相対論：名著解説の間違いとその原因

藤田　文久

(よろず物理研究所)

はじめに

相対論について青少年用の解説書を書いた後，巷に氾濫している相対論の解説書を少し調べて見ることにした．何故，相対論に関する多くの解説書がこれ程までに長い間，物理的に間違えた内容を人々に伝え続けたのかと言う問題である．調べるにつれてその疑問の形が具体的になり，その内に驚くべき事実が判明したのである．これまで大半の解説者は昔，名著とされた教科書に書かれている知識を基にして解説しているのであるが，この教科書自体が実は，物理の理論において重大な間違いを犯していたと言う事実である．これは青少年の教育と言う観点からみてかなり深刻な問題となっており，従ってこれまでの教科書の問題点を早急に明らかにする必要があると思われる．

この小ノートは相対論の解説者を読者と想定して書かれているが，残念ながらこれは彼らに取って少し重荷になるかも知れない．それは「物理学の教典」のような名著と思われてきた本において，相対論関連の記述が部分的とは言え，大幅に間違えているからである．

その名著とされてきた教科書における重大な間違いとは何であろうか？それは相対論を議論する時に彼らは『相対論的古典力学』と言う架空の運動力学をベースとして議論を行っていると言う事実である．ここで相対論的古典力学とは，古典力学をキネマティックスだけ相対論にした力学のことである．そもそも古典力学は Dirac 方程式，Schrödinger 方程式そして Newton 方程式と言う近似連鎖で始めて得られる方程式であり，勿論，Newton 方程式自体は基本方程式ではない．その Newton 力学を『相対論化』してもそれは自然界とは無関係の想像上の方程式でしかなく，架空の力学なのである．

それらの教科書のうちここでは典型的な２冊の教科書を挙げておこう．それは Landau 達の「場の古典論」と砂川の「電磁気学」であるが，これらがこれまで若者達に与えた影響は決して少なくないと言えよう．勿論，これら

のうちで，相対論に関する記述が間違っていると言う意味であり，その本のすべてを否定しているわけではない．但し，この様な基本的な部分で方向がずれている場合，その全体の内容がどれだけ信用できるのかと言う問題は自明とは言えない．しかしこれは読者自身の検証に任せる事にしようと思う．

物理学の体系をしっかり自分で検証し理解されている研究者は，これまでの相対論の解説書にある種の違和感を持っていた事と思われる．しかし相対論の問題は物理的な観測量には直接，影響を及ぼさなかったことでもあり，これらの問題はそれ程，重要視されることは無かったものであろう．

ここではその問題点を簡単に説明しよう．特殊相対論は Maxwell 方程式を不変にするために考えられた変換則であり，これが Lorentz 変換である．Lorentz 変換が Maxwell 方程式だけに限って行われている場合，特に問題を起こすようなことはない．しかし，物理学は質点の運動を扱う学問であり，質点に対する Lorentz 変換も当然，重要になっている．そしてこの質点に対する相対論的な運動方程式は Dirac 方程式である．従って，質点に対する座標変換を考える場合，Dirac 場の理論体系における Lorentz 変換の不変性を議論する事になっている．逆に言えば，質点の相対論を議論する場合，この Dirac 場の理論体系以外で変換性を議論する事は出来ないし，また物理的な意味もないものである．

この Dirac 場と電磁場を含めた理論体系が量子場の理論である．それ以外の方程式は近似の方程式であり，相対論のような基本的な問題を議論する場合に近似方程式を使う事はできない．特に，相対論的古典力学のような架空の力学を基礎にして相対論を議論すると，とんでもない混乱を引き起こす可能性がある．実際，上記に記した教科書がまさにこの迷走を助長した主な原因となっていると考えられる．

目 次

第1章　相対論

光速不変の法則が実験的に確立されて以来，相対論における変換則はLorentz変換であることが認識された．そしてそのLorentz 変換はMaxwell 方程式を不変にする変換則であった．これは慣性系間の変換則であり，当然の事であるがLorentz 変換は座標変換である．そしてこの変換は運動学であるため，物理学のダイナミックスに対して何かの制限を付けると言うものではない．

1.1　Lorentz 変換

ここで２個の慣性系を用意しよう．そしてこれらを $R-$ **系** $[R(t,x,y,z)]$ **と** $S-$ **系** $[S(t',x',y',z')]$ **としよう．今，** $S-$ **系が** $R-$ **系に対して** $x-$ **軸方向に速度** v **で運動しているとしよう．この場合 Lorentz 変換は**

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.1}$$

であり， γ **は** $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ **と定義されている．この式はMaxwell 方程式が** $S-$ **系でも** $R-$ **系でも同じ形の微分方程式になると言う要請を充たすように求められたものである．式 (1.1) で，もし速度** v **が光速と比べて十分小さい場合，**

$$x \simeq x' + vt', \qquad t \simeq t', \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.2}$$

となり，Galilei 変換の式と一致している．従って，地球上で起こる殆ど全ての現象は光速と比べて十分遅いため，非相対論の近似式で扱っても間違える事はまず無いと言える．

1.2　微分量の Lorentz 変換

Lorentz 変換に対して運動方程式がどう変換されるかと言う問題が現代物理学を学ぶための一つの関門である．これを自分で計算して検証しないと，なかなか先に進めないものである．この議論の前にまずは微分量の Lorentz 変換をここで計算しておこう．

Lorentz 変換　$x = \gamma(x' + vt'),\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$　に対して微分の変換式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(v\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) \tag{1.3}$$

となる．但し $y,\ z$ は変更を受けないので表示していない．ここで
$p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}, \qquad E = i\frac{\partial}{\partial t}$　と定義してみると

$$p_x = \gamma\left({p_x}' + \frac{vE'}{c^2}\right), \qquad E = \gamma\left(E' + v{p_x}'\right) \tag{1.4}$$

となりエネルギー・運動量の変換則と一致している．よって４次元の内積 $\boxed{px \equiv Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$ が

$$px = Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = p'x' = E't' - \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}' \tag{1.5}$$

のように Lorentz 変換に対して不変である事がわかる．

1.3　運動方程式の変換不変性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしていると言う要請が相対論の基本原理である．ここでは，Newton 方程式と Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行こう．そうすれば変換した時の形がいかに大切であるか良くわかると思う．

1.3.1　Newton 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換は $x = \gamma(x' + vt'),\quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ となっている．この場合，一般的には $x,\ t$ は互いに独立変数である．しかしここでは x が何らかの形で時間の関数となっていると仮定しよう．従って，座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \tag{1.6}$$

さらに２階微分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^3\left(1 + \frac{v\frac{dx'}{dt'}}{c^2}\right)^3} \neq \frac{d^2x'}{dt'^2} \tag{1.7}$$

となり，Newton 方程式は全く別物になっている．すなわち, Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない．最も深刻な問題点は変換された式に慣性系間の速度 v が入っている事である．これでは何をやっているのかわからないものである．

1.3.2　Maxwell 方程式と Lorentz 変換

Maxwell 方程式の Lorentz 変換による性質を考えるためには，物質が無い時で十分である．この時，Maxwell 方程式は電場 $\boldsymbol{E}$ に対して

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.8}$$

となっている．Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \boldsymbol{\nabla}'^2 \tag{1.9}$$

であるから，Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対して不変である．前述したように，Lorentz 変換の係数はこの上式が成り立つように決定されたものである.

第2章　相対論的古典力学

ここでは相対論的古典力学と言う，昔，比較的よく議論されていた力学について簡単に解説しよう．結果的に，この理論体系には物理的な意味はないし，また自然界の記述に応用された事もない．従って，これまでの教科書においては，科学史的な観点で議論されてきた方程式と言えよう．

2.1　古典力学

Newton 方程式についてはここで説明するまでもないが，しかしこの方程式では座標が時間の関数となっている事に注意する必要がある．これは場の理論的に見ると非常に不思議である．それは場の理論においては時間 t, 空間 x, y, z はパラメータであり，互いに独立である事に依っている．この事は Lorentz 変換をみれば明らかであろう．

それでは古典力学において座標が時間の関数となっているのは何故であろうか?この設問は非常に重要である．古典力学も場の情報をどこかで引きずっているはずであるが，実際，この座標が時間に依ると言う所が場の関数から来ているのである．すなわち，$x(t)$ とした座標の時間依存は状態関数 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ の時間依存が残っているからである．まずはこの点をしっかり認識して欲しいものである．

従って古典力学では質点の座標 x と座標系における空間座標 x を同一視している事に対応している．このため，質点の座標 x が時間の関数となっていると言う仮定の下で Newton 力学は成り立っている．

2.2　相対論的古典力学

このNewton力学をそのキネマティックスだけ相対論化した力学が『相対論的古典力学』と言われる方程式である．ここではその方程式を書かないで置こう．この方程式を書くと，その式が何らかの物理的な意味があるかも知れないと勘違いされる事を恐れるからである．当たり前の事ではあるが，近似された式から元の式を求める事は出来ない．例えば x が充分，小さい正の実数とした時

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \cdots \tag{2.1}$$

と近似する事ができる．しかしながら，右辺から左辺を求める事は出来ない．従って，近似されたNewton方程式からその前の量子力学の方程式を導くことは，勿論，不可能である．

2.3　速度の定義

通常の古典力学において，質点の速度が座標の時間変化率として定義される．すなわち

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.2}$$

である．ところが相対論では質点の速度 v は上記のように定義する事はできない．それはLorentz変換の式でもそうであるが，時間 t と座標 r は常に独立である事に依っている．相対論において質点の速度の定義は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \tag{2.3}$$

である．非相対論の極限では $E \simeq mc^2$ なので

$$\boldsymbol{v} \simeq \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{2.4}$$

となり，元に戻っている．この事は相対論においては質点の速度自体が基本的な物理量ではない事を示している．すなわち，相対論的古典力学はそもそもうまく定義する事が出来なかったはずである．この事をしっかり理解する事が大切である．

2.3.1　量子力学における速度

また量子力学においては速度と言う概念が直接，現れることはない．運動量のみが物理量として重要な役割を果たしている．質点の速度を知りたい場合，量子力学においては

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{m} \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}) \hat{\boldsymbol{p}} \psi(\boldsymbol{r}) d^3 r \tag{2.5}$$

として運動量の期待値を求める事により速度を定義する事ができるのである．ここで $\hat{p}$ は $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ と書かれている演算子である．

2.3.2　Lorentz 変換における速度 v

相対論においては質点の速度は直接，物理量としては現れない事を示したが，Lorentz 変換においては，系の速度として v が現れている．これはキネマティックスであるため，力学変数ではない．しかしながら，この速度が物理的にどのような意味があるのかは，現在の所，あまりよくはわかっていない．

2.4　Lorentz Contraction

相対論的古典力学の描像のもとで相対論の変換を議論すると非物理的な事を平気で扱う事になっている．典型的な間違いは Lorentz Contraction (Lorentz **収縮**) **である．これは運動する慣性系において長さ** ℓ **の棒を考えると，それは静止系でみると収縮しているように見えると言う主張である．しかしそれでは見えたからどうなるのかと言う問題は議論されていないし，勿論，観測量に結びつくことはない．**

さらに，実際問題としては Lorentz **変換で議論できるのは物体の重心がどう変換されるかと言う事だけである．これは** Lorentz **変換は質点の変換であることに依っている．**Lorentz **変換によって物質の内部構造がどうなるのかに関する情報は，勿論，わかるはずがないのである．従って，**Lorentz Contraction **は物理的には議論する意味がないものである．**

さらに言えば，物質が有限のサイズを持っていると言う事はミクロに見るとそれが原子の束縛状態になっていると言う事である．所が，相対論的量子場の理論では２体問題さえ，厳密に解くことは出来ていない．すなわち，２体の Dirac **方程式の問題は解けないのである．読者は「水素原子は** Dirac **方程式で解かれているのではないか？」と疑問に思うかも知れない．しかしながら，水素原子では陽子が電子と比べて十分に重いため，陽子は動かないと言う仮定をして，１体の** Dirac **方程式に近似しているのである．**

2.5　高エネルギー重イオン反応

高速で運動する慣性系が静止系に衝突した場合，その衝突現象を記述する方法は存在するのであろうか？その具体的な物理現象が高エネルギーの重イオン反応である．１９８０年頃，非常に高いエネルギー (核子あたり 1 GeV 程度) の ^{4}He をターゲット原子核に衝突させる破砕実験が行われた．その実験データが公表された時，Max-Planck 研究所において，Hüfner 氏と私はそのデータの解析のため，現象論模型の構築に専念していた [4]．しかしその場合，重大な問題に遭遇していた．^{4}He 原子核は相対論的に扱う必要があったのだが，実験室系における入射 ^{4}He 原子核の波動関数が分からないのである．Lorentz 変換は座標系の変換であり，波動関数のような分布を持つ状態関数を変換する事は不可能であった．

それで結局，Projectile frame に乗っかった解析を行ったのである．この手法により，入射原子核である ^{4}He 原子核の破砕実験のデータ解析が可能となり，原子核の高運動量成分に関する重要な情報が得られることがわかったのである．

第3章　量子場の理論

現在，物理学の基礎となっている理論体系が量子場の理論である．そのうち電子が電磁場及び重力場と相互作用している系が最も基本的な物理学の体系である．その詳細は参考文献に上げてある教科書 [5, 6] で解説されているので参考にして欲しい．

3.1　QED と重力場の Lagrangian 密度

ここではその基本的な Lagrangian 密度だけを書いて置こう．質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1+g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{v\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\ \partial^\mu\mathcal{G}$$

と与えられている．ここで $\mathcal{G}$ は質量のないスカラー場である．また $F^{\mu\nu}$ は場の強さであり

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

と定義されている．この式が Lorentz 変換に対して不変であることを証明する事はかなり大変である．しかし必ず，自分で計算することが物理を少しでも深く理解するための最低条件である．具体的な計算に関して松田氏の動画解説

$\mathrm{https://www.youtube.com/watch?v=vIMb7J_Mcok}$

が丁寧に説明しており，参考にされると良いと思われる．

3.2　量子場の理論の計算法

量子場の理論においては摂動論による計算法以外は物理的な観測量を計算する事が出来ていない．様々な意味合いで，場の理論における難しさは自分で計算してみると良くわかるものである．まずは Dirac の真空を作る必要がある．これは Dirac 方程式を解くと負のエネルギー状態が現れてしまう事が出発点である．この負のエネルギー状態は Dirac 方程式の固有値として出てくるため，明らかに物理的である．しかし負のエネルギー状態が存在すると正のエネルギーを持った状態が安定とは言えなくなってしまう．それは明らかで，負のエネルギー状態の方が低いため，エネルギー的に低い状態に遷移してしまうからである．

ここで Dirac は『物理的な真空』と言うものを定義したのである．それは『負のエネルギー状態が全て埋められた状態を物理的な真空』と定義しようと言う事である．フェルミオンは常に Pauli 原理が働くため，負のエネルギー状態が一杯であれば，そこに遷移する事は出来なく，従って正のエネルギーを持った状態も安定となっている．この描像により，場の理論は矛盾が全くない理論形式として確立されたのである．

3.3　量子場の理論における２体問題

水素原子は２体問題であり，これを厳密に解こうとするとどうしたら良いのかわからないものである．それは Dirac 方程式の場合，重心と相対運動に分離する事が出来ないのである．現在まで，これは誰も解いていないし，恐らくは無理な話であろうと考えている．

何故，相対論だとこのように難しくなるのであろうか？この理由の一つに Dirac の真空の問題が関係していると思われる．量子場の理論からすると水素原子でもこれは実は２体問題にはなっていない．本当は多体問題なのである．それはどういう事かというと，水素原子では陽子の周りに１個の電子が

回っていると言う状態であると考えるのは自然な事である．しかし現実問題としては，その状態に電子ー陽電子の仮想状態が混合してくる可能性は小さくても有限である．つまり，自分は電子１個だけ考えていると主張しても，実際は粒子ー反粒子のペアが混じってくるのである．これが量子場の理論の本質であり，従ってこれは厳密に解けるわけがないのである．

物理学は自然現象を割合，簡単な方程式に依って記述しようとする学問であり，大きな成功を収めている事は間違いない事である．しかしながら，古典力学でも多体問題を解くことはできていない．例えば良く知られた現象として乱気流の問題がある．しかしこれはどのようにして乱気流が起こるのか誰もわからないのである．それは古典力学でも多体系の問題は結局はお手上げの状態であると言う事である．

物理学を勉強する事はこの上なく，楽しいものである．しかし同時に物理の限界もしっかり理解しておくことが重要であろう．

第4章　運動系の時間刻みは遅れるか？

Lorentz 変換の式を見ればわかるように，光速に近い速度で動いている運動系の時間が地上における時間と少しずれるように見える．しかしこれら $t,\ x$ は変数であり観測量ではない．以下では思考実験における観測量である時間差 Δt により系の時間の遅れが本当に起こっているかどうかを検証しよう．

4.1　間違いの思考実験

以下に，これまで良く議論されてきた思考実験を行いながらこの時間の刻みがどうなるのかを解説して行こう．まず速度 v で等速直線運動をしている電車 (運動する慣性系) を考えよう．この場合，線路は当然，直線である．ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう．

4.1.1　地上の系からみた電車の系の時間刻み

まず，電車の中にいる観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう．この場合，この電車の観測者は自分が動いているかどうかはわからないものと考えられる．そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 $(2\Delta\tau)$ を正確に測定できたと仮定しよう．この場合

$$\ell = c\Delta\tau \tag{4.1}$$

である．一方，地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる．この場合，その時間を $(2\Delta t)$ としよう．従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - \ell^2} = v\Delta t \tag{4.2}$$

となっている．この式から

$$\sqrt{c^2 - v^2}\ \Delta t = c\Delta\tau \tag{4.3}$$

が求まる．よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t \tag{4.4}$$

となり，電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている．

4.1.2　電車の系からみた地上の系の時間刻み

それでは，今度は同様の思考実験を電車の人から行ってみよう．地上が電車に対して動いているように見える速度は $(-v)$ となっている．それはLorentz変換を逆に解いてみれば良くわかるものである．今の場合，式(1.1)から

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{4.5}$$

となっていて確かに $(-v)$ となっている．しかしそれ以外は式(1.1)と全く同じである．今度の場合，地上において鏡に向かってレーザービームを放ち，それを計測して時間を測る．この場合，電車の人から見るとこれまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta\tau \tag{4.6}$$

となる．

4.1.3　時間刻みの矛盾

これは一体，どうした事であろうか？この結果である式 (4.4) と 式 (4.6) はお互いに矛盾している．Δt と $\Delta\tau$ は思考実験における観測量になっているので，これは何かが間違っている事は確かである．しかしながら，相対性理論の立場からしたら，どの系も同等であることから合理性はあるようにみえるのである．

4.2　思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の何処に間違いがあったのであろうか？これは式 (1.1) を見てみると良くわかるものである．t 秒後の電車の座標が $x' = x + vt$ としてしまった事が間違いの原因であった．電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は, Lorentz 変換の式 $x' = \gamma(x + vt)$ で与えられる．従って

$$v\Delta t \Longrightarrow \gamma v\Delta t, \qquad c\Delta t \Longrightarrow \gamma c\Delta t \tag{4.7}$$

と書き直す必要がある．すなわち式 (4.4) は

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t \\ &= \Delta t \end{aligned}$$

となり，時間の遅れがない事が証明されたのである．従って，どちらの系の時間も変更を受ける事はないと言う事で矛盾がいとも簡単に解決されている．

4.2.1　高速運動の慣性系の時計が遅れる事はない！

この考察でわかったことは『どの系の時計も遅れる事はない！』と言う事実である．物理学においては，この時計の遅れの話は直接，観測量とはなっていないため，ほとんど影響はないと考えている．

4.3　時間に関する直感的な理解

これまで思考実験を考えて，運動系における時間刻みが静止系の時間刻みとどう関係しているのかに関して、様々な考察を行ってきている。しかしながら、実はこの事は極めて単純な事である事が以下に示されている。

実際は、運動系の時間刻み $\Delta\tau$ **が静止系の時間刻み** Δt (**例えば１秒**) **と同じである事は簡単に証明できる事である．それは時間刻み** $\Delta\tau$ **にしてもミューオンの寿命** τ **にしてもこれらは定数である．実際，１秒は地球公転周期** T **から決められている．従って，これら定数は** Lorentz **スカラーであるため，**Lorentz **変換の影響を受ける事はない．つまり運動系の** $\Delta\tau$ **は静止系の** Δt **と全く同じである事が分かる．**

第5章　２個の慣性系：相対論の具体例

ここで２個の慣性系が関係して物理的な観測量に影響が現われる場合の具体例をあげよう．しかし，相対論は運動学であり，相対論の変換性から何かの力学がわかるわけではなく，運動学以上の情報が得られるわけではない．

5.1　光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時，その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける．それは，光のドップラー効果 (Doppler effect) としてよく知られている現象であり，また観測もされている．星が速度 v で遠ざかっているとし，星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は Lorentz 変換より

$$p' = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right) = \gamma\left(p - \frac{vp}{c}\right) = \frac{p\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}} = p\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{5.1}$$

となり，光の運動量は減少している．これを波長で表せば

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\ \lambda \tag{5.2}$$

となるので光の波長は大きくなる．これを赤方偏移 (red shift) という．但しこのネーミングは赤色フォトンが青色フォトンよりも波長が長いと言う事から名付けたもので，それ以上の物理的な理由はない．この現象が起こった理由は，粒子のエネルギーと運動量は４元ベクトルであるため Lorentz 変換に対して変更を受けるからである．

5.2 大気圏で生成された μ-粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突して μ-粒子（質量 $m_\mu = 105.6 \ \mathrm{MeV}/c^2$ ）を生成する場合がある．μ-粒子はその寿命 τ_0 として $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度であり，従ってこれは不安定な素粒子である．ここで問題は，この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である．これは相対論関連では昔よく議論された問題の一つでもある．この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{5.3}$$

と書かれている．この場合，崩壊幅 Γ は Lorentz 不変な物理量である．従って，寿命も Lorentz 変換に対して変化する事はない．つまりは地上でもこの μ-粒子の寿命は変わらない．

5.2.1 μ-粒子の走行距離 L

ここで μ-粒子の走行距離を計算しよう．その走行距離 L は Lorentz 変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \tag{5.4}$$

である．ここでエネルギーが 1 GeV の μ-粒子が上空で生成されたとしよう．この時， $v \simeq c$ であり，また $\gamma \simeq 10.6$ である．従って，この μ-粒子の走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \ \mathrm{km} \tag{5.5}$$

となり $v\tau_0$ より γ 倍，伸びている．この事より上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している．

5.2.2　加速器実験

大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように，式 (5.4) **によって与えられている．そしてこれは実験的にも確かめられている．**

第6章　結び

相対論における慣性系の変換則はLorentz変換であり，これは質点の変換に対応している．ところが，これまでの解説書では例えば，Lorentz contractionの説明として，運動系の長さが ℓ が静止系では収縮したように見えると言った記述が良くみられていた．しかしこれは本文で解説したように物理的には無意味な記述である．Lorentz変換は質点の変換則であり，有限の長さを持つ物質を変換してもそれはその重心を変換しただけであり，それ以上の事は何もわからないし，わかる可能性もないものである．

『時計の遅れ』の議論はすべて，Lorentz 変換の式から出発している．この変換では速度 v で運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt となっている．しかしこれまでの常識では，勿論 vt であった．ここでその γvt の解釈をどうすれば良いかであるが，人々はその変化の原因を v か t を修正する事で納得したいと考えたのであろう．科学史的な視点からしたら，確かにそれは理解できないわけではない．しかし理論物理の体系の立場からしたら，慣性系の相対性を基本とする限り，運動する慣性系の t 秒後の座標は γvt である．従って，走行距離が γvt となる事自体を受け入れるべきであり，それが理論体系の視点である．またこの問題に関しては『時計の遅れ』が直接の観測量にはなっていないと言う事も物理屋がそれ程，熱心には考えなかった理由でもあろう．

6.1　Homework　Problem

電車 (運動座標系) が速度 v で等速直線運動をしている場合，その電車から光を発射させたとしよう．この時，Δt 秒後の光の到達距離 ℓ は

$$\ell = c\Delta t \tag{6.1}$$

である．これは電車の系での到達距離である．

それでは，静止系ではどうなるかと言う設問である．この場合，光と電車の速度 v の合成を考える必要がある．そして光は静止系でも同じ速度 c となっている．すなわち，光は合成してもやはり光速なのである．従って，光の到達距離は静止系でも ℓ となっている．

付 録A　一般相対論

一般相対論に関して，簡単なコメントをしておこう．一般相対論は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．従ってこれは慣性系の座標系に対する方程式となっている．しかし物理学は座標系を自分で決めてその中で質点の運動を記述して自然界の現象を理解しようとする学問である．このため，その座標系に対する方程式とはどういう意味があるのか，これは物理学としては理解不能である．従って，数学の方程式としては何ら，問題があるわけではないが，Einstein 方程式は物理学の方程式にはなっていない．

A.1　一般相対論は重力理論と無関係

それにもかかわらず，一般相対論がこれまでかなり多くの人々に受け入れられて来たように思われる．何故であろうか？これにはいくつかの理由があると思うが，その内で最も重要と思われる物理的な理由が一つある．それは Einstein がこの一般相対論は重力理論と関係していると主張したからである．そして『ある仮定』を置くと確かに重力と関係づけられるように見えたのである．それは計量テンソル $g^{(0\,0)}$ が重力場 ϕ と

$$g^{(0\,0)} \simeq 1 + 2\phi \tag{A.1}$$

と書かれるとした仮定である．実際には，この仮定が物理的に正当化できないし，完全に間違っている事が分かっている．それは，この計量テンソルは未知変数なのでその形は方程式を解いて始めて決められると言うものであり，その形をあらかじめ決める事は出来ない．さらに，この計量テンソルは座標

系の変数であり，これが力学変数である ϕ と結びつくと言う仮定は物理的に無意味なものとなっている．従って，式 (A.1) が方程式として物理的に有意な意味を持つことはない．

A.2　無関係性の一般的証明

また計量テンソルが重力場とは無関係である事の一般的な証明はさらに簡単である．これは Einstein 方程式を吟味すればすぐにわかるものである．Einstein 方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \tag{A.2}$$

と書かれている．ここでこの方程式の左辺は Ricci テンソル ($R^{\mu\nu}$) とよばれる量で書かれているが，この Ricci テンソルは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の２回微分で書かれている．従って，左辺はすべて計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれていて，これが未知変数である．

A.2.1　右辺の計量は誰が決めたか？

まず，問題となるのは Einstein 方程式 (A.2) の右辺の計量はどのように決められたかと言う単純な疑問である．これは恐らくは Minkowski 計量が仮定されているのであろう．従ってこの方程式は右辺にある星の分布関数が決定された場合，それに応じて計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の関数形が決まると主張しているものである．

A.2.2 右辺の $T^{\mu\nu}$ はどう計算されたか？

ここで深刻な問題は右辺に現われている物理量 $T^{\mu\nu}$ がどのように計算され，求められているかと言う事である．これは未知変数である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とは無関係である．この星の分布関数は重力場の方程式を解いて決められている．従って，ここではすでに重力場とその運動方程式の存在が仮定されているのである．すなわち，この Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が重力とは全く無関係であることをこの式自身が示している．従って，どのように頑張ってみても，一般相対論を重力と関係付ける事には無理がある．そのためこの方程式が物理学でどういう役割を果たしているのかは不明である．

A.3 一般相対論は物理で応用されていない！

一般相対論は重力理論とは全く無関係である事が示されている．このためこれが物理的にどういう意味合いで作られたのか，今となっては分かる術がない．しかし現実問題として，この一般相対論が物理学のどの分野においても利用されたり使われたりしていると言う事実はない．従って一般相対論が物理学において特に何らかの問題を惹き起こしていると言う事実もない．

A.3.1 重力波の問題

但し『重力波』などの一般相対論がらみで単発的に無意味な主張をしている物理屋がいる事は事実である．これは確かに問題で，何とかしないといけないであろう．それは彼らが膨大な科学予算と人件費を浪費しているからである．しかしながら，どうしたら良いか自分にはわからない問題でもある．

付 録B　何故、一般相対論は無意味か？

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

B.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

B.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運

動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \tag{B.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

B.1.2 Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

B.1.3 Minkowski 空間

この $(ds)^2$ **は Minkowski が Lorentz 変換の不変量**

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{B.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \tag{B.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{B.4}$$

としている．この時，$dx^\mu,\ dx_\mu$ **を**

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{B.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

B.2　一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (B.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

B.2.1　$(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが， $(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

B.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{B.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

B.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (B.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

B.3 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [7]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (B.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

B.4　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

関連図書

[1] “Relativistic Quantum Mechanics”,
J.D. Bjorken and S.D. Drell,
McGraw-Hill Book Company,1964

[2] ”Advanced Quantum Mechanics”,
J.J. Sakurai, Addison-Wesley,1967

[3] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[4] Momentum distribution after fragmentation in nucleus nucleus collisions at high energy
T. Fujita and J. Hüfner, Nucl. Phys. A343 (1980) 493

[5] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[6] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[7] “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,”
A. Einstein, Annalen der Physik vol. 49, pp. 769−822,
März. 1916.

[8] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).