3-2 Gaussの法則（積分系）

◎ Gaussの定理 ： $$\int_V \nabla\cdot\mathbb{E}\, d^3r = \int_S E_n\, dS$$

［任意の体積］　　［任意の表面］

$$\begin{cases} d^3r \equiv dV \equiv dx\,dy\,dz \\ dS = \text{面積要素} \\ E_n : \text{法線方向の成分} \end{cases}$$

● Gaussの法則 ：

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

積分系 Gaussの法則

$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{E}\, d^3r = \int_S E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d^3r$$

$$\therefore \boxed{\int E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q}$$

これを利用すると E_n が求まる場合がある

$\boxed{\text{対称性}}$ が重要

$\mathbf{E}$ は3つの成分をもつ

Gaussの法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ たった1つの式

一般にはこれでは $\mathbf{E}$ を決定できない

$\boxed{\text{対称性}}$ があると

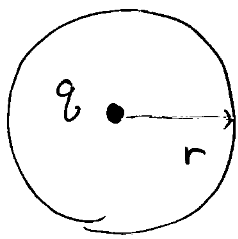
例えば E_n だけになれば決まる

3-2-1 点電荷密度の場合

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r})$$

【原点に電荷 q がある】

$$\int \rho(\mathbf{r})\, d^3r = q$$



$\boxed{\text{半径 } r \text{ の球を考える}}$

この球に対して Gauss の法則より

$$\int \nabla \cdot \mathbb{E} \cdot d^3r = \int E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r})\, d^3r = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

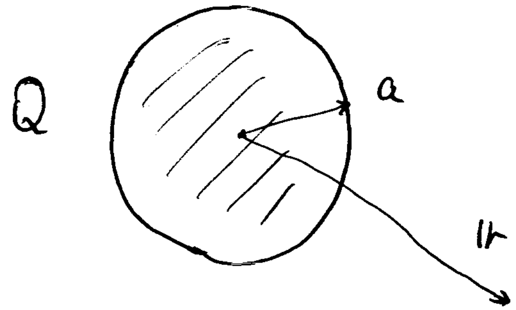
$$\therefore \int E_n \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} E_r\, r^2 \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \boxed{E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \Rightarrow \underline{\mathbb{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \mathbf{e}_r}$$

3-2-2 球の中に一様分布

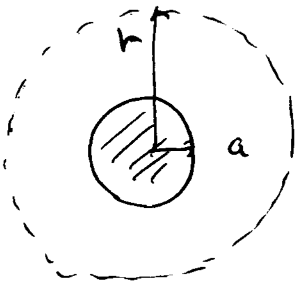


電荷密度 ρ

$$\boxed{Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho}$$

点 $P(\mathbf{r})$ での電場 $\mathbf{E}$

(i) $r > a$



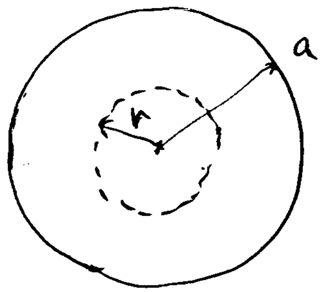
半径 r の球

Gauss の法則

$$\underbrace{\int E_r \, dS}_{= 4\pi r^2 \cdot E_r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}) \, d^3 r = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \ E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

(ii) $r<a$ のとき



$$\int E_r dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \, d^3r$$

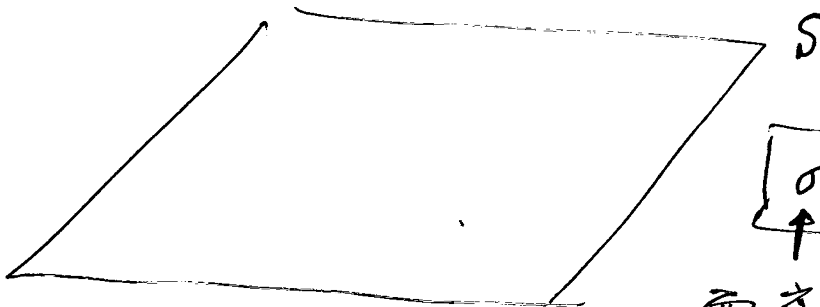
$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\therefore \boxed{E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

ここで $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi a^3}$ //

$$\mathbb{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbb{r}$$

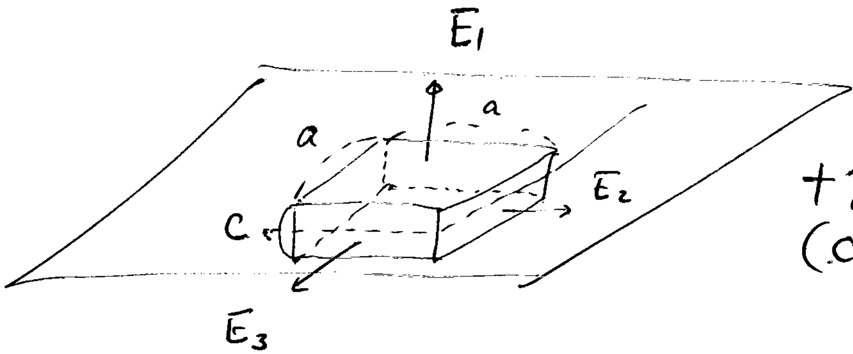
3-2-3 平面に一様分布(密度σ)



$\boxed{\sigma S = Q}$

面密度という

面積を掛けると電荷になる



十分薄い直方体
($c \to 0$)とする

Gaussの法則

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E}\, d^3r = \underbrace{\int E_n\, dS}_{\shortparallel} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$$

$$2E_1 a^2 + 2E_2 ac + 2E_3 ac = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma a^2$$

$c \to 0$としてよいから

$$\boxed{E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

方向は平面に垂直, 外向き

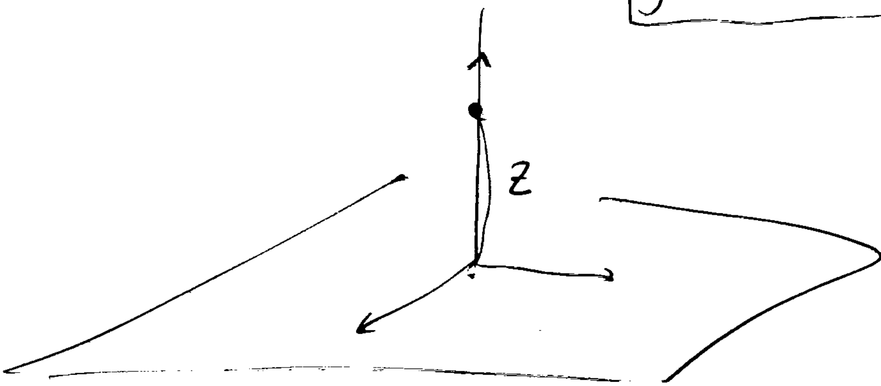
◎ 点電荷 $\mathbb{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbb{e}_r$ 38'

流れでる

2の流れで 流入ってる

$$\boxed{\int E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

電荷いはる



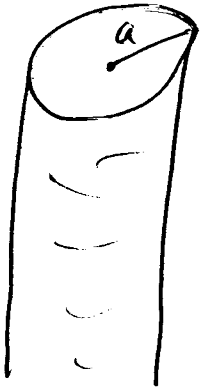
$\phi(z)$ $\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$

対称性から E_zのみ存在する

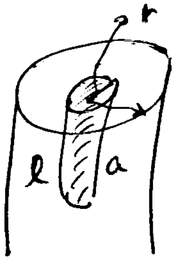
$E_2 = 0$, $E_3 = 0$

$\mathbb{E}$ の x, y 成分は zero

3-24 円柱に一様に分布(密度ρ)



(i) $r<a$ のとき



半径 r の円柱
長さ l とする

$$\int E_n \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \, d^3r$$

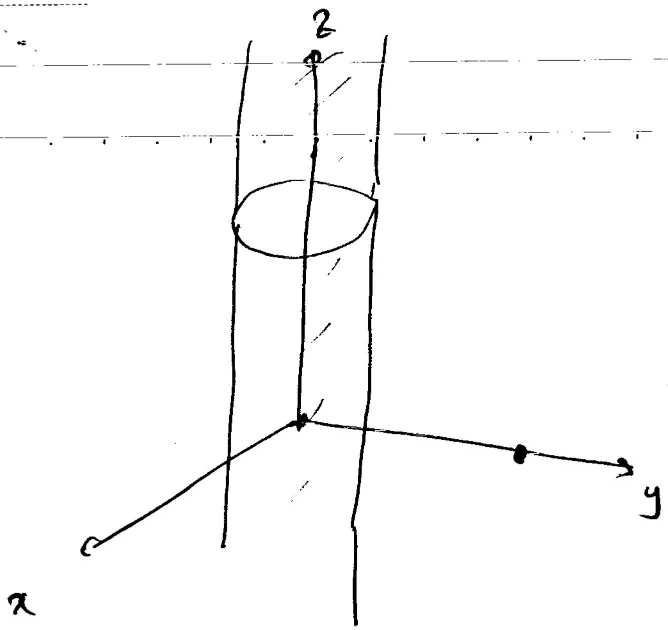
$$E_n \, l \, 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \pi r^2 l$$

$$\therefore \boxed{E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$$

(ii) $r>a$ のとき

$$E_r \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \pi a^2 l$$

$$\therefore \boxed{E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}}$$



$\phi(x, y, z)$

z をどこにとるかによらないはず
(無限に長いので)

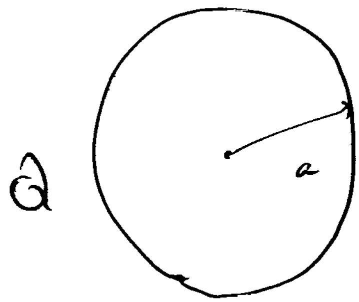
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$\phi(x, y, 0)$ として十分

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad //$$

3-2-5 半径 a の球殻に一様分布



(i) $r<a$

電荷は存在しない

$$\int E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = 0$$

$$\therefore \boxed{E_n = 0}$$

(ii) $r>a$

$$\int E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$