# 5. 電場のエネルギー



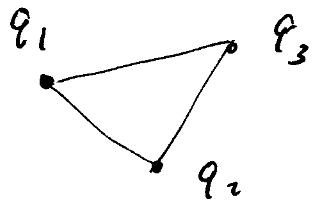
## 5-1 荷電粒子間のエネルギー

[2個]


$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

[3個]




$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}}\right]$$

[N個など]

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

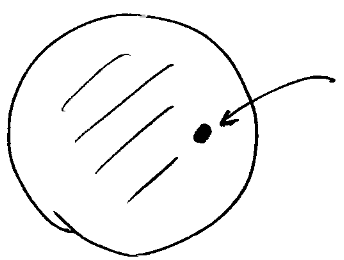
$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ji}$$

(2回数えるので
2で割る)

N体のエネルギー

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}$$

## 5-2 電位と電場のエネルギー




$q_i$ に対して、それ以外の電荷が作る電位 $\phi_i$

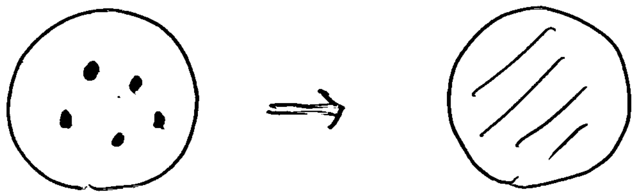
$$\boxed{\phi_i(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}} \quad (j \neq i)$$

これより

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum q_i \phi_i}$$

(この $\frac{1}{2}$ も 数えすぎのさまてる!)

[連続体の場合]



$$\begin{cases} \sum_i \Rightarrow \int d^3r, & i \Rightarrow \mathbf{r} \\ q_i \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) \end{cases}$$

よって

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})\,d^3r}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{1}{2}\sum_i q_i \phi_i$$

$\int d^3r$ 電荷分布 $\phi(\mathbf{r})$

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbb{E}|^2 \, d^3r}$$ を示したい

(Proof)

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})\, d^3r$$

Poisson eq. は $\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$

$$\therefore U(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla^2\phi)\cdot\phi(\mathbf{r})\, d^3r$$

一方 $\nabla\left((\nabla\phi)\phi\right) = (\nabla^2\phi)\phi + (\nabla\phi)^2$ より

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \nabla\left((\nabla\phi)\phi\right) d^3r - \int (\nabla\phi)^2\, d^3r\right]$$

Gaussの定理より

$$\int \nabla\left((\nabla\phi)\phi\right) d^3r = \int (\nabla\phi)_n\,\phi\, dS$$

十分大きな球を考えると
遠方では常に $\phi \sim \frac{1}{r}$
よって $(\nabla\phi)_n \sim \frac{1}{r^2}$ となる

$$\int (\nabla\phi)_n \phi \, dS \sim \int \frac{1}{r^2}\frac{1}{r} r^2 d\Omega \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$

よって

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)^2 d^3r$$

一方 $\mathbb{E} = -\nabla\phi$ より

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbb{E}|^2 d^3r}$$

積分は全空間