第１３章　電磁波

13.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を再びここに書いておこう。それぞれの式の重要性はこれまで見て来たとおりである。

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\text{(Gauss の法則)}\tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\text{(磁荷がない)}\tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\text{(Faraday の法則)}\tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad\text{(Ampere − Maxwell の法則)}\tag{1.1d}$$

ここで Ampere の法則の修正をしたのが Maxwell であるが、この修正についてここで議論して行きたい。恐らくは、理論物理の立場からすると、この修正こそがこれまでの理論物理の発展における最大の功績であると考えられる。ここでは、何故それが必要であったかについて議論したい。Ampere の法則 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ において、この式全体に $\boldsymbol{\nabla}$ を掛けると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0\tag{13.1}$$

となる。しかし、この式は連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0\tag{13.2}$$

と矛盾している。連続方程式は物質の流れの保存則を表しているのでこれが壊れていたら、電荷の保存が成り立たなくなってしまうのである。これは絶対に困るという事で書き換えたものが Ampere−Maxwell 方程式である。実際、式 (1.1d) に $\boldsymbol{\nabla}$ を掛けると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2\epsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\tag{13.3}$$

となり、$c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ を考慮すれば、確かに上式は成り立っている事がわかる。

13.1.1　変位電流

ここで変位電流 $\boldsymbol{j}_d$ を定義しておこう。Ampere-Maxwell の法則の最後の項の事であり、時々使われる。

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.4}$$

電場が時間変化するとそこに電流が流れた事に対応していると言う事である。従って当然そこには磁場が生成されるのである。

13.2　電磁場のエネルギー

ここで電磁場全体のエネルギーについて計算しておこう。この場合、仕事率の計算が有効である。Newton 力学において

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{13.5}$$

が得られるが、これは単位時間あたりのエネルギーの増加を表している。従って、仕事率 W_0 を

$$W_0 = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{13.6}$$

で定義する。電磁場における力を代入すると

$$W_0 = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}) = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{13.7}$$

となる。ここで N 個の電荷が分布関数 ρ で分布しているとすると仕事率 W_0 は

$$W_0 = \int \rho\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}d^3r = \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}d^3r \tag{13.8}$$

となる。この式を Ampere-Maxwell 方程式を用いて書き直すと

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0}\int\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right)d^3r \tag{13.9}$$

となる。ここで Faraday の法則を用いて、さらに Poynting ベクトルを

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{13.10}$$

と定義すると仕事率 W_0 は

$$W_0 = -\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}\right]d^3r \tag{13.11}$$

となる。ここで第１，２項は通常の電場と磁場のエネルギーの変化分であり、第３項が電磁場のエネルギーの流れに対応している。それは

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} d^3 r = \int_S S_n dS \tag{13.12}$$

と書いてみればわかるように表面 S からエネルギーがコンデンサーの中に流れ込む形になっている。

13.2.1 電磁場のエネルギー: 例題 $RC-$ 回路

表面から流れ込む電磁場のエネルギーの現象を理解するために、$RC-$ 回路を考えよう。容量 C のコンデンサーと抵抗 R を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう。コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう。この時コンデンサーの電場 E とその容量 C は

$$E = \frac{V}{d}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} \tag{13.13}$$

となる。ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \tag{13.14}$$

となる。ここで初期条件として $t = 0$ で $Q = 0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{13.15}$$

と求められる。これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{13.16}$$

となる。ここでコンデンサーの電場はその方向を $z-$ 方向として

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2}\boldsymbol{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{13.17}$$

である。この電場は時間によっているので変位電流が生じる。それは

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{V}{R\pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \boldsymbol{e}_z \tag{13.18}$$

となっている。変位電流がながれるとそれに伴って磁場ができる。Ampere-Maxwell の法則より、円筒座標を考えて、その半径 r の面積で積分すると

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 i_d \pi r^2 \tag{13.19}$$

より

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i_d r}{2}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2 R}\ e^{-\frac{t}{RC}}\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.20}$$

となっている。これより表面 $r=a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2 R}\ e^{-\frac{t}{RC}}\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.21}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = -\frac{V^2}{2\pi aRd}\ e^{-\frac{t}{RC}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_r \tag{13.22}$$

と求められ $r-$ 方向の内向きにエネルギーが流れて行く事になる。このエネルギーの流れを全時間で積分すると

$$\int_0^\infty S_n dt = \frac{CV^2}{4\pi ad} \tag{13.23}$$

となる。Poynting ベクトルのエネルギーは表面積を掛ける必要があるのでこれより全エネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi ad}\ 2\pi ad = \frac{1}{2}CV^2 \tag{13.24}$$

となり、これはコンデンサーに貯まったエネルギーと一致している。

13.2.2 電磁場のエネルギー: 例題 $LC-$ 回路

ここで、$LC-$ 回路を考えよう。容量 C のコンデンサーとコイル L を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう。コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう。ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = L\frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \tag{13.25}$$

となる。ここで初期条件として $t=0$ で $Q=0,\ J=0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV\left(1-\cos\omega t\right), \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13.26}$$

と求められる。これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = VC\omega\sin\omega t \tag{13.27}$$

となる。コンデンサーの電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - \cos\omega t\right)\boldsymbol{e}_z \tag{13.28}$$

となるので変位電流は

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_z \tag{13.29}$$

となる。よって、この時に作られる磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 r\omega VC}{2\pi a^2}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.30}$$

となっている。これより表面 $r = a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - \cos\omega t\right)\boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0 \omega VC}{2\pi a}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.31}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = -\frac{\omega CV^2}{2\pi ad}\ \left(1 - \cos\omega t\right)\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_r \tag{13.32}$$

となる。これは一周期で積分してみれば明らかなようにゼロである。すなわちエネルギーの流れはない事になり、保存系である事を示している。

13.3　電磁波

Maxwell 方程式で物質が存在しない場合、すなわち $\rho = 0$ と $\boldsymbol{j} = 0$ の時、この電磁場には物理的に意味のある解が存在している。物質が存在しない場合の Ampere-Maxwell の法則は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.5}$$

である。この式をベクトルポテンシャルで書き直すと

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right) \tag{13.34}$$

となる。ここで Gauss の法則から $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0$ である事から、今の場合

$$\phi = 0 \tag{13.35}$$

として十分である。これとゲージ固定条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ より、式 (13.34) は

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{A} = 0 \tag{13.36}$$

と求められた。これは電磁場が自由粒子の方程式を満たしている事を示している。この一般解が

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right) \tag{13.37}$$

で与えられることがすぐに確かめられる。ここで

$$kx = \omega_k t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} \tag{13.38}$$

と定義されている。これを代入すると

$$\omega_k = c|\boldsymbol{k}| \tag{13.39}$$

の関係式が求まる。これは光の分散関係式を表している。ここで $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ を偏極ベクトルと呼んでいる。これはゲージ固定条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ より

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) = 0 \tag{13.40}$$

を満たしている。すなわち、フォトンの偏極はその進行方向と常に垂直になっている。

13.3.1　電磁波と場の量子化

ここで一つ注意しおく事がある。電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが、式 (13.37) そのものが電磁波に対応するわけではない。それは、この $\boldsymbol{A}$ は実数関数となっており、運動量 $\boldsymbol{k}$ の固有関数になっていないのである。それでは電磁波はどのようになっているのであろうか？その答えは、場を量子化して初めて理解できる事である。後で議論するように、場の量子化は式 (13.37) において $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ をオペレータと考える事である。この時、$c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ はフォトン 1 個を生成する演算子であるため、フォトンが作られる時は必ず式 (13.37) の第 1 項のみが現われる事になっている。すなわち

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda | \boldsymbol{A} | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx} \tag{13.41}$$

である。これは運動量 $\boldsymbol{k}$ の固有関数になっているので、確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるのである。

13.4　電磁波の発振機構

これまで見たように $LC-$ 回路自体は保存系であり、電磁波の放出としての外へのエネルギーの流れはない。それでは電磁波が生成される機構はどうなっているのであろうか？この事を理解するためにはどうしても場の理論の基本から出発せざるを得ない。まず、電磁場 $\boldsymbol{A}$ と電子との相互作用は電荷 e をカレントの方に入れた標識を取ると

$$H_I = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}d^3r \tag{13.42}$$

であり、ここから考えざるを得ない。この時、この相互作用の時間変化を考える必要がある。時間変化を考えた時に初めてエネルギーの生成を議論できるからである。すなわち、

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = -\int\left[\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right]d^3r \tag{13.43}$$

となる。ここで スカラーポテンシャル ϕ がない時を考えて十分なので電場は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{13.44}$$

と書けている。よって W は

$$W = -\int\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}d^3r+\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}d^3r \tag{13.45}$$

となる。ここで式 (13.8) から明らかなように第２項は W_0 そのものである。従って、第１項を W_1 として

$$W_1 = -\int\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}d^3r \tag{13.46}$$

を計算する必要がある。まずは $\dfrac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}$ の計算である。簡単のために非相対論的な量子力学を用いよう。また、基本的なポテンシャルはZeeman 効果の Hamiltonian なので

$$H = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{13.47}$$

を仮定して十分である。ここで電子の質量を m としている。また外場 $\boldsymbol{B}_0$ は座標 $\boldsymbol{r}$ の関数であるとしている。ここで外場 $\boldsymbol{B}_0$ を $z-$ 軸方向にとっても一般性を失わないので $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z$ としよう。この時、非相対論の量子力学ではカレント $\boldsymbol{j}$ が

$$\boldsymbol{j} = \frac{e}{m}\psi^\dagger\hat{\boldsymbol{p}}\psi \tag{13.48}$$

で与えられている。ここで $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ である。これより

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e}{m}\left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\hat{\boldsymbol{p}}\psi + \psi^\dagger \hat{\boldsymbol{p}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] = -\frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\nabla} B_0(\boldsymbol{r}) \tag{13.49}$$

となることが計算できる。従って、単位時間のエネルギーの変化率は

$$W_1 = \int \frac{e}{2m^2}(\boldsymbol{\nabla} B_0(\boldsymbol{r}))\cdot \boldsymbol{A} d^3r \tag{13.50}$$

と求められた。ここで注意する事として、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と外場 $\boldsymbol{B}_0$ の違いである。今の場合、 $\boldsymbol{A}$ は電子から発生された電磁場を表している。一方、外場 $\boldsymbol{B}_0$ は電子とは直接は関係のない場であり、他の粒子によって作られた外場としての電磁場である。これを見ても明らかなように、発振回路などにおける電磁波の生成は電子だけの孤立系で起こる現象ではなく、それ以外の場が存在しない限り起こらないのである。もう少し具体的に言うと、外場 $\boldsymbol{B}_0$ は $\boldsymbol{B}_0 \neq \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ であり、このベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とは結びつかないと言う事である。発振回路においては、この磁場 $\boldsymbol{B}_0$ はコンデンサーかまたはコイルが作る磁場によるものと考えて良い。また、加速器において電子が電磁波を放出する機構においては、$\boldsymbol{B}_0$ は電子をその軌道に閉じ込めているために掛けられている磁場そのものである。

13.5　相対性理論

物理における全ての基本法則はどの慣性系においても常に同じである。これが最も大切である事は明らかであろう。地球上で発展させた理論が他の慣性系では通用しなかったら、これは努力する意味が著しく薄れてしまうものである。従ってどの慣性系でも物理が同じである事はほとんど絶対条件であると言える。

13.5.1　Lorentz 変換

静止系 $S(t,x,y,z)-$ 系からもう一つの慣性系 $S'(t',x',y',z')-$ 系への変換は Lorentz 変換で与えられる。式としては

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z+vt), \quad t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}z\right) \tag{13.51}$$

で与えられている。ここで v は $S'-$ 系が $z-$ 軸に沿って動いている速度である。また、c は光速を表し、γ は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{13.52}$$

で与えられている。ここで重要な事はそれぞれの系に時間を定義してあると言う事である。これは我々の日常での経験による直感からするとなかなか理解は難しい。しかし、それぞれの系で実験した時に必ず観測者を定義する必要がある。これが相対性理論で最も重要な事である。従って、それぞれの観測者が自分の時間を持っていたとしても至極合理的な事ではある。

エネルギーと運動量に対しても同じ変換式が成り立つ。すなわち

$$p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma\left(p_z + \frac{v}{c^2}E\right), \quad E' = \gamma\,(E + vp_z) \tag{13.53}$$

となっている。この時、

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 \tag{13.54}$$

である事が簡単に示される。アインシュタインはこの不変量を質量として

$$E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + (mc^2)^2} \tag{13.55}$$

の関係式を発見したのである。

13.5.2　Maxwell 方程式の Lorentz 変換不変性

Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変である。Maxwell 方程式全体の不変性を調べる事もそれ程難しくはないが、ここでは最も重要な形である

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0 \tag{13.56}$$

の式の不変性を議論しよう。ここで微分の計算を実行すると

$$\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{13.57}$$

である事が直ちに計算できる。これは方程式が Lorentz 変換に対して不変である事を示している。