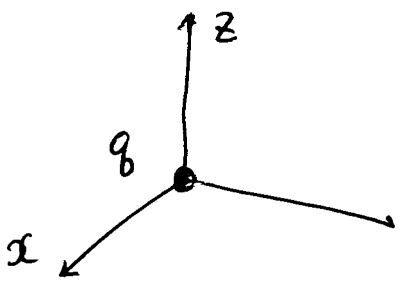
4-2 Poisson 方程式

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4-2-1 点電荷の場合 (全空間)



原点に q をおく

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r})$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

(i) $\mathbf{r} \neq 0$ (原点以外)

$\delta(\mathbf{r}) = 0$ $\quad \mathbf{r} \neq 0$ より

$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\therefore \phi(r) = -\frac{C}{r} + D$$

$r \to \infty$ で $\phi = 0$ とすれば $D = 0$

$$\therefore \boxed{\phi = -\frac{C}{r}}$$

Poisson eq. は

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -q \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}) \\ \phi = -\frac{C}{r} \quad \text{の C は定めす.} \end{cases}$$

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})}$$ であったから

$$\nabla^2 \phi = (-C)(-4\pi)\, \delta(\mathbf{r})$$ より

$$\underline{C = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}$$

$$\therefore \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}}$$

Coulomb の法則と全く同じ!!

4-2-2 一般の場合

δ-関数の式

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

Green 関数を定義する : $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

$$\boxed{\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

この方程式をみたす関数 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ を

Green 関数という

この特殊解は

$$\boxed{G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

◎ Poisson eq. を解きたい

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\,d^3r'}$$

とすると. これは Poisson eq. をみたす

仮定

$$\boxed{\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

Proof:

ここのみに operate する

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \underbrace{\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}_{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\rho(\mathbf{r}')\,d^3r'$$

$$\therefore\ \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})}$$

$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ が 解となるので

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'}$$

Coulomb で 重ね合わせたものと同じ結果

◎ $\rho(\mathbf{r})$ が 点電荷 の場合 :

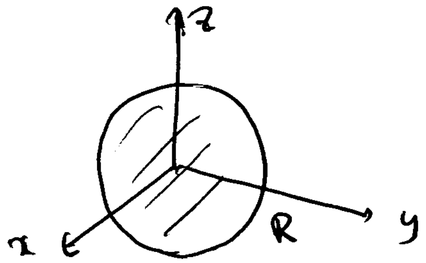
$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r})$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q\,\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$ //

Ok.

4-2-3 球対称分布 (2-2-3参照)



$$\begin{cases} \text{半径 } R \\ \rho = \rho_0 \quad \text{一定} \end{cases}$$

$$Q = \int \rho\, d^3r = \rho_0 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \mathrel{/\!/}$$

$$\phi(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d^3r'}{|r - r'|} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{r'^2 dr' \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}}$$

$\cos\theta = t$ とおいて

$$\phi(r) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_{-1}^{1} dt \int_0^R r'^2 dr' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}}$$

$$\boxed{\phi(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^R r' dr' \left[r + r' - |r - r'| \right]}$$

(i) $r > R$ のとき

$$\int_0^R r' dr' \left(r + r' - |r - r'| \right) = \frac{2}{3} R^3$$

$$\therefore \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \left(Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \right)$$

(ii) $r < R$ のとき

$$\int_0^R r' dr' \left[r + r' - |r - r'| \right]$$

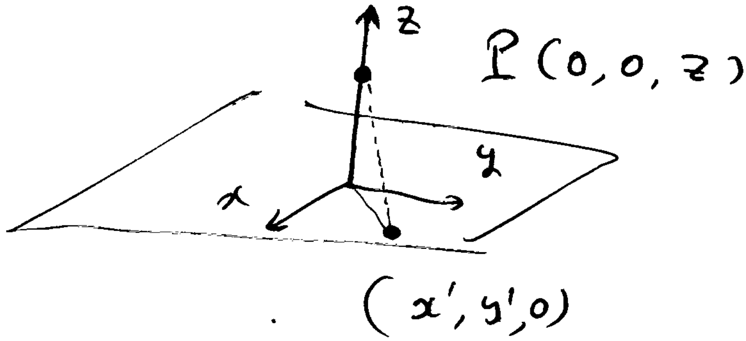
$$= \int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2rr' dr'$$

$$= \frac{2}{3} r^3 + r(R^2 - r^2) = rR^2 - \frac{r^3}{3}$$

$$\therefore \phi(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \left(rR^2 - \frac{1}{3} r^3 \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad //$$

■ 平面上に面電荷密度の分布



$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dx'dy'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{\infty} r'dr' \frac{1}{\sqrt{r'^2+z^2}}$$

$t = r'^2$ とおいて cutoff を Λ とする

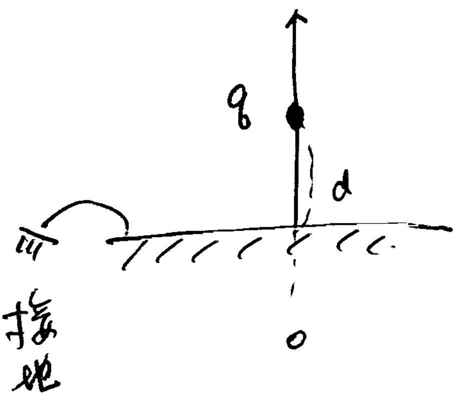
$$\phi(r) = \frac{\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\left[t+z^2\right]^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\Lambda}$$

$$\boxed{\phi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\Lambda - |z|\right)}$$

$$\therefore\quad E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,\quad E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}$$ //

4-2-4 点電荷(境界条件つき)



接地した導体

$$\boxed{\phi(x,y,0)=0}$$

電位がxy平面上でゼロ

Poisson eq.

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{r}_0=(0,0,d)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-d)$$

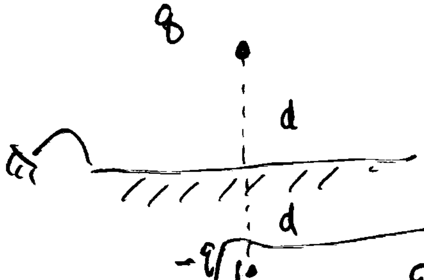
① 境界条件がないとき(全空間)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad //$$

しかし、このφ(r)は

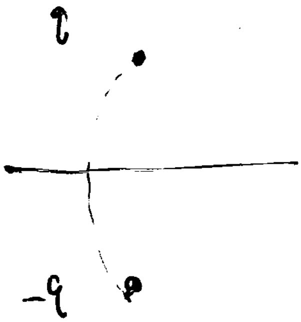
$\phi(x,y,0)=0$ をみたさない!!

［鏡像法］という.



$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]}$$

とってやればよい



(鏡像
mirror
charge)

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

しかし、 $\boxed{\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}$ は1つの解

◎ $\nabla^2 \phi = 0$ の解を加える。
(これは無限個ある)

$\boxed{\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}}$ が一般解
但し $\mathbf{a}$ は
$(z<0)$ の中にある
(導体内部)

∵

$$\nabla^2 \phi_2 = \nabla^2 \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq -\mathbf{a})$$

今考えている点 $\mathbf{r}$ は常に $\boxed{z>0}$

よって $\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$ は $\nabla^2 \phi = 0$ の解

例1 $\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$

従って $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ の解は一般に

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{A}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}}$$

A, $\mathbf{a}$ は定数

何故かというと $\nabla^2\phi$ を計算すれば

第1項は $-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ を与え

第2項は 0 を与える

（但し $\mathbf{r}$ は上半面
$\mathbf{a}$ は下半面）

ここで $\boxed{\phi(x, y, z)\Big|_{z=0} = 0}$ を入れる

$A = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{r}_0$ ととればよい

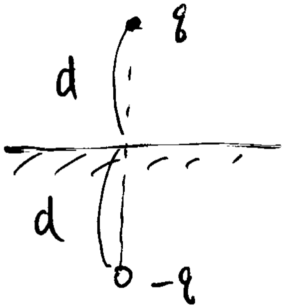
$$\therefore \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{-q}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

これは $\boxed{\phi(x,y,0)}=0$ をみたす

鏡像法

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ \phi(x,y,0)=0 \end{cases}$$ の解



$\begin{cases} \mathbf{r}=\mathbf{r}_0 \text{ に } q \text{ をおいたときの電位 } \phi_1 \text{ と} \\ \mathbf{r}=-\mathbf{r}_0 \text{ に } -q \quad 〃 \qquad \phi_2 \end{cases}$

をとればよい

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1+\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{-q}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right]$$

//

【 xy 平面上での電場 】

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)2x\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)2x\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\therefore E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}x\left[\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

これより x-y 平面上 $(z=0)$ では

$$\boxed{E_x(x,y,0) = 0}$$

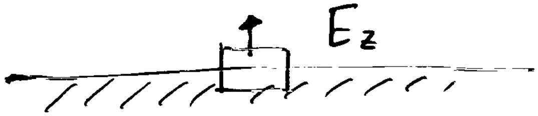
同様に $E_y(x,y,0) = 0$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(z-d)\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-\frac{3}{2}} - (z+d)\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\boxed{E_z(x,y,0) = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+d^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

となり有限

[x, y 平面上での電荷密度]



Gaussの定理

$$\int E_z \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \, dV$$

$$E_z S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$\therefore \boxed{\sigma = \varepsilon_0 E_z}$$

これより

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi}\left(x^2+y^2+d^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

全電荷

$$Q = \int \sigma \, dx dy = -\frac{qd}{2\pi}\int \frac{dx dy}{\left(x^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{qd}{2\pi}\int d\theta \, r dr \frac{1}{\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -qd\int_0^\infty \frac{1}{2}dt \frac{1}{\left(t+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -q \quad //$$

[電気双極子の鏡像法]