおくと } \begin{cases} \theta = 0 & \text{で } t = 1 \\ \theta = \pi & t = -1 \end{cases}$$

これより

$$\phi(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \int_0^\infty r'^2 dr' \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr't}}$$

$$\phi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{2r'^2}{2rr'} dr' \left[r + r' - |r - r'| \right]$$

$$\therefore \boxed{\phi(r) = \frac{\rho}{4\varepsilon_0 r} \int_0^\infty 2r' dr' \left[r + r' - |r - r'| \right]}$$

(i) $r > a$ のとき　$r > r'$ が常に成立　$|r - r'| = r - r'$

$$\boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}},\qquad Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \quad (r < a)$$

(ii) $r < a$ のとき

$$\int (at+b)^{\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha+1)a} (at+b)^{\alpha+1}$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at+b}} = \frac{2}{a}(at+b)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(r) = \frac{2\rho}{4\varepsilon_0 r}\left[\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^a 2rr' dr'\right]$$

$$= \frac{2\rho}{4\varepsilon_0 r}\left[\frac{2}{3}r^3 + r(a^2 - r^2)\right]$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}\right) \quad (r<a)$$