4. Laplace-Poisson 方程式

Poisson eq. $\leftarrow$ Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\oplus$

$$\nabla \times \mathbb{E} = 0$$

$\nabla \times \mathbb{E} = 0$ より

$\mathbb{E} = -\nabla\phi$ とおける

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poisson eq. という.

$\rho = 0$ のとき

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

Laplace eq. という.

4-1 Laplace 方程式の解

4-1-1 球対称解

$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]}$$

球対称 $\Rightarrow$ $\phi = \phi(r)$ θ, φ によらない

$$\underline{\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0}$$

よって

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 0$$

$$\therefore r^2\frac{d\phi}{dr} = C$$

$$\therefore \boxed{\phi = -\frac{C}{r} + D}$$

C, D は constants.

C, D は境界条件により決定

$r \to \infty$ $\phi \to 0$ とすれば

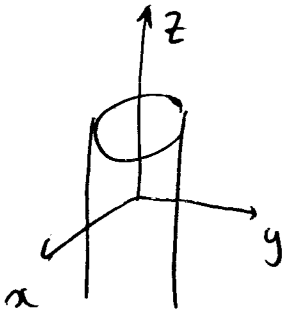
$$D = 0$$

$$\boxed{\phi(r) = -\frac{C}{r}}$$

クーロンと同じ

4-1-2 円筒（z方向は一様）

円対称



$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\phi = \phi(r)$ とすると $\boxed{\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0}$

$$\therefore \nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\phi}{dr}\right) = 0$$

$$\therefore r \frac{d\phi}{dr} = C$$

$$\boxed{\phi = C \ln r + D}$$

C, D は境界条件により決定する.