相対性理論　…　時計は遅れない！

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

最近の世の中，様々な解説書がネット上で氾濫している．その中で，相対性理論に関する解説書または解説動画は多くの人々の関心の的となっているように見受けられる．しかしながら相対性理論を正確に解説できる物理屋は非常に限られている．余程，物理をしっかり考え込んだ人でないと相対性理論の解説は難しい．実際，普通の物理学者が相対性理論の解説を書いたりすると，科学史的な知識を羅列的に書きなぐるため，かなりピンボケの内容となってしまう恐れが大である．そしてそれを青少年が読むと，その解説書から空想的な相対性理論を知識として受け入れてしまう恐れが少なくないと思われる．

これまでに書いた場の理論関連の教科書において，自分としては相対性理論の本質をしっかりと解説してきたと思っている．その意味では，いまさらここで解説する必要も理由もないのであるが，しかしこれらの教科書はほとんどが物理学の専門家用であり，青少年が理解できる内容とはとても言えない．それでここでは，少し趣を変えた形でこの小ノートを執筆している．それは想定している読者を中学生・高校生 (主には高校生) としているのである．しかしながら，自分がこのような青少年向けの解説書をうまく書けるとは到底，考えられないものであり，何か「場違い」な感じがしないでもない．

前書きからこのような硬い調子で書いて，中学生・高校生が読むであろうか？しかしながら現在のように情報が異常に多く氾濫している場合，正しい解説書の存在が極めて重要になっている．それは，相対性理論をきちんと理解する事は誰にとってもそう簡単ではない事に依っている．実は，相対性理論の変換式自体は非常に簡単で，高校生でも理解できるレベルではあると思うが，しかし相対性理論に関する考え方自体は決して易しいとは言えないものである．

ここでは出来る限り平易な言葉を使って，相対性理論とは何なのか，そして物理学においてどのくらい重要なのかを解説して行こう．前述したように想定している読者は主に高校生ではある．しかしながら，同時に相対性理論の解説書を書いている著者達やその動画の作成者達も読者の一部として考えている．それは相対性理論に関連する科学史的な知識には誤りが多い事を認識して欲しいからである．さらに，相対性理論において，どのような物理的な観測量が不変になり，また『時間』が何故，変換の対象になっているのかと言う問題をきちんと理解して欲しいと思っている．これらの点をしっかり自分の言葉で理解した上で，それから相対性理論とは何かと言う解説を書いて欲しいものである．

相対性理論の本質は単純で『互いに等速直線運動をしている慣性系はそれぞれ全て同等である』と言う事である．従ってどの慣性系においても物理学のすべての方程式は同じ形を持っている．実際，相対性理論の定式化はそれで完全であり，定式化された方程式がローレンツ変換に対して不変であればよいと言う事である．

相対性理論の解説書の中には『高速運動している慣性系の時計が遅れる』と説明してある場合があるかも知れないが，この解釈は間違いである．高速運動する慣性系の時計が遅れる事はない．確かに，ローレンツ変換の式より運動系の走行距離が γ 倍だけ伸びるが，これは運動系の時計が遅れるからではない．これは後程，詳しく解説しよう．

結びでは科学史と一般相対性理論について簡単に触れている。何かの参考になればと考えている。

[**備考**]　**相対性理論とは全く関係はないのだが、高校物理の教科書 (力学) を付録に載せている。検定済みの高校物理の教科書をチェックしていたら、その内容が極端に天下り的な記述になっていて驚き、またかなりショックを受けている。それで、少しでも物理が楽しくなるようにと考えて書き始めたのであるが、予想以上に難しくて閉口している。まだ中途段階ではあるが、まずは書けた部分をここに載せておこう。一部の若者にとって何かの役に立つかも知れないと期待している。**

目 次

第1章　物理学における『相対性』

『相対性』とはどのような意味なのかをまず，最初に考えてみよう.『相対性』の反対語は『絶対性』である．日本人にはわかりにくいかも知れないが，西欧の宗教において神は絶対的な存在である．一方，一般的に学校の成績評価は相対的である．現在も点数順に並べて成績をつける場合が大半であろうと思われるが，この成績でそれぞれの個人の評価をすることが『相対性』である．

それでは物理学において『相対性』をどのように使っているのであろうか？少し専門的になってしまうが物理学では慣性系を定義して，どの慣性系も同じ意味を持っているとしている．この場合，慣性系どうしの関係を『相対性』と呼んでいる．つまりは『慣性系の中で特別な存在の慣性系はない』と言う事である．

1.1　『静止系』

慣性系と言っても高校生には何を言っているのかわからない可能性があろう．まずは『系』の言葉の意味であるが，これは『箱』だと思っていればよいであろう．例えば，地上で物理の実験を考えるとしよう．通常，これを『静止系』と呼んでいる．今ここでバネの実験をしようとする場合，その実験室を箱と考えてこれが慣性系 (静止系) であるとしてそれ程，間違える事はないであろう．細かい事を言うと，地球の公転も自転も無視しているのだが，今の議論には全く影響はしない．

1.2　『運動系』

今，電車が等速直線運動をしているとしよう．つまり真っ直ぐ走って速さも変わらない状態である．この場合の電車の中は慣性系 (運動系) をなしている．従って，この電車を箱と考えると慣性系とは等速直線運動をしている箱であるとしてそれ程，間違える事はないと言える．つまり，慣性系とはお互いに等速直線運動をしている箱の事だと考えればまずは十分であろう．

1.3 『箱』の具体例

慣性系を箱であるとして議論を進めて行くが，一番身近な箱は真っ直ぐ同じ速度で走っている電車であろう．以下は推奨できないが，この箱 (電車) の中でキャチボールをしたとすると，それは地上でするキャチボールと全く同じである事がわかる．これは相対性理論そのものである．但し，細かい事を言うと一様重力場は電車とは直交している (電車は平地を走る) と仮定している．

アメリカが１９７７年に打ち上げた人工衛星ボイジャー1 号は現在，太陽系の外に飛び出そうとしている．このボイジャー1 号は，等速直線運動をしている慣性系の箱であると考えて十分であろう．この箱の中に観測者はいないが，もしその箱の中でバネの実験をしてその実験結果をビデオに取って地球に送ってきたとしたら，そのデータは地上で行ったバネの実験と全く同じ結果になっていると言う事である．そしてこれが相対性理論である．

但し，地球を周回している人工衛星は慣性系の箱ではない．これは地球の重心を原点とした楕円軌道を周回している．この場合の慣性系は地球であり，回転している衛星は箱 (慣性系) とは無関係で，質点の運動そのものである．(細かい事を言うと地球は公転しているので慣性系ではない．しかし今の議論ではこの公転を無視しても全く問題なく，衛星の議論においては地球を静止系として充分である．)

第2章　相対性理論

それでは相対性理論とは具体的に何をどう言うのであろうか？以下にこの問題について解説して行こう．

2.1　運動方程式

物理学は質点 (粒子) の運動を扱う学問であるが，この運動を決める方程式の事を『運動方程式』と呼んでいる．バネの運動や星の運動を記述する運動方程式は Newton 方程式である．相対性理論とはこの運動方程式がどの箱 (慣性系) でも正しく成り立っていると言う事である．最初は相対性原理としてこれは要請であったが，現在は膨大な実験によりあらゆる角度から検証されているので，この原理は物理学の基礎と考えて十分である．従って，最も重要な事としてはどの箱 (慣性系) でも物理的な観測量はすべて同じとなっていると言う事であり，これは確かに実証されている事実である．

2.2　相対性理論の変換則

地上の系から見て，速度 v で等速直線運動をしている箱 (慣性系) における運動方程式の変換則について少しだけ議論しよう．今の場合，速度 v は光速と比べてはるかに小さいものとしよう．つまり

$$v \ll c \tag{2.1}$$

である．地上で見られるほとんど全ての速度はこれを満たしている．実際，地球重力からロケットが脱出する初速度は約 $v_e \simeq 11$ km/s だし，観測できる最高の速度は地球の公転速度であり，これは $V \simeq 30\,\mathrm{km/s}$ である．光速は $c \simeq 300,000$ km/s なので速度 v はどれも十分，光速より小さいものである．

2.3　ガリレオの相対性理論

ここから少し数式を使う事になるが，難しいと思ったら読み飛ばしても良いと思う．箱 (電車の系) が地上 (静止系) に対して一定速度 v で $x-$ 軸方向に運動しているとしよう．ここで大切な事はそれぞれの箱 (系) に座標系を定義する事ができ，その箱には観測者も定義する事ができる点である．今，静止系の座標と時間を $R(t,x,y,z)$，電車の系の座標と時間を $S(t',x',y',z')$ と表記しよう．但し，電車は光の速度 c と比べてゆっくり動いているとしている．この時，時間はどの系でも同じであり $t=t'$ となっている．

2.3.1　ガリレー変換

２つの座標系 $R(t,x,y,z)$ と $S(t',x',y',z')$ の間には

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \tag{2.2}$$

の関係式があり，これをガリレー変換という．相対性理論とはこの変換に対して，運動方程式 (今の場合，Newton 方程式) がその形を変えないと言うことである．例えば，１次元のバネの運動方程式の場合

$$\begin{array}{lcl} R-\text{系} & : & m\ddot{x} = -kx \\ S-\text{系} & : & m\ddot{x}' = -kx' \end{array}$$

となっている．従ってこの微分方程式の解も同じ形になっている．

第3章　特殊相対性理論

箱の相対速度が静止系から見て光の速度に近くなった場合，変換則がガリレー変換ではうまく行かない事が分かっている．それでは，どのような変換ならばよいのであろうか？この変換はローレンツ変換と呼ばれるものであるが，この変換は実は，Maxwell 方程式を不変にする変換則であった．

3.1　ローレンツ変換

$S-$ 系の速度 v が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている．今度の場合，$R-$ 系の座標を $R(t,x,y,z)$ とした時，$S-$ 系の座標は $S(t',x',y',z')$ となり時間は別のものになる．それは観測者がそれぞれの時間を持つとしている．この場合 ローレンツ変換は

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{3.1}$$

であり， γ は $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式はマックスウェル方程式が $S-$ 系でも $R-$ 系でも同じ形の微分方程式になる要請を充たすように求められたものである．式 (3.1) で，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x\simeq x'+vt',\qquad t\simeq t',\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{3.2}$$

となり，ガリレー変換の式と一致している．従って，地球上で起こる全ての現象は非相対性理論の近似式で扱っても間違える事はまず無い．

3.2 運動量のローレンツ変換

質点の運動量とエネルギーはローレンツ変換に対してどの様に影響されるのであろうか？ 今，$R-$ **系での質点のエネルギーと運動量を** $(E, \boldsymbol{p})$ **としよう．この時，**$R-$ **系に対して** $x-$ **軸に沿って速度** v **で動いている** $S-$ **系においては，この質点のエネルギーと運動量** $(E', \boldsymbol{p}')$ **はローレンツ変換により**

$$p_x{}' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \qquad E' = \gamma\left(E - vp_x\right), \qquad p_y{}' = p_y, \qquad p_z{}' = p_z \tag{3.3}$$

と与えられる．この時，$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2$ **を計算すると** $\boxed{E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2}$ **となり一定となる．この一定値は系の変換によらない量であり，それは質量である．従って**

$$E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \tag{3.4}$$

と書く事ができる．ここで，運動量 p **がその質量と比べて十分小さい場合，**

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \boldsymbol{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots \tag{3.5}$$

となり，確かに非相対性理論の『分散関係式』が得られている事がわかる．

第4章　運動系の時間刻みは遅れるか？

ローレンツ変換の式を見ればわかるように，光速に近い速度で動いている箱 (慣性系) の時間が地上における時間と少しずれるように見える．しかしそれではこの時間の遅れは本当に起こっているのであろうか？

4.1　間違いの思考実験

以下に，これまで良く議論されてきた思考実験を行いながらこの時間の刻みがどうなるのかを解説して行こう．まず速度 v で等速直線運動をしている箱 (電車の慣性系) を考えよう．この場合，線路は当然，直線である．ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう．

4.1.1　地上の系からみた電車の系の時間刻み

まず，箱 (電車の慣性系) の中にいる観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう．この場合，この箱の中の観測者は箱が動いているかどうかはわからないものと考えられる．そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 $(2\Delta\tau)$ を正確に測定できたと仮定しよう．この場合

$$\ell = c\Delta\tau \tag{4.1}$$

である．一方，地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる．この場合，その時間を $(2\Delta t)$ としよう．従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - \ell^2} = v\Delta t \tag{4.2}$$

となっている．この式から

$$\sqrt{c^2 - v^2}\ \Delta t = c\Delta\tau \tag{4.3}$$

が求まる．よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t \tag{4.4}$$

となり，電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている．

4.1.2 電車の系からみた地上の時間刻み

それでは，今度は同様の思考実験を電車の人から行ってみよう．地上が電車に対して動いているように見える速度は $(-v)$ となっている．それはローレンツ変換を逆に解いてみれば良くわかるものである．今の場合，式 (3.1) から

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{4.5}$$

となっていて確かに $(-v)$ となっている．しかしそれ以外は式 (3.1) と全く同じである．今度の場合，地上において鏡に向かってレーザービームを放ち，それを計測して時間を測る．この場合，電車の人から見るとこれまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta\tau \tag{4.6}$$

となる．

4.1.3 時間刻みの矛盾

これは一体，どうした事であろうか？この結果である式 (4.4) と 式 (4.6) はお互いに矛盾している．これは何かが間違っている事は確かな事である．しかしながら，相対性理論の立場からしたら，どの系も同等であることから合理性はあるようにみえるのである．

4.2　思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の何処に間違いがあったのであろうか？これは式 (3.1) を見てみると良くわかるものである．t 秒後の電車の座標が $x' = x + vt$ としてしまった事が間違いの原因であった．電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は, ローレンツ変換の式 $x' = \gamma(x + vt)$ で与えられる．従って

$$v\Delta t \Longrightarrow \gamma v\Delta t, \qquad c\Delta t \Longrightarrow \gamma c\Delta t \tag{4.7}$$

と書き直す必要がある．すなわち式 (4.4) は

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t \\ &= \Delta t\end{aligned}$$

となり，時間の遅れがない事が証明されたのである．従って，どちらの系の時間も変更を受ける事はないと言う事で矛盾がいとも簡単に解決されている．

4.3　高速運動の慣性系の時計が遅れる事はない！

この考察でわかったことは『どの系の時計も遅れる事はない！』と言う事実である．物理学においては，この時計の遅れの話は直接，観測量とはなっていないため，ほとんど影響はないと考えている．

しかしながら，結構，色々な相対性理論の解説書では高速で動いている系の時間が遅れると言う解説がなされているものと思われる．これらの解釈は単純な間違いであるため，やはり修正が必要であろう．今後，相対性理論に対して，正しい描像を持って欲しいものである．

第5章　２個の慣性系が関係する相対性理論の具体例

ここで２個の慣性系が関係して物理的な観測量に影響が現われる場合の具体例をあげよう．しかしながら，相対性理論は運動学であり，相対性理論の変換性から何らかの力学がわかるわけではない．ある特殊な場合，他の慣性系のある種の情報がわかる事があるのだが，しかしこれは運動学以上の情報が得られるわけではない．

5.1　光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時，その星から発せらる光はローレンツ変換の影響を受ける．それは，光のドップラー効果 (Doppler effect) としてよく知られている現象であり，また観測もされている．星が速度 v で遠ざかっているとし，星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は Lorentz 変換より

$$p' = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right) = \gamma\left(p - \frac{vp}{c}\right) = \frac{p\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = p\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{5.1}$$

となり，光の運動量は減少している．これを波長で表せば

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\ \lambda \tag{5.2}$$

となるので光の波長は大きくなる．これを赤方遷移 (red shift) という．

この現象が起こった理由は簡単である．粒子のエネルギーと運動量はローレンツ変換に対して変更を受けるからである．この事を物理学では『４次元運動量はベクトルなのでローレンツ変換で新しい４次元運動量に変換される』と言う言い方をしている．

5.2 大気圏で生成された μ-粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突して μ-粒子（質量 $m_\mu = 105.6\ \mathrm{MeV}/c^2$ ）を生成する場合がある．μ-粒子はその寿命 τ_0 として $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度であり，従ってこれは不安定な素粒子である．ここで問題は，この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である．これは相対性理論関連では昔よく議論された問題の一つでもある．この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{5.3}$$

と書かれている．この場合，崩壊幅 Γ はローレンツ不変な物理量である．従って，寿命もローレンツ変換に対して変化する事はない．つまりは地上でもこの μ-粒子の寿命は変わらない．

5.2.1 μ-粒子の走行距離 L

ここで μ-粒子の走行距離を計算しよう．その走行距離 L はローレンツ変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \tag{5.4}$$

である．ここでエネルギーが $1\ \mathrm{GeV}$ の μ-粒子が上空で生成されたとしよう．この時， $v \simeq c$ であり，また $\gamma \simeq 10.6$ である．従って，この μ-粒子の走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3\ \mathrm{km} \tag{5.5}$$

となり $v\tau_0$ より γ 倍，伸びている．この事より上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している．

5.3 加速器実験

大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように，式 (5.4) によって与えられている．そしてこれは実験的にも確かめられている．

第6章　結び

これまで長い間『高速で運動する慣性系の時計は遅れる』と大半の物理屋は考えていたと思われる．しかし何故，このような事が起こり得たのであろうか？恐らく，この誤解は人々が主に科学史的な視点を基本としているからであると考えられる．

6.1　時計の遅れ

『時計の遅れ』の議論はすべて，ローレンツ変換の式から出発している．この変換では速度 v で運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt となっている．しかしこれまでの常識では，勿論 vt であった．ここでその γvt の解釈をどうすれば良いかであるが，人々はその変化の原因を v か t を修正する事で納得したいと考えたのであろう．科学史的な視点からしたら，確かにそれは理解できないわけではない．しかし理論物理の体系の立場からしたら，慣性系の相対性を基本とする限り，運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt である．従って，走行距離が γvt となる事自体を受け入れるべきであり，それが理論体系の視点である．これはガリレイ変換からローレンツ変換を導くことはできない事と関係している．勿論，その逆は可能である事は言うまでもない．

6.1.1　物理の観測量

またこの問題に関しては『時計の遅れ』が直接の観測量にはなっていないと言う事も物理屋がそれ程，熱心には考えなかった理由でもあろう．その上，この『時計の遅れ』の話はこれまでほとんどSF的に扱われてきた面があり，実際，物理学としてはそれ程，重要視されなかったのであろう．さらに『時計の遅れ』に対しては，一般相対性理論の影響も多少はあったかも知れない．一般相対性理論の場合，その定式化自体が観測量と結びつかない理論であるため，それは検証以前の問題であった．このため，一般相対性理論関係ではほとんど SF 的なお話だけが人々の関心を引いてきたのである．さらに一般相対性理論のような無意味な理論が結構，人々にもてはやされてきたため『時計の遅れ』のような SF 的な解釈が生き延びたのかも知れない．

6.2 科学史

科学史では相対性理論がどのように発展してきたのかを簡単に見て行こう。まずは、エーテルと Michelson-Morley の実験を解説しよう。

6.2.1 エーテル

物理の科学史において，エーテルと言う言葉が良く出てくるが，そのエーテルとは一体，何なのであろうか？実は，これは空間に満たされているとした仮想的な物質であり，これ自体の観測は不可能であるとしている．このエーテルを導入した根拠ははっきりしている．これは光が真空中を伝搬していると言う事実を説明するために導入されたのである．２０世紀以前の物理学においては光は波であると考えられていたため，伝搬できる媒質としてこのエーテルを考えたのである．光が粒子であれば真空中を伝搬できて問題ないのであるが，１９世紀までは光が粒子であるとは，人々は思いもよらぬことであったと思われる．このため，真空中にもエーテルが存在しているとして光はこのエーテルによって伝搬すると考えたのである．従って，エーテルが空間を満たしているとするとそれは絶対空間となっている事に対応している．

6.2.2 Michelson-Morley の実験

このエーテル説の見直しの必要性を実証したものが Michelson-Morley の実験である．これは太陽からの光が地球の公転 (速さ v) により $c+v$ となる光と $c-v$ となる光の干渉実験を行ったものである．そしてその結果は光速に対しては地球の公転は影響しない事が分かったのである．つまりどちらの場合も光の速度は変わらない事が実証されたものである．光が波であり，エーテルが存在しているのならば，光の速度は必ず，地球の公転の影響を受けなけらばならない．この実験から光はどの系でも不変であることが分かったのである．

6.3　何故、一般相対論は無意味か？

この節は青少年には難し過ぎるであろう。ここは読み飛ばせばよいと思う。Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である [6]．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題は不思議ではあるが，しかし謎でもある．

6.3.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．

6.3.2　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{6.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

6.3.3　Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2=(cdt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2$$

を挙げておこう．

6.3.4 Minkowski 空間

この $(ds)^2$ はMinkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{6.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \tag{6.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{6.4}$$

としている．この時，dx^μ, dx_μ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{6.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

6.3.5 一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (6.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

6.3.6　$(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが， $(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

6.3.7　$(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{6.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

6.3.8　$g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (6.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

6.3.9　一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (6.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

6.3.10　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

[２０２３年４月加筆]

付 録A　高校物理(粒子の運動)

力学の基本は粒子 (質点) の運動の時間発展を追って行く事である。従って、粒子の速度や加速度を計算したり、また力が働くとその運動がどのように変化するのかと言う問題を調べて行く事になっている。

A.1　粒子 (質点)

力学では粒子の運動を扱う。この場合、粒子とは何かと言う事をまずはっきりさせる事が必要であろう。例えば、野球のボールを考えてその運動を扱う時、これを粒子と考える事にしている。この場合、ボールには大きさがあり、これは一見、困るように見える。しかし物理ではこのボールの重心を粒子の質点と考えて議論を進めて行く。

力学で最も成功を収めたのは地球の公転を正確に予言できることである。この場合、地球は物凄く大きいのに粒子として扱って大丈夫なのかと心配するかも知れない。しかし、この場合も地球の重心を考えてその重心の運動を扱う事にしている。そして実際、非常にうまく記述できているのである。

現実問題としては、粒子は有限の大きさを持っている。粒子の有限性の効果は実際、無視できないくらい大きい場合もある。しかし大学での物理でもこの問題を正しく取り扱う事は容易なことではなく、実際、この有限性の効果がきちんと議論されることはない。従って、高校の物理で学ぶ問題ではない事は明らかであろう。

A.1.1　粒子の座標

粒子の運動を記述するために、座標系を決める必要がある。その決められた座標系において、粒子の座標を点 P(x,y,z) としよう。落下などの実際の運動は平面運動になる事がわかっているので、通常は P(x,z) として２次元平面を考えるのがよいであろう。通常は横軸を x-軸として縦軸を z-軸ととっている。

A.2 粒子の速度

粒子が直線運動をしている場合、これは１次元の運動となる。ここで粒子の座標を $x(t)$ としよう。力学における粒子の運動とはその座標の時間発展の事である。この粒子の座標は $t+\Delta t$ 後には $x(t+\Delta t)$ となる。ここで Δt とはほんの一瞬の時間差であると言う定義である。この場合、この粒子の速度 $v(t)$ は

$$v(t) \equiv \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{A.1}$$

となり、これが速度の定義である。すなわち、時間差 Δt の間に粒子はどれだけ x-軸を動いたかと言う問題である。しばしば

$$\Delta x \equiv x(t+\Delta t)-x(t) \tag{A.2}$$

と粒子が動いた微小距離を定義して、微分 (速度 $v(t)$) を

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{A.3}$$

とする場合があるが、どちらでもよい。

A.2.1 100 m 競争の速度

競技者が 100 m走をしている場合を想定しよう。この走者が $t=5\,[\mathrm{s}]$ すなわち 5 秒後の位置を $x(5)=50\,[\mathrm{m}]$ としよう。ここで [s] と [m] は秒とメートルを表している。そして $t=5.1\,[\mathrm{s}]$ すなわち 5.1 秒後の位置を $x(5.1)=50.75\,[\mathrm{m}]$ としよう。この場合、この走者の速度は

$$v(5) = \frac{x(5+0.1)-x(5)}{0.1} = \frac{0.75}{0.1} = 7.5 \ [\mathrm{m/s}] \tag{A.4}$$

となっている。これは時速 27 [km/h] なので、相当早い選手と言う事になる。ちなみにマラソン走者が 40 km を２時間で走ったとすればその平均速度は時速 20 [km/h] となっている。また 100 m走を 10 秒で走ったら 10 [m/s] であるが、これは世界的なレベルと言えよう。

A.3　微分 (係数)

加速度を学ぶ前に、微分について簡単に解説しておこう。式 (A.1) において Δt を十分小さくする場合、これを微分 (係数) と呼んでいる。どのくらい小さく取れば良いのかと気になるかも知れないが、例えば $x(t)$ が [m] の大きさの議論をしている場合、$\Delta x \simeq 10^{-10}$ [m] を取れば十分小さい事は明らかであろう。この場合、Δx を十分小さくする事を極限を取ると言う言い方をするが、実際問題としては十分小さいとして物理学への応用の場合、問題が生じる事はない。但し、一つ重要なポイントとしては Δx がゼロになる事は決してないと言う事であろう。物理に取って、数学的な厳格さは無用であるが、しかし無限小とゼロとは全く違うと言う事である。これは x-軸の実数列を考えて見れば明らかであろう。$x = 0$ と言う点は１点であるが、無限小は無限個ある事から理解できるであろう。

今後、どの科学系の学問を学ぶにしても、微分が必ず重要になっている。これは直感的には明らかであろう。微分は『その点の傾き』であり、従ってこれは『傾向』を表しているからである。速度の場合、微分係数が正であるとは、その速度が少し大きくなると言う事を示している。これは坂道で考えたらさらに良く分かる事である。微分が正であれば上り坂であり、負であれば下り坂となる。微分がゼロの場合、道は平坦である。これが傾向である。

A.3.1　微分の定義のまとめ

まとめておくと、関数 $f(x)$ があるとして微分の定義は

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (\Delta x \text{ は無限小}) \tag{A.5}$$

である。この微分係数は

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{A.6}$$

とも書く。式 (A.5) において実際には

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + C_0 \Delta x + \cdots \tag{A.7}$$

と補正項が出てくるが、Δx が無限小なのでこれは無視しても全く心配する必要はないと言う事である。

A.3.2 微分の公式

微分において、定義式 (A.5) を使って計算するのは１回だけで良いと思う。その後は、微分の公式として覚える事が大切である。これは掛け算の九九とほとんど同じである。最も重要な公式は

$$f(x) = x^n, \qquad \text{の時}, \qquad f'(x) = \frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{A.8}$$

であろう。この計算は簡単なのでここに書いておこう。まず $(x+\Delta x)^n$ は２項定理により

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots \tag{A.9}$$

と展開できる。よって

$$\begin{aligned} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\Delta x + \cdots \\ &\simeq nx^{n-1} \end{aligned} \tag{A.10}$$

となって式 (A.8) が求まっている。

A.3.3 微分公式のまとめ

$$f(x) = x^\alpha, \qquad \text{の時}, \qquad f'(x) = \frac{d\,x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{A.11}$$

ここで α は任意の実数に対して成立する。

A.4　粒子の加速度

現実の世界においては、速度が一定のまま続くと言う場合は稀にしか起ってはいない。１００m走においても、走り出しは速度ゼロだから、その後、走者は少しずつ速度を上げて行く事になっている。すなわち、速度の変化が起こっている。

A.4.1　加速度

この場合、時間差 Δt の間に粒子の速度がどれだけ増加したかを考えて、その増加分を時間差 Δt で割ったものを加速度 $a(t)$ と定義する。この場合、$v(t)$ から $v(t+\Delta t)$ へ増加した増加分を

$$\Delta v \equiv v(t+\Delta t) - v(t) \tag{A.12}$$

とすれば、加速度 $a(t)$ は

$$a(t) \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{A.13}$$

となっている。これが加速度の定義である。

A.4.2　100 m 競争の加速度

競技者が 100 m走をしている場合を想定しよう。この走者が $t = 1$ [s] すなわち 1 秒後の速度を $v(1) = 3.5$ [m/s] としよう。そして 1.1 秒後の速度を $v(1.1) = 4.0$ [m/s] としよう。この時、$t = 1$ におけるこの競技者の加速度 $a(1)$ は

$$a(1) = \frac{v(1+0.1) - v(1)}{0.1} = 5 \ \mathrm{m/s^2} \tag{A.14}$$

となっている。ちなみに自由落下する場合、その粒子の重力加速度は $g = 9.8 \ \mathrm{m/s^2}$ である。但し、この場合空気抵抗は無視している。

A.4.3 加速度の変化？

物理では加速度の変化分を考える事はない。この理由を正確に答えることはできないが、恐らく、加速度の変化が生じた場合、それによって引き起こされる自然現象があまり知られていないと言う事であろう。さらに、ある力 F が粒子に加えられた場合、その粒子の加速度 a は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{A.15}$$

となっている。これが Newton 方程式である。ここで $\frac{d^2x}{dt^2}$ と言う標識は x を t で２回微分をしなさいと言う意味であり、それ以上の意味はない。昔、人々は微分することを『たたく』と言っていた。従って、２回微分は『２回たたけ』と言う事である。これは　微分公式を知っていればまさにその通りであると言えよう。この Newton 方程式が力学の基本式となっている。ここで m は粒子の質量である。力学における本来の課題はこの Newton 方程式 (微分方程式) を解く事であるが、ここでは行わない。その理由は単純で、微分方程式を解く事の難しさは微分演算と比べて数倍、難しくなっているからである。

A.4.4 速度と運動量

力学では速度が基本物理量となっている。しかしながら量子力学でも相対性理論でも基本物理量は運動量であり速度ではない。量子力学においては速度は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{A.16}$$

として求められる。一方、相対性理論においては

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \tag{A.17}$$

により求めることができる。ところが、力学の方程式は量子力学の方程式を近似する事により導出されているものである。その意味で、式 (A.16) における時間微分は量子力学から直接、求める事ができるのであるが、それ以上 (加速度の時間変化) は量子力学から直接的に求めることはできない。

A.5　ベクトル

前節で $\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{F}$ と言うベクトルを導入したが、これは例えば

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z) \tag{A.18}$$

のことでそれ以上のものではない。特に、高校の物理で学ぶベクトルの場合、ベクトルの足し算・引き算がほとんどである。この場合、成分に分けて計算した方が効率的である。ベクトルは絵を描いて計算しようとするとさらにわからなくなるので注意が必要である。

A.5.1　ベクトル演算 – 内積

ベクトルの演算には足し算・引き算に加えて掛け算が定義されている。この演算の導入はベクトルの演算を飛躍的に拡大することになっているが、確かに非常に便利である。勿論、これは便利以上の意味があるわけではないが、しかしこれがないと計算式はほぼ、無限に面倒なものとなってしまう事であろう。

ここではまず内積から解説しよう。今、２個のベクトルを

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \tag{A.19}$$

とする時、内積を

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{A.20}$$

と定義する。この場合、

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \tag{A.21}$$

となる。従って、例えば $|r|$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ の距離を表している。

A.5.2　ベクトル演算 – 外積

次に外積を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{A.22}$$

と定義しよう。この場合、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ は定義式から明らかであるが、非常によく使うので覚えておこう。外積は２個のベクトルの掛け算の結果がまたベクトルになっているので物理では特別な意味を持っている場合がよくある。例えば角運動量 L は

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \quad (\text{但し}, \ \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \ \ \text{は運動量}) \tag{A.23}$$

と定義されるが、これは非常に重要な役割を果たすことになる。また、磁場 B の下で運動する電子に対して Lorentz 力 F_L

$$\boldsymbol{F}_L = e\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{A.24}$$

が働く。これら外積に関連する物理現象をきちんと扱う事は容易な事ではない。従って、高校の物理においては、例えば角運動量を定義するがその性質を詳しく議論する事はあまりないであろう。但し、力のモーメントを扱う時は少し、必要になっている。

A.5.3　単位ベクトル $[\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z]$

ここで x, y, z 座標系における単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ を導入しよう。これは

$$\boldsymbol{e}_x \equiv (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_y \equiv (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_z \equiv (0,0,1), \tag{A.25}$$

と定義されている。この時、r は

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = (x, y, z) \tag{A.26}$$

と書かれている。さらに単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ の間には

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{A.27}$$

の関係がある。また

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0, \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0 \tag{A.28}$$

の直交関係が成り立っている。

A.6　保存量

　物理で最も重要な概念は『保存量』である。この定義は簡単で、ある物理量 E が保存量であるとは

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{A.29}$$

となっている事である。この式は E が時間に依らないと言っている。すなわち、E は時間に依らずずっと同じ量となっていると言う事である。そして物理ではこれを E が保存していると言う。基本的には冷蔵庫による保存と同じことであるが、今の場合、保存は絶対的である。

A.6.1　運動量の保存

　質量 m の粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ はその速度を $\boldsymbol{v}$ とすると

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v} \tag{A.30}$$

で定義されている。これは速度とほとんど同じではないかと思われるかも知れないが１粒子では確かに大きな差はない。しかし２個の粒子を考えて見よう。それぞれの粒子に 1, 2 のラベルを付けると運動量は

$$\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2 \tag{A.31}$$

となる。それぞれの Newton 方程式は

$$m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}, \quad m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{A.32}$$

となっている。

A.6.2 作用と反作用

ここで

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{A.33}$$

となっている場合を考えよう。これは作用と反作用に対応しているが、この言葉が物理で使われることはほとんどない。式 (A.33) において、衝突を考える場合、この条件は実際、良く満たされている。この場合、

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0 \tag{A.34}$$

となる。これは

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0 \tag{A.35}$$

となり、全運動量 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ が保存している事を示している。

A.6.3 ２個の粒子の衝突

この運動量の保存に関しては、２個の粒子の衝突現象を扱う時に重要になる。但し、衝突の問題を動力学的に扱う事は非常に難しいため、高校の物理で扱うことはないであろう。しかしながら、衝突の問題を運動学だけで議論する事はそれ程、難しい事ではないので次章で解説を試みよう。

付 録B　高校物理(静の力学)

高校物理では釣り合いの問題を良く扱っている。これは一見，易しそうに見えるが、しかしながら力学としての観点からするとかなり難しい。大学での物理でもなかなか教えきれない問題となっている。その理由は簡単で、力学は基本的に質点の運動を扱う事が主なテーマである。ところが、釣り合いを議論するときには棒とかの剛体が含まれる場合を扱う事になっている。

Newton 方程式は質量 m の質点に対する２階の微分方程式である。棒は質点ではない。どうしたら力学的に扱う事ができるのであろうか？一つの方法としては、棒の代わりに長さ ℓ の非常に軽くてしかし伸び縮しなく、さらに折れない物質を考えて、その両端に質量 m の粒子をくっつけてこの粒子の運動として扱う事であろう。しかしまずは２個の質点に対して運動量の保存と力のモーメントについて議論して行こう。

B.1　運動量の保存

運動量 p を $\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}$ で定義している．この運動量 p を用いてニュートン方程式を書き直すと

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{B.1}$$

となっている．これは明らかに保存量と直接は関係していない．しかしながら，もし力 F がゼロの時は $\boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0}$ となり運動量 p は保存量である．これは自由粒子の運動を意味している．

B.1.1　２体系の運動量保存

ここで２体系の運動を考えよう．今，質点 m_1 の座標を $\boldsymbol{r}_1$ とし、質点 m_2 の座標を $\boldsymbol{r}_2$ としよう．この時，質点同士が衝突してそれぞれが力 F_{12} を受けたとしよう．この時のニュートン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{B.2}$$

となっている．ここで質点１が質点２に力を及ぼしている場合，そのベクトルの方向はそれぞれ逆になっている．従って，$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0}$ である．よって

$$\frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0 \tag{B.3}$$

である．これから

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{C} \tag{B.4}$$

が求まる．ここで C は定数ベクトルである．すなわち，２個の粒子の運動量の和は一定であることがわかる．

B.2　衝突における運動量保存

ここで衝突前後の運動量について考えてみよう．衝突を考えるため，１の粒子の運動量を p_1 として２の粒子の運動量を p_2 としよう．この時，衝突の前後での運動量保存則は衝突後の運動量を p'_1, p'_2 として

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p'}_1 + \boldsymbol{p'}_2 \tag{B.5}$$

である．ここで２の粒子は止まっていたとしよう．すなわち $p_2 = 0$ と仮定する．この時，衝突前後のエネルギー保存は

$$\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{2m_1} = \frac{\boldsymbol{p'}_1{}^2}{2m_1} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p'}_1)^2}{2m_2} \tag{B.6}$$

となっている．これを解くと p'_1 は p_1 で表すことができる．

B.2.1　無限に重い物質との衝突

ここで簡単なために，m_2 の質量が無限に大きいとしよう．この時，式 (B.6) より $\boldsymbol{p}_1 = \pm \boldsymbol{p'}_1$ となる．このうち $\boxed{\boldsymbol{p'}_1 = -\boldsymbol{p}_1}$ の解のみが物理的に意味がある．すなわち，１の粒子は壁に衝突して同じ大きさの運動量を持って反対方向に跳ね返ってきたということである．

B.2.2　力積

力積という言葉が力学の教科書に出てくる事がある．しかし力積と何であろうか？この場合、ニュートン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{B.7}$$

であるが，変形すると

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta t\, \boldsymbol{F} \tag{B.8}$$

となる．この右辺を力積と呼んでいて運動量の変化分に対応している．

● **一定の力 $\boldsymbol{F}$:　力 $\boldsymbol{F}$ が一定の時，短い時間 δt での式 (B.8) は**

$$\boldsymbol{p}_{(t=\delta t)} - \boldsymbol{p}_{(t=0)} = \boldsymbol{p} = \delta t\, \boldsymbol{F} \tag{B.9}$$

となる．但し，最初，この質点は止まっていたと仮定したので $\boldsymbol{p}_{(t=0)} = 0$ である．また $\boldsymbol{p}_{(t=\delta t)} = \boldsymbol{p}$ と置きなおしている．

● **粒子の初速度 $\boldsymbol{v}_0$:　この質点の質量を m としよう．この質点に力 $\boldsymbol{F}$ を加えると質点が動き始めるが，その初速度 $\boldsymbol{v}_0$ は**

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\delta t\, \boldsymbol{F}}{m} \tag{B.10}$$

となっている．

B.3　力のモーメント

角運動量は $L = \boldsymbol{r} \times m v$ で定義されている．今 2 個の質点系の角運動量を

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m_2 \boldsymbol{v}_2 \tag{B.11}$$

で定義しよう．ここで $\boxed{\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}}$ を計算してみよう．この時

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + \boldsymbol{r}_2 \times m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \tag{B.12}$$

となる．但し、$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \boldsymbol{v}_1$,　$\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \boldsymbol{v}_2$ より、

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = 0 \tag{B.13}$$

を使っている。ここで、それぞれの質点が

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1, \qquad m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2 \tag{B.14}$$

という Newton 方程式に従っていると仮定しよう．これより $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{B.15}$$

となっている．式 (B.15) の右辺を N と定義して力のモーメントという．よって、N は

$$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{B.16}$$

である．

B.3.1　静的な過程

　ここで系が力学的な運動はしていなく静的な場合，$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=0$ である．従って，この時は力のモーメントは定数となっている．すなわち

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2=0 \tag{B.17}$$

である．これは釣り合いを議論するときに良く使う方程式である．

B.4　釣り合い

　最も簡単な例題として，天秤の釣り合いを議論しよう．今，支点を O としてこれを原点としよう．重さが無視できる１本の棒を x 軸上に置き，支点 O から負の方向の長さは ℓ_1，正の方向の長さ ℓ_2 としよう．また，y 軸の正の方向が垂直上向きとしよう．この時，棒 ℓ_1 の左端に質量 m_1，棒 ℓ_2 の右端に質量 m_2 のおもりを置いたとしよう．この時，式 (B.17) を当てはめると

$$(-\ell_1\boldsymbol{e}_x)\times(-m_1g\boldsymbol{e}_y)+\ell_2\boldsymbol{e}_x\times(-m_2g\boldsymbol{e}_y)=0 \tag{B.18}$$

である．よって

$$\ell_1m_1=\ell_2m_2 \tag{B.19}$$

が釣り合いの条件となっている．

B.5 テニスボールの力学

テニスボールの回転エネルギーと並進エネルギーの比について考察しよう。但し、ボールの慣性モーメントの式とそのエネルギーは与えられるものとしよう。

半径 R のテニスボールを考えてその質量を M としよう。テニスボールの場合、質量は表面にだけ分布していると仮定して十分なので、そのテニスボールの慣性モーメント I は

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \tag{B.20}$$

である。一方、質量が一様に分布している半径 R の球の場合、慣性モーメント I は

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{B.21}$$

である。このためテニスボールの場合、同じ質量と半径を持つ硬球の約 1.7 倍のエネルギーを持っている。

B.5.1 回転運動のエネルギー T_r

ここでまず、半径 R のテニスボール (R=**3.4 cm**) の回転運動のエネルギー T_r を計算しよう。これは回転の角速度を ω とすると

$$T_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{B.22}$$

である。よって

$$T_r = \frac{1}{3}MR^2\omega^2 \tag{B.23}$$

となる。一方、速度 v のボールの並進運動のエネルギー T_t は

$$T_t = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{B.24}$$

である。

B.5.2　数値評価

　それでは大雑把に具体的な数値を見てみよう。今、ボールスピードは $v = 100$ [**km/h**] =**2780** [**cm/s**] としよう。また回転数 N を N =**80** [**回/s**] と取ってみよう。この時、

$$R\omega = 2\pi NR \text{ [cm/s]} \tag{B.25}$$

が計算できる。これより回転運動と並進運動のエネルギーの比は

$$\frac{T_r}{T_t} = \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi NR}{v}\right)^2 \simeq 0.25 \tag{B.26}$$

となる。すなわちこの場合、回転運動のエネルギーは並進運動のエネルギーの２５% にもなっていると言う事である。

付 録C　高校物理(仕事とエネルギー)

質点の力学で最も重要な物理量はエネルギーである。その理由は簡単で、このエネルギーが考えている力学系の保存量となっているからである。それでは仕事とは何であろうか？これは実はポテンシャルエネルギーの事である。この場合、例えば Kepler 問題を考える時、仕事と言う言葉が使われることはなく、常にポテンシャルとして表現されている。従ってここでは最初は仕事と言う表現を使うが基本的にはポテンシャルを使う事になっている。

C.1　系のエネルギー

質量 m の粒子が一定速度 v で運動している時、その運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{C.1}$$

である。何故だろうか？実はこれは Newton 方程式から導くことができる。それ以外は天下り的となる。この場合、Newton 方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{C.2}$$

であった。ここで式 (C.2) に $\boldsymbol{v}$ を掛けると

$$m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{C.3}$$

となる。ここで簡単のために $\boldsymbol{F}$ は時間にも座標にも依らない力 (定数ベクトル) としよう。この場合 $\frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = 0$ である。この時、式 (C.3) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}\right) = 0 \tag{C.4}$$

となる。ここで括弧の中は保存量となるので、これを E とおくと

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} \tag{C.5}$$

となっている。式 (C.5) の右辺の第１項が運動エネルギーとなっている。

C.2　重力場中の運動

今、高さ h の場所から質量 m の粒子を落下させる実験を行おう。この場合、垂直の軸を z-軸として、地上を原点としよう。この時、粒子に働く力は重力のみなので、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$F_z = -mg, \qquad (F_x = F_y = 0) \tag{C.6}$$

となる。ここで g は重力加速度であり、$g = 9,8\mathrm{m/s^2}$ である。何故、この式 (C.6) が求められたのかについては後程、説明しよう。ここで高さ h において、この質量 m の粒子のエネルギーは落下前の速度 v がゼロなので、式 (C.5) から

$$E = mgh \tag{C.7}$$

となっている。この場合、地上では $z = 0$ なので、その点での速度はエネルギー保存則の式から

$$E = mgh = \frac{1}{2}mv_z^2 \tag{C.8}$$

と求める事ができる。これより

$$v_z = -\sqrt{2gz} \tag{C.9}$$

となる。マイナス符号は下向きの速度だから明らかであろう。時に mgh を位置エネルギーと呼ぶ教科書があるようだが、この表現は適切でない。位置エネルギーと言う概念が物理学で使われることはない。これはポテンシャルエネルギーである。

C.2.1　ポテンシャルと仕事

ここでポテンシャルと仕事について簡単に解説しておこう。何故、仕事と言う言葉が使われたのであろうか？これは歴史的な取り扱いと関係していると考えられる。実際、力学系においては力から出発してエネルギー保存則を求める事が長い間行われてきたからである。すなわち力を $\boldsymbol{F}$ とする時、仕事 U は

$$U \equiv -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{C.10}$$

と定義されている。この積分 (記号 $\int$) については後程、解説しよう。実際にはこれはポテンシャルと呼ばれていて、仕事と言う表現はほとんど使われていない。この仕事と言う言葉は科学史的な表現と考えてよいであろう。

ここでポテンシャル (仕事) に関して、基礎理論 (量子力学) から出発すると実はポテンシャル U が基本的な物理量となっている。そして実際、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \equiv -\boldsymbol{\nabla} U(r) \tag{C.11}$$

と定義されているものである。ここで ∇ はナブラと呼ばれているもので微分演算では良く出て来るものである。これは

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) \equiv \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

と定義されている。

C.2.2 偏微分

ここで $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ とは x で微分してそれ以外の $\{y, z\}$ は定数として扱いなさいと言うもので、偏微分と言われている。関数 $f(x,y,z)$ に対する x での偏微分の定義は

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \equiv \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}, \qquad (\Delta x \to \text{無限小}) \tag{C.12}$$

である。しかしながら、この偏微分が微分と特別に異なっていると言う事はない。この偏微分を何故、導入したかと言う事であるが、これは便利だからと言えよう。
ちなみに、$\{x, y, z\}$ が時間の関数 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ となっている場合、

$$\frac{df(x,y,z)}{dt} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{C.13}$$

となる。この $\frac{df(x,y,z)}{dt}$ を全微分と言うが、しかしここでは覚える必要もないであろう。

C.2.3 ポテンシャルと力

力学は量子力学からある近似する事により求められるものである。従って、力学が基本的な理論形式であるとは言えない。より基本的なものは量子力学であるが、この量子力学においては力と言う概念は出てこない。その意味で、力と言う物理量は力学に固有のものであると言えている。

C.3　積分の定義

ここで積分の定義を簡単にしておこう。$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$ は関数 $f(x)$ を $x = x_a$ から $x = x_b$ まで積分しなさいと言う表記である。これは、関数 $f(x)$ と x-軸および直線 $x = x_a$ と直線 $x = x_b$ に囲まれた面積を表している。この場合、この面積は拡張されていて $\pm$ の符号を持っているものとして定義されている。直感的には積分とは和の事である。その定義は

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \equiv (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x \quad (n \text{ は無限}) \tag{C.14}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \quad \text{但し，} \Delta x = \frac{x_b - x_a}{n} \tag{C.15}$$

である．ここで $x_1 = x_a,\ x_n = x_b$ に対応している．

C.3.1　積分と微分の関係式

積分が微分と関係づけられると言う事実がある。それは

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x')dx'\right) \tag{C.16}$$

である。証明は簡単なのでここに書いておこう。まず積分の式 (C.15) を

$$S(x) = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x \quad (n \text{ は無限}) \tag{C.17}$$

としよう。但し $x_1 = 0$, $x_n = x$ としている．この時

$$S(x + \Delta x) = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}))\Delta x \tag{C.18}$$

である。ここで $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ を使っている。よって

$$S(x + \Delta x) - S(x) = f(x)\Delta x \tag{C.19}$$

である．

ここで $f(x+\Delta x) \simeq f(x)$ としているが、これが成り立っている事は明らかであろう。この式 (C.19) の両辺を Δx で割ると

$$f(x) = \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \tag{C.20}$$

となる．今，$n \to \infty$ を実行すると $\Delta x = \frac{x-x_a}{n} \to 0$ なので

$$f(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x')dx'\right) \tag{C.21}$$

となる．すなわち，積分量を微分したら元の関数が求まっている．ここで注意点であるが、積分の中の x は変数なので x' としている。しかし混乱しない限り、そのまま x として使う事もよくある。 但し、積分区間の上限が x となっている事に注意は必要かも知れない。

C.3.2 積分公式のまとめ

関数 $f(x) = x^n$ を積分すると

$$\int f(x)dx = \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \tag{C.22}$$

となる。ここで C は定数。

C.4　地球の重力と脱出速度

地上にある質量 m の粒子に対して重力ポテンシャル $U(r)$ は地球の重心を原点とすると

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{C.23}$$

で与えられている。この式の導出は場の理論を学ぶ事により初めて可能な事であり、ここでは天下り的となっている。この場合、力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(r) = -\left(\frac{\partial U(r)}{\partial x},\ \frac{\partial U(r)}{\partial y},\ \frac{\partial U(r)}{\partial z}\right) \tag{C.24}$$

なので

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{C.25}$$

と計算されている。ここで注意点であるが、この計算の場合、座標の原点は地球の重心である。しかしながら今後の計算では座標系の原点を移動した方が便利である。従って、以降の計算では座標系として地上を原点とする通常の座標系を導入しよう。この時、$F_x = F_y = 0$ なので

$$F_z = -\frac{GMm}{(R+z)^2} \tag{C.26}$$

である。ここで R は地球の半径である。地上から高さ z において、力 F_z は

$$F_z \simeq -\frac{GMm}{R^2}\left(1 - \frac{2z}{R} + \cdots\right) \tag{C.27}$$

となる。ところが $\frac{2z}{R} \ll 1$ なのでこれは無視できる。よって

$$F_z = -mg \tag{C.28}$$

が求められている。この場合

$$g = \frac{GM}{R^2} \simeq 9.8\ [\mathrm{m/s^2}] \tag{C.29}$$

となる。ここで重力定数 G と地球の質量 M と半径 R は

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ [\mathrm{Nm^2/(kg)^2}],\ M = 5.97 \times 10^{24}\ [\mathrm{kg}],\ R = 6.37 \times 10^{6}\ [\mathrm{m}]$$

である。これらの値は理科年表から取ってきている。

C.4.1 脱出速度

質量 m の粒子が地球の重力から脱出するためにはどれだけの初速度が必要であろうか？今、地上から速度 v_0 でこの粒子を打ち上げたとしよう。この時の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{C.30}$$

である。一方、高度が z になった時にその速度を v とすればその時の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+z} \tag{C.31}$$

である。エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{C.32}$$

となっている。ここで十分遠方 $(z \to \infty)$ での粒子の速度は

$$\frac{1}{2}mv^2 \simeq \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \tag{C.33}$$

であり、これがゼロ以上である事が脱出の条件となる。従って脱出速度 v_0 は

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \tag{C.34}$$

となっている。具体的に数値を入れると

$$v_0 \simeq 1.12 \times 10^4 \ \text{m/s} \tag{C.35}$$

である。音速が約 $v_s \simeq 340$ m/s なのでこれよりはかなり速い速度である。しかし光速は $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s なのでこれよりはかなり遅い。 地球の公転速度は $v_R \simeq 3 \times 10^4$ m/s なのでこれが一番近い速度となっている。

関連図書

[1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)

[4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)

[6] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” Annalen der Physik vol. 49, pp. 769–822, März. 1916.