相対性理論　•••　時計は遅れない！

藤田　丈久

（よろず物理研究所）

はじめに

最近の世の中，様々な解説書がネット上で氾濫している．その中で，相対性理論に関する解説書または解説動画は多くの人々の関心の的となっているように見受けられる．しかしながら相対性理論を正確に解説できる物理屋は非常に限られている．余程，物理をしっかり考え込んだ人でないと相対性理論の解説は難しい．実際，普通の物理学者が相対性理論の解説を書いたりすると，科学史的な知識を羅列的に書きなぐるため，かなりピンボケの内容となってしまう恐れが大である．そしてそれを青少年が読むと，その解説書から空想的な相対性理論を知識として受け入れてしまう恐れが少なくないと思われる．

これまでに書いた場の理論関連の教科書において，自分としては相対性理論の本質をしっかりと解説してきたと思っている．その意味では，いまさらここで解説する必要も理由もないのであるが，しかしこれらの教科書はほとんどが物理学の専門家用であり，青少年が理解できる内容とはとても言えない．それでここでは，少し趣を変えた形でこの小ノートを執筆している．それは想定している読者を中学生・高校生 (主には高校生) としているのである．しかしながら，自分がこのような青少年向けの解説書をうまく書けるとは到底，考えられないものであり，何か「場違い」な感じがしないでもない．

前書きからこのような硬い調子で書いて，中学生・高校生が読むであろうか？しかしながら現在のように情報が異常に多く氾濫している場合，正しい解説書の存在が極めて重要になっている．それは，相対性理論をきちんと理解する事は誰にとってもそう簡単ではない事に依っている．実は，相対性理論の変換式自体は非常に簡単で，高校生でも理解できるレベルではあると思うが，しかし相対性理論に関する考え方自体は決して易しいとは言えないものである．

ここでは出来る限り平易な言葉を使って，相対性理論とは何なのか，そして物理学においてどのくらい重要なのかを解説して行こう．前述したように想定している読者は主に高校生ではある．しかしながら，同時に相対性理論の解説書を書いている著者達やその動画の作成者達も読者の一部として考えている．それは相対性理論に関連する科学史的な知識には誤りが多い事を認識して欲しいからである．さらに，相対性理論において，どのような物理的な観測量が不変になり，また『時間』が何故，変換の対象になっているのかと言う問題をきちんと理解して欲しいと思っている．これらの点をしっかり自分の言葉で理解した上で，それから相対性理論とは何かと言う解説を書いて欲しいものである．

相対性理論の本質は単純で『互いに等速直線運動をしている慣性系はそれぞれ全て同等である』と言う事である．従ってどの慣性系においても物理学のすべての方程式は同じ形を持っている．実際，相対性理論の定式化はそれで完全であり，定式化された方程式がローレンツ変換に対して不変であればよいと言う事である．

相対性理論の解説書の中には『高速運動している慣性系の時計が遅れる』と説明してある場合があるかも知れないが，この解釈は間違いである．高速運動する慣性系の時計が遅れる事はない．確かに，ローレンツ変換の式より運動系の走行距離が γ 倍だけ伸びるが，これは運動系の時計が遅れるからではない．これは後程，詳しく解説しよう．

目次

1　物理学における『相対性』

『相対性』とはどのような意味なのかをまず，最初に考えてみよう．『相対性』の反対語は『絶対性』である．日本人にはわかりにくいかも知れないが，西欧の宗教において神は絶対的な存在である．一方，一般的に学校の成績評価は相対的である．現在も点数順に並べて成績をつける場合が大半であろうと思われるが，この成績でそれぞれの個人の評価をすることが『相対性』である．

それでは物理学において『相対性』をどのように使っているのであろうか？少し専門的になってしまうが物理学では慣性系を定義して，どの慣性系も同じ意味を持っているとしている．この場合，慣性系どうしの関係を『相対性』と呼んでいる．つまりは『慣性系の中で特別な存在の慣性系はない』と言う事である．

1.1　『静止系』

慣性系と言っても高校生には何を言っているのかわからない可能性があろう．まずは『系』の言葉の意味であるが，これは『箱』だと思っていればよいであろう．例えば，地上で物理の実験を考えるとしよう．通常，これを『静止系』と呼んでいる．今ここでバネの実験をしようとする場合，その実験室を箱と考えてこれが慣性系 (静止系) であるとしてそれ程，間違える事はないであろう．細かい事を言うと，地球の公転も自転も無視しているのだが，今の議論には全く影響はしない．

1.2　『運動系』

今，電車が等速直線運動をしているとしよう．つまり真っ直ぐ走って速さも変わらない状態である．この場合の電車の中は慣性系 (運動系) をなしている．従って，この電車を箱と考えると慣性系とは等速直線運動をしている箱であるとしてそれ程，間違える事はないと言える．

つまり，慣性系とはお互いに等速直線運動をしている箱の事だと考えればまずは十分であろう．

1.3 『箱』の具体例

慣性系を箱であるとして議論を進めて行くが，一番身近な箱は真っ直ぐ同じ速度で走っている電車であろう．以下は推奨できないが，この箱 (電車) の中でキャチボールをしたとすると，それは地上でするキャチボールと全く同じである事がわかる．これは相対性理論そのものである．但し，細かい事を言うと一様重力場は電車とは直交している (電車は平地を走る) と仮定している．

アメリカが１９７７年に打ち上げた人工衛星ボイジャー 1 号は現在，太陽系の外に飛び出そうとしている．このボイジャー 1 号は，等速直線運動をしている慣性系の箱であると考えて十分であろう．この箱の中に観測者はいないが，もしその箱の中でバネの実験をしてその実験結果をビデオに取って地球に送ってきたとしたら，そのデータは地上で行ったバネの実験と全く同じ結果になっていると言う事である．そしてこれが相対性理論である．

但し，地球を周回している人工衛星は慣性系の箱ではない．これは地球の重心を原点とした楕円軌道を周回している．この場合の慣性系は地球であり，回転している衛星は箱 (慣性系) とは無関係で，質点の運動そのものである．(細かい事を言うと地球は公転しているので慣性系ではない．しかし今の議論ではこの公転を無視しても全く問題なく，衛星の議論においては地球を静止系として充分である．)

2　相対性理論

それでは相対性理論とは具体的に何をどう言うのであろうか？以下にこの問題について解説して行こう．

物理学は質点 (粒子) の運動を扱う学問であるが，この運動を決める方程式の事を『運動方程式』と呼んでいる．バネの運動や星の運動を記述する運動方程式は Newton 方程式である．相対性理論とはこの運動方程式がどの箱 (慣性系) でも正しく成り立っていると言う事である．最初は相対性原理としてこれは要請であったが，現在は膨大な実験によりあらゆる角度から検証されているので，この原理は物理学の基礎と考えて十分である．従って，最も重要な事としてはどの箱 (慣性系) でも物理的な観測量はすべて同じとなっていると言う事であり，これは確かに実証されている事実である．

2.1　相対性理論の変換則

地上の系から見て，速度 v で等速直線運動をしている箱 (慣性系) における運動方程式の変換則について少しだけ議論しよう．今の場合，速度 v は光速と比べてはるかに小さいものとしよう．つまり

$$v \ll c \tag{1}$$

である．地上で見られるほとんど全ての速度はこれを満たしている．実際，地球重力からロケットが脱出する初速度は約 $v_e \simeq 11$ km/s だし，観測できる最高の速度は地球の公転速度であり，これは $V \simeq 30\,\mathrm{km/s}$ である．光速は $c \simeq 300,000$ km/s なので速度 v はどれも十分，光速より小さいものである．

2.2　ガリレオの相対性理論

ここから少し数式を使う事になるが，難しいと思ったら読み飛ばしても良いと思う．箱 (電車の系) が地上 (静止系) に対して一定速度 v で $x-$ 軸方向に運動しているとしよう．ここで大切な事はそれぞれの箱 (系) に座標系を定義する事ができ，その箱には観測者も定義する事ができる点である．今，静止系の座標と時間を $R(t,x,y,z)$，電車の系の座標と時間を $S(t',x',y',z')$ と表記しよう．但し，電車は光の速度 c と比べてゆっくり動いているとしている．この時，時間はどの系でも同じであり $t=t'$ となっている．

2.3　ガリレー変換

２つの座標系 $R(t,x,y,z)$ と $S(t',x',y',z')$ の間には

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \tag{2}$$

の関係式があり，これをガリレー変換という．相対性理論とはこの変換に対して，運動方程式 (今の場合，Newton 方程式) がその形を変えないと言うことである．例えば，１次元のバネの運動方程式の場合

$$\begin{aligned} R-\text{系} \ &: \quad m\ddot{x} = -kx \\ S-\text{系} \ &: \quad m\ddot{x'} = -kx' \end{aligned}$$

となっている．従ってこの微分方程式の解も同じ形になっている．

3　特殊相対性理論

箱の相対速度が静止系から見て光の速度に近くなった場合，変換則がガリレー変換ではうまく行かない事が分かっている．それでは，どのような変換ならばよいのであろうか？この変換はローレンツ変換と呼ばれるものであるが，この変換は実は，Maxwell 方程式を不変にする変換則であった．

3.1　ローレンツ変換

$S-$ 系の速度 v が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている．今度の場合，$R-$ 系の座標を $R(t,x,y,z)$ とした時，$S-$ 系の座標は $S(t',x',y',z')$ となり時間は別のものになる．それは観測者がそれぞれの時間を持つとしている．この場合 ローレンツ変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{3}$$

であり，γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式はマックスウェル方程式が $S-$ 系でも $R-$ 系でも同じ形の微分方程式になる要請を充たすように求められたものである．式 (3) で，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x \simeq x' + vt', \qquad t \simeq t', \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{4}$$

となり，ガリレー変換の式と一致している．従って，地球上で起こる全ての現象は非相対性理論の近似式で扱っても間違える事はまず無い．

3.2　運動量のローレンツ変換

質点の運動量とエネルギーはローレンツ変換に対してどの様に影響されるのであろうか？　今，$R-$ 系での質点のエネルギーと運動量を $(E, \boldsymbol{p})$ としよう．この時，$R-$ 系に対して $x-$ 軸に沿って速度 v で動いている $S-$ 系においては，この質点のエネルギーと運動量 $(E', \boldsymbol{p}')$ はローレンツ変換により

$$p_x{}' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \qquad E' = \gamma \left(E - v p_x \right), \qquad p_y{}' = p_y, \qquad p_z{}' = p_z \quad (5)$$

と与えられる．この時，$E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2$ を計算すると $\boxed{E'^2 - \boldsymbol{p}'^2 c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2}$ となり一定となる．この一定値は系の変換によらない量であり，それは質量である．従って

$$E'^2 - \boldsymbol{p}'^2 c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = (mc^2)^2 \quad (6)$$

と書く事ができる．ここで，運動量 p がその質量と比べて十分小さい場合，

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2} = mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots \quad (7)$$

となり，確かに非相対性理論の『分散関係式』が得られている事がわかる．

4　運動系の時間刻みは遅れるか？

ローレンツ変換の式を見ればわかるように，光速に近い速度で動いている箱 (慣性系) の時間が地上における時間と少しずれるように見える．しかしそれではこの時間の遅れは本当に起こっているのであろうか？

4.1　間違いの思考実験

以下に，これまで良く議論されてきた思考実験を行いながらこの時間の刻みがどうなるのかを解説して行こう．まず速度 v で等速直線運動をしている箱 (電車の慣性系) を考えよう．この場合，線路は当然，直線である．ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう．

● 地上の系からみた電車の系の時間刻み：　まず，箱 (電車の慣性系) の中にいる観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう．この場合，この箱の中の観測者は箱が動いているかどうかはわからないものと考えられる．そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 $(2\Delta\tau)$ を正確に測定できたと仮定しよう．この場合

$$\ell = c\Delta\tau \tag{8}$$

である．一方，地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる．この場合，その時間を $(2\Delta t)$ としよう．従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - \ell^2} = v\Delta t \tag{9}$$

となっている．この式から

$$\sqrt{c^2 - v^2}\ \Delta t = c\Delta\tau \tag{10}$$

が求まる．

よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t \tag{11}$$

となり，電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている．

● 電車の系からみた地上の時間刻み：　それでは，今度は同様の思考実験を電車の人から行ってみよう．地上が電車に対して動いているように見える速度は $(-v)$ となっている．それはローレンツ変換を逆に解いてみれば良くわかるものである．今の場合，式 (3) から

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{12}$$

となっていて確かに $(-v)$ となっている．しかしそれ以外は式 (3) と全く同じである．今度の場合，地上において鏡に向かってレーザービームを放ち，それを計測して時間を測る．この場合，電車の人から見るとこれまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta\tau \tag{13}$$

となる．

● 時間刻みの矛盾：　これは一体，どうした事であろうか？この結果である式 (11) と 式 (13) はお互いに矛盾している．これは何かが間違っている事は確かな事である．しかしながら，相対性理論の立場からしたら，どの系も同等であることから合理性はあるようにみえるのである．

4.2　思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の何処に間違いがあったのであろうか？これは式 (3) を見てみると良くわかるものである．t 秒後の電車の座標が $x' = x + vt$ としてしまった事が間違いの原因であった．電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は, ローレンツ変換の式 $x' = \gamma(x + vt)$ で与えられる．従って

$$v\Delta t \Longrightarrow \gamma v\Delta t, \qquad c\Delta t \Longrightarrow \gamma c\Delta t \tag{14}$$

と書き直す必要がある．すなわち式 (11) は

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\Delta t \\ &= \Delta t\end{aligned}$$

となり，時間の遅れがない事が証明されたのである．従って，どちらの系の時間も変更を受ける事はないと言う事で矛盾がいとも簡単に解決されている．

4.3　高速運動の慣性系の時計が遅れる事はない！

この考察でわかったことは『どの系の時計も遅れる事はない！』と言う事実である．物理学においては，この時計の遅れの話は直接，観測量とはなっていないため，ほとんど影響はないと考えている．

しかしながら，結構，色々な相対性理論の解説書では高速で動いている系の時間が遅れると言う解説がなされているものと思われる．これらの解釈は単純な間違いであるため，やはり修正が必要であろう．今後，相対性理論に対して，正しい描像を持って欲しいものである．

5　２個の慣性系が関係する相対性理論の具体例

ここで２個の慣性系が関係して物理的な観測量に影響が現われる場合の具体例をあげよう．しかしながら，相対性理論は運動学であり，相対性理論の変換性から何らかの力学がわかるわけではない．ある特殊な場合，他の慣性系のある種の情報がわかる事があるのだが，しかしこれは運動学以上の情報が得られるわけではない．

5.1　光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時，その星から発せらる光はローレンツ変換の影響を受ける．それは，光のドップラー効果 (Doppler effect) としてよく知られている現象であり，また観測もされている．星が速度 v で遠ざかっているとし，星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は Lorentz 変換より

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = p\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \qquad (15)$$

となり，光の運動量は減少している．これを波長で表せば

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\ \lambda \qquad (16)$$

となるので光の波長は大きくなる．これを赤方遷移 (red shift) という．

この現象が起こった理由は簡単である．粒子のエネルギーと運動量はローレンツ変換に対して変更を受けるからである．この事を物理学では『４次元運動量はベクトルなのでローレンツ変換で新しい４次元運動量に変換される』と言う言い方をしている．

5.2 大気圏で生成された μ-粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突して μ-粒子（質量 $m_\mu = 105.6\ \mathrm{MeV}/c^2$ ）を生成する場合がある．μ-粒子はその寿命 τ_0 として $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度であり，従ってこれは不安定な素粒子である．ここで問題は，この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である．これは相対性理論関連では昔よく議論された問題の一つでもある．この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{17}$$

と書かれている．この場合，崩壊幅 Γ はローレンツ不変な物理量である．従って，寿命もローレンツ変換に対して変化する事はない．つまりは地上でもこの μ-粒子の寿命は変わらない．

● μ-粒子の走行距離 L :　ここで μ-粒子の走行距離を計算しよう．その走行距離 L はローレンツ変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \tag{18}$$

である．ここでエネルギーが $1\ \mathrm{GeV}$ の μ-粒子が上空で生成されたとしよう．この時，$v \simeq c$ であり，また $\gamma \simeq 10.6$ である．従って，この μ-粒子の走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3\ \mathrm{km} \tag{19}$$

となり $v\tau_0$ より γ 倍，伸びている．この事より上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している．

● 加速器実験：　大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように，式 (18) によって与えられている．そしてこれは実験的にも確かめられている．

6　結び

これまで長い間『高速で運動する慣性系の時計は遅れる』と大半の物理屋は考えていたと思われる．しかし何故，このような事が起こり得たのであろうか？恐らく，この誤解は人々が主に科学史的な視点を基本としているからであると考えられる．

『時計の遅れ』の議論はすべて，ローレンツ変換の式から出発している．この変換では速度 v で運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt となっている．しかしこれまでの常識では，勿論 vt であった．ここでその γvt の解釈をどうすれば良いかであるが，人々はその変化の原因を v か t を修正する事で納得したいと考えたのであろう．科学史的な視点からしたら，確かにそれは理解できないわけではない．しかし理論物理の体系の立場からしたら，慣性系の相対性を基本とする限り，運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt である．従って，走行距離が γvt となる事自体を受け入れるべきであり，それが理論体系の視点である．これはガリレイ変換からローレンツ変換を導くことはできない事と関係している．勿論，その逆は可能である事は言うまでもない．

またこの問題に関しては『時計の遅れ』が直接の観測量にはなっていないと言う事も物理屋がそれ程，熱心には考えなかった理由でもあろう．その上，この『時計の遅れ』の話はこれまでほとんどSF的に扱われてきた面があり，実際，物理学としてはそれ程，重要視されなかったのであろう．さらに『時計の遅れ』に対しては，一般相対性理論の影響も多少はあったかも知れない．一般相対性理論の場合，その定式化自体が観測量と結びつかない理論であるため，それは検証以前の問題であった．このため，一般相対性理論関係ではほとんど SF 的なお話だけが人々の関心を引いてきたのである．さらに一般相対性理論のような無意味な理論が結構，人々にもてはやされてきたため『時計の遅れ』のような SF 的な解釈が生き延びたのかも知れない．

7. 付録

1. **エーテル**

   物理の科学史において，エーテルと言う言葉が良く出てくるが，そのエーテルとは一体，何なのであろうか？実は，これは空間に満たされているとした仮想的な物質であり，これ自体の観測は不可能であるとしている．このエーテルを導入した根拠ははっきりしている．これは光が真空中を伝搬していると言う事実を説明するために導入されたのである．２０世紀以前の物理学においては光は波であると考えられていたため，伝搬できる媒質としてこのエーテルを考えたのである．光が粒子であれば真空中を伝搬できて問題ないのであるが，１９世紀までは光が粒子であるとは，人々は思いもよらぬことであったと思われる．このため，真空中にもエーテルが存在しているとして光はこのエーテルによって伝搬すると考えたのである．従って，エーテルが空間を満たしているとするとそれは絶対空間となっている事に対応している．

2. Michelson-Morley **の実験**

   このエーテル説の見直しの必要性を実証したものが Michelson-Morley **の実験である．これは太陽からの光が地球の公転** (**速さ** v) **により** $c+v$ **となる光と** $c-v$ **となる光の干渉実験を行ったものである．そしてその結果は光速に対しては地球の公転は影響しない事が分かったのである．つまりどちらの場合も光の速度は変わらない事が実証されたものである．光が波であり，エーテルが存在しているのならば，光の速度は必ず，地球の公転の影響を受けなけらばならない．この実験から光はどの系でも不変であることが分かったのである．**

3. 一般相対性理論

一般相対性理論は慣性系の『箱』に対する方程式である．物理学は『箱』の中で質点の運動を記述して自然界の現象を理解しようとする学問であるが，その箱に対する方程式とはどういう意味があるのかが不明瞭である．これは物理学の方程式にはなっていない．

しかしそれにもかかわらず，一般相対性理論がこれまでかなり多くの人々に受け入れられて来たように思われる．何故であろうか？これにはいくつかの理由があると思うが，その内で最も重要と思われる物理的な理由が一つある．それは Einstein がこの一般相対性理論は重力理論と関係していると主張したからである．そして『ある仮定』を置くと確かに重力と関係づけられるように見えたのである．実際には，この仮定が間違っていて，それ自体が全く無意味なものであることが今は証明されている．従って一般相対性理論は重力理論とは全く無関係であるため，この理論にどういう物理的な意味があるのかが不明である．しかし現実問題としては，この一般相対性理論は物理のどの分野においても利用されたり使われたりしていると言う事実はない．従って，一般相対性理論が特に何らかの問題を惹き起こしていると言うこともない．

参考文献

[1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”,
(McGraw-Hill Book Company,1964)

[2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[3] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[4] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[5] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013