3. Gaussの法則

No.

Date 3/

3-1 Gaussの法則(微分系)

クーロンの法則 (点電荷の場合)

$$\boxed{\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r}$$ であった.

Gaussの法則

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : 電荷分布

[問題]

この点電荷の答 $\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r$

をGaussの法則の中に入れてみる.

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4}\frac{y}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4}\frac{z}{r}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right] = 0 \quad \boxed{?}$$

$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ のはず　　$\rho = 0$ か?

$$\begin{cases} \mathbb{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\mathbf{e}_r & \text{だから} \\ \nabla\cdot\mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{のハズだが} \end{cases}$$

$$I = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{|\mathbf{r}|<a}\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)d^3r$$ を実行してみる

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{|\mathbf{r}|<a}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)d^3r$$

Gaussの定理より

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{|\mathbf{r}|=a}\underbrace{\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r)}{r^3}}_{=\frac{1}{a^2}}\cdot\underbrace{dS}_{a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}}_{=4\pi}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

すなわち $\boxed{\int\rho\, d^3r = q}$ である!!

しかし $\nabla\cdot\mathbb{E}$ を計算したら $\rho=0$ となった。

何が問題? $\boxed{r=0}$ の考慮が不十分

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \qquad r \neq 0}$$

r=0 のときは 未定ない.

しかし 積分は <u>well defined</u>.

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r})}$$

である

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = +\nabla\cdot\left(\nabla \frac{1}{r}\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)}$$

[Dirac の δ 関数]

$$\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \end{cases}$$

◉ $\int \rho(\mathbf{r})\,d^3r = q$ であれば

$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r})$ とすればよい

このとき

$$\int \rho(\mathbf{r})\,d^3r = q \int \delta(\mathbf{r})\,d^3r$$

$$= q \quad //$$