

# 赤外線と大気中CO<sub>2</sub>散乱

赤外線が大気中のCO<sub>2</sub>と散乱する確率を求めておこう。光と大気の散乱断面積として、ここでは Thomson 散乱の散乱公式を使う。これは光と電子との散乱断面積であるが、大気との散乱は原子中の電子との散乱なので、Thomson 散乱の断面積を使って充分良いと考えられる。

## 1 Thomson 散乱の微分断面積

Thomson 散乱の微分断面積は場の量子論的に計算されており、散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray} \simeq \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos\theta) \quad (1)$$

と求められている。  $r_0$  は電子の古典半径であり

$$r_0 = 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (2)$$

である。

## 2 光の大気中での平均自由行程 $\ell_b$

Thomson 散乱の微分断面積の式 (1) より、光と大気との全断面積  $\sigma_T$  は

$$\sigma_T \simeq 6.6 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (3)$$

となる。従って、光の大気中での平均自由行程  $\ell_b$  は

$$\ell_b = \frac{1}{\rho\sigma_T} \simeq 0.56 \text{ km} \quad (4)$$

となる。ここで大気中での分子の数密度  $\rho$  としては

$$\rho \simeq \frac{6 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^3} = 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (5)$$

を用いている。

### 3 赤外線が CO<sub>2</sub> と散乱する確率

光が大気中の分子と散乱する回数  $P_R$  は大気の厚さを  $L$  とした時

$$P_R \simeq \frac{L}{\ell_b} \quad (6)$$

で与えられる。大気の厚さ  $L$  は通常  $L \simeq 20$  km 程度と考えられている。しかし大気の密度は高度と共に減少しているので、この点まで考量した計算を行う必要がある。その結果、まず光が大気と衝突する回数は  $P_R$  は

$$P_R \simeq 18.6 \quad (7)$$

となる。ここで赤外線が CO<sub>2</sub> と散乱する確率  $P_{CO_2}$  を計算しよう。その結果、

$$P_{CO_2} \simeq 0.006 \quad (8)$$

と求まる。ここで大気中の炭酸ガスの濃度を 0.03 % としている。

### 4 温暖化の計算への影響

赤外線による共鳴吸収の計算結果にこの散乱確率  $P_{CO_2}$  の値を掛ける必要がある。これにより、散乱理論による計算が完成したことになる。

## 第9章 古典力学の散乱理論

散乱理論は量子力学でもその取扱いはかなり難しいものである。古典力学においては散乱理論の厳密な定式化が可能かどうか良く分からない。しかし古典力学における散乱断面積は直感的にはわかり易いとも言えるので、ここで少し散乱理論に慣れておくことは無駄にはならないと思われる。ここではまず剛体との弾性散乱における散乱断面積について解説しよう。そしてその後、Rutherford 散乱の微分断面積を計算しよう。これは勿論、量子論的な散乱理論を勉強するために多少の手助けにはなると期待して解説しているものである。

### 9.1 剛体との弾性散乱

質点が半径  $R$  の剛体と散乱する場合の散乱断面積を求めてみよう。そして散乱断面積の計算結果が

$$\sigma = \pi R^2 \quad (9.1)$$

となる事を示して行こう。まず、衝突パラメータ (impact parameter) と言う物理量を導入しよう。これは図のように  $b$  を衝突パラメータと定義している。この場合、微分断面積は

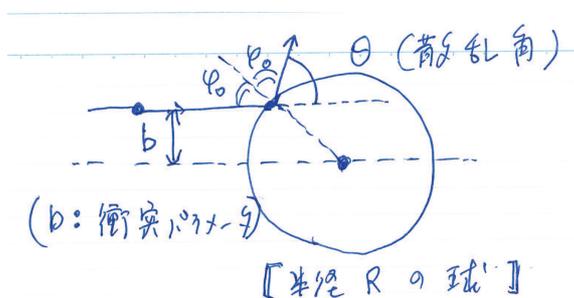


図 9.1: 剛体との散乱

$$d\sigma = d^2b = b db d\varphi = 2\pi b db \quad (9.2)$$

となる。この衝突パラメータ  $b$  は入射粒子の速度の方向を  $z$  軸とした場合、円筒座標の 2 次元平面座標  $r$  に対応している。

今の場合、散乱過程で  $\varphi$  の依存性はない。従って  $\varphi$  の積分ができて  $2\pi$  が出ている。微分断面積  $d\sigma$  を求めるためには、まず衝突パラメータ  $b$  と粒子の散乱角  $\theta$  とを関係づける必要がある。よって式 (9.2) を

$$d\sigma = d^2b = bdbd\varphi = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta \quad (9.3)$$

と書き直そう。絶対値を付けたのは断面積が正の値を取るからである。図 9-1 から

$$2\varphi_0 + \theta = \pi \quad (9.4)$$

である。よって

$$b = R \sin \varphi_0 = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (9.5)$$

となる。これより

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.6)$$

である。よって微分断面積は

$$d\sigma = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = \frac{\pi}{2} R^2 \sin \theta d\theta \quad (9.7)$$

となる。ここで立体角  $d\Omega$  を

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

とすれば微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2 \quad (9.8)$$

となっている。これより剛体散乱の全断面積は

$$\sigma = \pi R^2 \quad (9.9)$$

となる。これは半径  $R$  の球を遠方から見た時の断面積である。

## 9.2 Rutherford 散乱

荷電粒子が原子核と散乱する過程は Rutherford 散乱と呼ばれている。これは原子核が作るクーロン場

$U(r) = \frac{\alpha}{r}$  と荷電粒子とのクーロン散乱であり、散乱理論の定番でもある。この微分断面積は量子力学における散乱理論によって記述されているが古典力学の手法でも微分断面積が正しく求まっている。ここではその計算を紹介しよう。

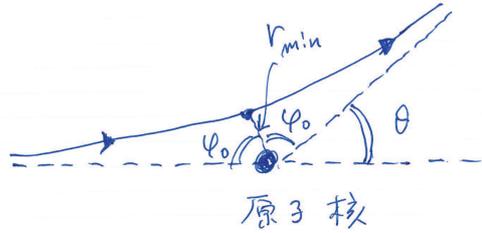


図 9.2: Rutherford 散乱

原子核が作るクーロンポテンシャルは  $\alpha = Ze$  なので

$$U(r) = \frac{Ze}{r} \quad (9.10)$$

である。ここではこの Rutherford 散乱の微分断面積を求めて行こう。最初にその結果を書いておこう。この微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9.11)$$

と書かれている。ここで  $v$  は入射粒子の速度である。

### 9.2.1 角運動量の保存

この散乱においては中心力との散乱であるため、角運動量  $L$  は保存する。この場合、角運動量  $L$  は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (9.12)$$

である。図 9-1 からこの質点の角運動量の大きさ  $L$  は

$$L = mbv \quad (9.13)$$

となっている。

### 9.2.2 $\varphi_0$ の計算

クーロンポテンシャルの場合，その軌道を与える方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)} \quad (9.14)$$

であった．ここで図9-2 から  $\varphi_0$  は

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left( E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (9.15)$$

となる．ここで  $r_{min}$  は荷電粒子が原子核に最も近付いた時の距離である．この積分の計算はすでに Kepler 問題のところで解説しているので，ここではその結果だけを書いておこう．この場合，この積分は

$$\cos \varphi_0 = \frac{\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + \frac{2L^2}{mE}}} \quad (9.16)$$

となっている．ここで

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad L = mbv \quad (9.17)$$

を使うと

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2b}{\alpha}\right)^2}} \quad (9.18)$$

と求まる．これより

$$\tan \varphi_0 = \frac{mv^2b}{\alpha} \quad (9.19)$$

となり， $\varphi_0$  を衝突パラメータ  $b$  と関係づける事が出来ている．

一方，図 9-2 より

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad (9.20)$$

なので，これより

$$b = \frac{\alpha}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (9.21)$$

である．式 (9.2) で定義されているように，散乱の微分断面積は

$$d\sigma = b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \frac{d\Omega}{\sin \theta} \quad (9.22)$$

となっている．ここで式 (9.21) を使って上式の計算を実行すれば Rutherford 散乱の微分断面積が求まる．それは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9.23)$$

と書かれている．この結果は量子論の散乱理論で計算された Rutherford 散乱の微分断面積と一致している．しかしながら，この一致はクーロンポテンシャルの特殊性に依っているものと考えられる．実際，剛体との散乱の場合，古典論の結果は量子力学の計算とは少し異なったものである事が知られている．

## 第13章 量子論における散乱理論

量子力学における散乱理論を解説する事は決して易しい事ではない．その説明にはそれだけで1冊の本が必要であると考えられる．さらに散乱理論はかなり難しいとも言える理論体系である．量子論において束縛状態を解く事はそれ程難しいとは言えないのだが，散乱状態を扱う事は波の広がりマクロスケールになるため，非常に難しくなっているのである．しかし実験と理論を結び付ける場合，基本的には散乱理論を使う事になっている．粒子をターゲットにぶつけてその散乱における反応を見て行く事が実験物理学の基本である事に依っている．この事から考えても，散乱理論の重要性が理解できるであろう．

古典力学における散乱理論を第9章で簡単に紹介しているが，ここでは量子力学における散乱理論(但しポテンシャル散乱に限定)を解説しよう．この章では主にEikonal近似と言われている手法による散乱断面積の計算法を紹介しよう．この方法はGlauber理論ともよばれている理論模型であるが，ある条件下での散乱断面積の記述には非常に有効である事が分かっている．利用価値が高い割には取り扱いが簡単であるため，幅広く応用されている散乱理論である．

### 13.1 散乱振幅 $f(\boldsymbol{q})$

散乱振幅  $f(\boldsymbol{q})$  について簡単に説明しよう．この散乱振幅は質量  $m$  の粒子が入射エネルギー  $E_k$  を持っている場合，その粒子が他の粒子が作るポテンシャル  $V(\boldsymbol{r})$  によるポテンシャル散乱の散乱断面積を記述する時の基本的な物理量である．この場合，Hamiltonian  $H$  は

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) \quad (13.1)$$

である．

従って Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E_k\psi(\mathbf{r}) \quad (13.2)$$

となっている。但し、これは固有値方程式ではない。実際、 $E_k$  は入射エネルギーであり、与えられている物理量である。この Schrödinger 方程式から Lippmann-Schwinger 方程式を求める事が出来る。これは

$$\psi = \phi + \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon}V\psi \quad (13.3)$$

と書かれている。ここで  $\phi$  は自由粒子の解であり、 $H_0$  は自由粒子の Hamiltonian である。よって

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{ikz}, \quad k = \sqrt{2mE_k} \quad (13.4)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \quad (13.5)$$

となっている。この場合、入射粒子は  $z$  方向に入射していると仮定されている。また  $+i\varepsilon$  は外向きの波を表すために導入されたものである。

### 13.1.1 伝搬関数

Lippmann-Schwinger 方程式において

$$\frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} \quad (13.6)$$

は演算子となっているが、これは伝搬関数に対応している。ここで

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} | \mathbf{r}' \rangle \quad (13.7)$$

としよう。この伝搬関数は運動量  $p$  の完全系を中間状態に挿入すると

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon} e^{p \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (13.8)$$

となる。この運動量積分ではまず角度積分がすぐに実行できて

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m\pi}{2\pi^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ip|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{p^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (13.9)$$

となる．この  $p$  積分は複素平面における積分計算を実行すればよく，その結果

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13.10)$$

と求まる．さらに今の場合， $r \gg r'$  なので

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r} + \dots \quad (13.11)$$

は充分良い近似である．よって

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi r} e^{ikr} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (13.12)$$

と求まっている．但し  $\mathbf{k}'$  は

$$\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}} \quad (13.13)$$

と定義されている．これより式 (13.3) は

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= e^{ikz} - \frac{m}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= e^{ikz} + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (13.14)$$

となる．この場合，散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.15)$$

と定義されている．但し  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  である．

### 13.1.2 Lippmann-Schwinger 方程式の導出

ここで Lippmann-Schwinger 方程式を導出しよう．まずは Schrödinger 方程式

$$(E_k - H_0)\psi = V\psi \quad (13.16)$$

に対して左から演算子

$$(E_k - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \quad (13.17)$$

を掛ける． $+i\varepsilon$  を入れたのは分母がゼロとなる事を防ぐためである．この時，式 (13.16) は

$$\psi = \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V\psi \quad (13.18)$$

となる．一方，自由粒子の方程式は

$$(E_k - H_0)\phi = 0 \quad (13.19)$$

である．従って，式 (13.18) に自由粒子の解  $\phi$  を足して置く必要がある．よって

$$\psi = \phi + \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V\psi \quad (13.20)$$

となり，これが Lippmann-Schwinger 方程式である．前述したように，分母の  $+i\varepsilon$  は散乱波が外向きの波  $[e^{ikr}]$  であると言う境界条件を課した事に対応している．

### 13.1.3 $T$ 行列

式 (13.20) に左から  $V$  を掛けて  $\phi$  で期待値を取ると

$$\langle \phi | V | \psi \rangle = \langle \phi | V | \phi \rangle + \langle \phi | V \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V | \psi \rangle \quad (13.21)$$

となる．ここで  $T$  行列を

$$T = \langle \phi | V | \psi \rangle \quad (13.22)$$

と定義すると式 (13.21) は

$$T = V + V \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} T \quad (13.23)$$

となる．これが  $T$  行列に対する散乱の方程式である．

## 13.2 微分断面積 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$

微分断面積  $d\sigma$  を定義しよう．これは flux 間の比

$$d\sigma \equiv \frac{\text{散乱波の flux } j_r \text{ at } r^2 d\Omega}{\text{入射波の flux } j_{in}} \quad (13.24)$$

として定義されている．まずは散乱波の flux  $j_r$  を計算しよう．この場合，散乱波の波動関数は式 (13.14) の右辺第 2 項を  $\psi_r$  として

$$\psi_r = f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (13.25)$$

となっている．よって

$$j_r = \frac{1}{2mi} \left( \psi_r^* \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\partial \psi_r^*}{\partial r} \psi_r \right) = \frac{k}{mr^2} |f(\mathbf{q})|^2 \quad (13.26)$$

である．一方，入射波の flux  $j_{in}$  は

$$j_{in} = \frac{k}{m} \quad (13.27)$$

である．よって微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad (13.28)$$

となっている．ここで  $q^2 = 2k^2(1 - \cos \theta)$  である．

### 13.2.1 散乱振幅の求め方：Born 近似

散乱振幅が分かれば散乱断面積が計算できる．しかしこの散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.29)$$

なので Schrödinger 方程式を解いて  $\psi(\mathbf{r})$  を求める必要がある．これが散乱断面積を計算する時の難しさである．従ってまずは簡単に断面積を求めるために， $\psi(\mathbf{r})$  を  $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  と自由粒子の解で近似する手法が採用されている．この場合

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.30)$$

と書かれる．これは Born 近似と呼ばれている方法であり良く使われている．特に，クーロンポテンシャル  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  の場合は正しい断面積が得られている．

### 13.3 部分波展開

散乱理論を扱う場合、散乱振幅を部分波に展開してその性質を議論する事が良くある。これはその方が議論しやすい場合が実際にあるからである。ここでは基本的な数式が天下りのになっているが、詳しい解説は散乱理論の教科書を参考にして貰う事にしよう。ここでは散乱振幅の部分波展開に関する解説を行う事により、散乱理論では非常に重要な役割を果たしている Optical Theorem を証明しよう。

散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(1 - e^{2i\delta_{\ell}}) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (13.31)$$

と部分波展開する事ができる。ここで  $\delta_{\ell}$  は phase shift と呼ばれる量である。また  $P_{\ell}(\cos \theta)$  は Legendre 関数である。この場合、散乱全断面積  $\sigma_T$  は

$$\sigma_T = \int |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega \quad (13.32)$$

である。これに式 (13.31) を代入して計算すると

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell} \quad (13.33)$$

と求まる。一方、散乱振幅の式 (13.31) から

$$\text{Im}f(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell} \quad (13.34)$$

と求まっている。これら 2 式を比較する事により

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0) \quad (13.35)$$

が示された。これは Optical Theorem (光学定理) として知られている方程式である。この定理は散乱 S 行列の Unitarity と関係しており、非常に重要な式である。

## 13.4 Eikonal 近似法

半世紀以上前から，Eikonal 近似法を用いた Glauber 理論が良く知られている．これは前方散乱の場合に応用できる理論模型である．またこの模型は多重散乱にも応用されていて，予想以上に実験結果をうまく再現できる模型となっている．この模型はかなり過激な近似をしているにもかかわらず，自然現象の記述には力を発揮すると言う模型である．この理由としては，恐らくは Optical Theorem (光学定理) を満たしていると言う事が一つの要因であろうと考えられる．しかし何故，近似以上にうまく現象を記述できるのかと言う問題の詳しい検証は今後の課題としておこう．

Eikonal 近似の基本は散乱が基本的には直線で起こっていると言う仮定である．この場合，縦方向の運動量 (longitudinal momentum) は散乱前後で不変であるとしている．従って，エネルギー保存がそれに応じて破れている．まずはその近似法を解説しよう．出発点の方程式は勿論，Schrödinger 方程式である．これは

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E_k\psi(\mathbf{r}) \quad (13.36)$$

であるが，ここで直線近似を表現するために

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz}\phi(\mathbf{r}) \quad (13.37)$$

としよう．この時， $\phi(\mathbf{r})$  に対する方程式は

$$-\frac{ik}{m}\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z} + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) \quad (13.38)$$

となる．ところが上式の右辺は  $k$  と比べて充分小さい事が示されるので無視する事が出来る．よって，Eikonal 近似をした方程式は

$$\frac{ik}{m}\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z} = V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \quad (13.39)$$

となっている．この微分方程式は直ちに解く事が出来て

$$\phi(\mathbf{r}) = Ae^{-\frac{m}{k}i\int^z V(\mathbf{b},w)dw} \quad (13.40)$$

となる．但し

$$\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z) \quad (13.41)$$

として  $b$  を導入している．この  $b$  は impact parameter に対応している．

これより  $\psi$  は

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz - \frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.42)$$

となる。この場合、規格化定数  $A$  は入射波に合わせて  $A = 1$  としている。従って散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は式 (13.15) より

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{ikz - \frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.43)$$

$$= -\frac{m}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\mathbf{b}, z) e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.44)$$

となっている。この場合、 $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - kz = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}$  を使っている。ここで

$$G(\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\mathbf{b}, z) e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.45)$$

と置く。これは

$$G(\mathbf{b}) = -\frac{k}{im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left( \frac{\partial}{\partial z} e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \right) \quad (13.46)$$

$$= \frac{ik}{m} \left[ e^{-\frac{im}{k} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b}, w) dw} - 1 \right] = \frac{ik}{m} [e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1] \quad (13.47)$$

となる。ここで

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{m}{k} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b}, w) dw \quad (13.48)$$

と置いた。また  $\Gamma(\mathbf{b})$  を

$$\Gamma(\mathbf{b}) \equiv 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})} \quad (13.49)$$

と定義すると散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \Gamma(\mathbf{b}) \quad (13.50)$$

となっている。この  $\Gamma(\mathbf{b})$  は profile function と呼ばれている。

### 13.4.1 Optical Theorem

散乱理論において Optical Theorem はかなり重要な役割を果たしている場合が多い。これはこの定理が散乱 S 行列の Unitarity と関係している事に依っている。ここでは Eikonal 近似によって求められた散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  が Optical Theorem を満たしている事を証明しよう。散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) \quad (13.51)$$

であった。この場合、全断面積  $\sigma_T$  は

$$\sigma_T = \int |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega = \frac{1}{k^2} \int |f(\mathbf{q})|^2 d^2q \quad (13.52)$$

である。この上式に式 (13.51) の  $f(\mathbf{q})$  を代入すると

$$\sigma_T = \frac{1}{k^2} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int d^2q \int d^2b d^2b' e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{b}')} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) (1 - e^{-i\chi(\mathbf{b}')}) \quad (13.53)$$

となる。この式は  $\mathbf{q}$  の積分を実行すると  $[(2\pi)^2 \delta(\mathbf{b}-\mathbf{b}')] が出てくるため、$

$$\sigma_T = \int d^2b |1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}|^2 = 2 \int d^2b (1 - \cos \chi(\mathbf{b})) \quad (13.54)$$

となっている。一方、 $\text{Im} f(0)$  は式 (13.51) から

$$\text{Im} f(0) = \frac{k}{2\pi} \int d^2b (1 - \cos \chi(\mathbf{b})) \quad (13.55)$$

となる。これより

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) \quad (13.56)$$

となる。これは Optical Theorem である。従って Eikonal 近似によって求められた散乱振幅  $f(\mathbf{q})$  は Optical Theorem を満たしている。恐らくこのため、Glauber 理論が予想以上にうまく実験を再現していると考えられるものである。

## 13.5 多重散乱理論

これまで扱ってきた散乱理論はポテンシャル散乱であり，これは1体問題の散乱理論である．実際には，例えば陽子が原子核と散乱する場合，これは多重散乱となっている．一般的に言って，多重散乱を理論的にきちんと扱う事は不可能である．しかしながら，多重散乱理論の記述に関しては Glauber 理論ではある程度の成功は収めていると言えよう．それでここでは Glauber 理論について簡単に解説しよう．

### 13.5.1 高エネルギー陽子-陽子散乱

まず高エネルギーにおける陽子-陽子散乱の断面積を Eikonal 近似による散乱振幅  $f_{pp}(\mathbf{q})$  によって再現しよう．陽子-陽子散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{pp}(\mathbf{q})|^2 \quad (13.57)$$

と書けるが，この時，散乱振幅  $f_{pp}(\mathbf{q})$  は

$$f_{pp}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \Gamma_{pp}(\mathbf{b}) \quad (13.58)$$

となっている．ここで  $\Gamma_{pp}(\mathbf{b})$  は

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})} \quad (13.59)$$

である．高エネルギーにおける陽子-陽子散乱の断面積の実験を再現するために

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = C_0 e^{-\frac{1}{2}p_0^2 b^2} \quad (13.60)$$

と仮定する場合は良くある． $C_0$ ,  $p_0$  は定数である．この場合，散乱振幅は

$$f_{pp}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2p_0^2} C_0 e^{-\frac{1}{2}\frac{q^2}{p_0^2}} \equiv f_{pp}(0) e^{-\frac{1}{2}\frac{q^2}{p_0^2}} \quad (13.61)$$

となっている．ここで  $f_{pp}(0)$  は定数である．今の場合，Optical Theorem を満たすようにすると

$$f_{pp}(0) = \frac{(i + a_0)k\sigma_T}{4\pi} \quad (13.62)$$

と書く事が出来る． $a_0$  は実験値を再現するように決められるパラメータである．

### 13.5.2 高エネルギー陽子-原子核散乱

多重散乱の最も単純な場合として高エネルギーの陽子-原子核の弾性散乱の微分断面積を計算しよう。この場合、基礎になる散乱振幅は陽子-陽子の散乱振幅  $f_{pp}(\mathbf{q})$  である。原子核は  $A$  個の核子から成り立っていると仮定しよう。そしてその状態関数は最も単純化したものとして

$$\Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \phi_{n_1}(\mathbf{r}_1) \cdots \phi_{n_A}(\mathbf{r}_A) \quad (13.63)$$

としよう。これは反対称性も考慮していないので現実的なものではないが、まずは原子核反応論を優先して計算を進めて行こう。

### 13.5.3 Glauber 理論

問題は散乱における多体の効果をどのように計算できるかと言う事である。ここでは Glauber が提案した理論を紹介しよう。これは半世紀以上前の論文であるが、しかし前方散乱の実験を良く再現できる理論模型である。

高エネルギーの陽子-原子核の弾性散乱において陽子-原子核の散乱振幅  $f_A(\mathbf{q})$  は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \langle \Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) | 1 - e^{i\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} | \Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \rangle \quad (13.64)$$

と書けると仮定している。ここで  $\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)$  は陽子と原子核の散乱における『位相』に対応するものである。この場合、 $\mathbf{s}_i$  は横方向に対応する核子の座標を表している。すなわち  $\mathbf{r}_i = (s_i, z_i)$  である。

ここで多重散乱の効果を具体的に取り入れるため、前方散乱である事を考慮して次のような仮定をしよう。それはこの  $\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)$  が陽子-核子散乱の和で書けるとするものである。すなわち

$$\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = \sum_{i=1}^A \chi_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_i) \quad (13.65)$$

である。これは直感的に言えば、核子との散乱による位相のズレはそれぞれの核子との散乱によるものを足して行けば良いと言う仮定である。恐らく、前方散乱の場合、この仮定はそれ程、悪くはないものと考えられる。

### 13.5.4 陽子-原子核の散乱断面積

これらの仮定の下で陽子-原子核の散乱振幅  $f_A(\mathbf{q})$  を計算しよう．今の場合，散乱振幅  $f_A(\mathbf{q})$  は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - \prod_{i=1}^A \left( 1 - \int d^3r_i \rho_{n_i}(\mathbf{r}_i) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_i) \right) \right) \quad (13.66)$$

と書く事が出来る．ここで

$$\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i) \equiv |\phi_{n_i}(\mathbf{r}_i)|^2 \quad (13.67)$$

と定義されている．式 (13.66) を具体的に計算できる形にするため，さらに近似をして行こう．その近似とは  $\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i)$  が状態にはあまり依らないと言うものである．従って  $\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i)$  を原子核の密度関数  $\rho(\mathbf{r})$  で

$$\rho_{n_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{A} \rho(\mathbf{r}) \quad (13.68)$$

と置き換える．但し，今の場合

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = A \quad (13.69)$$

である．従って式 (13.66) は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{A} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) \right)^A \right) \quad (13.70)$$

となる．ここで数学の恒等式

$$\left( 1 - \frac{1}{A} \alpha \right)^A \simeq e^{-\alpha} \quad (A \rightarrow \infty \text{ の時}) \quad (13.71)$$

を利用しよう．この場合，式 (13.70) は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - e^{-\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s})} \right) \quad (13.72)$$

となる．実際の原子核の  $A$  は 10 以上なので近似はかなり良いと言える．例として  $A = 20$ ,  $\alpha = 0.3$  として式 (13.71) を計算すると (左辺=0.739, 右辺=0.741) となり，充分良い近似である事が分かる．

ここで  $\Gamma_{pp}(\mathbf{b})$  を散乱振幅  $f_{pp}(\mathbf{q})$  で書いて見よう．これは Fourier 変換すると

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} f_{pp}(\mathbf{q}) \quad (13.73)$$

と求まる．この式を使って式 (13.72) の右辺の積分を書き換えてみよう．この場合

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{s})} f_{pp}(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{r}) \quad (13.74)$$

$$\simeq \frac{2\pi}{ik} f_{pp}(0) \int dz \rho(\mathbf{b}, z) \quad (13.75)$$

となる．ここで前方散乱なので  $\mathbf{q} = 0$  の散乱振幅  $f_{pp}(0)$  が主として効いてくると仮定して， $f_{pp}(0)$  を積分から外すと言う近似を使っている．また  $T(\mathbf{b})$  を

$$T(\mathbf{b}) = \int dz \rho(\mathbf{b}, z) \quad (13.76)$$

として導入すると，陽子-原子核散乱の散乱振幅は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{ik} f_{pp}(0) T(\mathbf{b})} \right) \quad (13.77)$$

となる．一方，散乱振幅  $f_{pp}(0)$  は

$$f_{pp}(0) = \frac{(i + a_0)k\sigma_{pp}^T}{4\pi} \quad (13.78)$$

と与えられているので，式 (13.77) は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{pp}^T T(\mathbf{b})} \right) \quad (13.79)$$

と書けている．但しここでは  $a_0$  項を省略している．従って陽子-原子核弾性散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_A(\mathbf{q})|^2 = \frac{k^2}{4\pi^2} \left| \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{pp}^T T(\mathbf{b})} \right) \right|^2 \quad (13.80)$$

となっている．