

# Rayleigh 散乱

藤田 丈久

(よろず物理研究所)

## はじめに

Rayleigh 散乱の新しい知見について解説しよう。この Rayleigh 散乱断面積は『空が何故、青いか?』と言う説明の時に重要になる現象論的な理論模型である。この散乱公式は 19 世紀に Rayleigh によって古典電磁気学を駆使して計算されたものであるが、この現象論的な散乱断面積  $\sigma$  は光の波長  $\lambda$  に対して  $\sigma \simeq r_0^2 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$  という依存性がある。このため、波長の短い青い光はより多く散乱されて空が青く見えるというものであった。しかしこの場合、 $\lambda_0$  は計算されてはなかったのである。

それで今回、この散乱断面積を量子力学における散乱理論により導出したのである。この場合、量子論でも確かに良く知られている Rayleigh 散乱の断面積の形が導出されている。ところが、具体的に  $\lambda_0$  を計算してこの散乱断面積の大きさを評価して見たところ、可視光領域では 10 桁以上、Compton 散乱の断面積よりも小さい事が分かったのである。この suppression factor は深刻であり、従って残念ながら、この Rayleigh 散乱の断面積は実際問題としては自然界に應用はできない散乱公式であった。

このため『空が何故、青いか？』と言う説明が現在、振り出しに戻っている。光と原子の Compton 散乱の断面積から波長依存性が出ているので、これにより空の青さが説明できる可能性は確かにあるが、共鳴散乱も重要であり今後の進展を期待しようと思う。

# 目次

第 1 章	光と原子の散乱 T 行列	6
1.1	光と電子の相互作用	6
1.2	1 次摂動の散乱	7
1.3	2 次摂動の散乱行列	7
1.3.1	散乱 T 行列の評価	7
1.3.2	Closure 近似	8
1.3.3	散乱 T 行列	8
第 2 章	Rayleigh 散乱の断面積	9
2.1	Rayleigh 散乱の断面積	9
2.2	$\lambda_0$ の評価	10
2.2.1	Compton 散乱の微分断面積	10
2.2.2	Rayleigh 散乱は起こらない!	10
2.2.3	次元解析による評価	11
第 3 章	光と原子の Compton 散乱	12
3.1	散乱 T 行列の評価	12
3.1.1	Closure 近似と Virial 定理	12
3.2	微分断面積	13
3.3	Rayleigh 散乱との比較	14
第 4 章	光と原子の共鳴散乱	15
4.1	Lippmann-Schwinger 方程式	15
4.1.1	伝搬関数 $G$	16
4.2	共鳴散乱の T 行列	16
4.2.1	$\langle \phi_1   (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda)   \phi_0 \rangle$ の計算	17
4.2.2	散乱 T 行列	17
4.3	共鳴散乱の微分断面積	18

		5
4.3.1	微分断面積の大きさ . . . . .	18
4.3.2	共鳴散乱の性質 . . . . .	18
第 5 章	『空の青さ』と今後の方向	19
5.1	空の青さ . . . . .	19
5.2	今後の方向 . . . . .	20
5.2.1	Rayleigh 散乱の問題点 . . . . .	20
付 録 A	非相対論の電磁的相互作用	21
A.1	場の理論における電磁的相互作用 . . . . .	21
A.2	$A^2$ 項の 1 次の摂動論 . . . . .	22
A.2.1	負のエネルギー状態 . . . . .	22
A.2.2	$A^2$ 項と電子の場との結合 . . . . .	22
A.3	$A^2$ 項の 2 次の摂動論 . . . . .	23
A.4	Fermi の 4 粒子相互作用 . . . . .	23

# 第1章 光と原子の散乱 T 行列

Rayleigh 散乱の断面積とは光と原子との散乱断面積のことである。これは Rayleigh によって古典電磁気学の手法により導出されたものである。この散乱断面積は量子力学における散乱理論により 2 次の摂動論として導出する事が出来ている。その結果、確かに良く知られている Rayleigh 散乱の断面積の形が求められている。

しかしながら、これまでの計算においては量子論的にも古典論的にも、その断面積の大きさがきちんと求められてはいなかったのである。これに対して、ここでは微視的に正確な計算を実行しているため、具体的な大きさもきちんと評価する事が出来ている。その結果、この散乱断面積の大きさが可視光領域では 10 桁以上、Compton 散乱の断面積よりも小さい事が示されている。従って、この Rayleigh 散乱の断面積は実際問題としては自然界に応用はできない事が証明されたのである。

## 1.1 光と電子の相互作用

光は電子としか相互作用しないので、これは原子中の電子との散乱に対応している。光と電子の相互作用 Hamiltonian は

$$H' = -\frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(x) \quad (1.1)$$

で与えられている。これは非相対論的なものであるが、スピンの部分を除けば相対論の相互作用と全く同じである (付録 A 参照)。実際、原子中の電子との散乱を扱う場合、この表現で充分である。ここで  $m$  は電子の質量であり、 $\mathbf{p}$  は電子の運動量演算子である。また  $\mathbf{A}(x)$  はベクトルポテンシャルであり

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \left( c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger} e^{i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i\mathbf{k}x} \right) \quad (1.2)$$

で与えられる。ここで  $kx \equiv \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  と定義されている。また  $c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}$ ,  $c_{\mathbf{k}, \lambda}$  はフォトンの生成・消滅演算子である。

## 1.2 1次摂動の散乱

ここではまず1次摂動の散乱を考えよう。これはフォトンが電子に吸収される事に対応するため、相互作用した電子は原子の基底状態から蹴飛ばされることになっている。この散乱過程は自由電子ではキネマティカルに禁止されているため、電子が束縛されている事が条件となっている。そしてフォトンを受吸収した電子は自由電子となるかまたは隣の原子の励起状態に遷移する事になる。従って、これは光電効果の場合に対応している。また基底状態にある電子を励起状態に遷移させる物理過程も1次摂動の効果である。この場合、直ちに脱励起してフォトンを出すため、結果としては共鳴散乱になっている。

## 1.3 2次摂動の散乱行列

光と原子中の電子との散乱過程(弾性散乱)を計算しよう。この場合、摂動の2次から散乱が起こっている。光と原子の散乱を考える場合、散乱を引き起こす非相対論的な相互作用 Hamiltonian は式(4.2)で与えられている。

### 1.3.1 散乱 T 行列の評価

原子の初期状態として  $|i\rangle = |\phi_0(\mathbf{r})\rangle$  を取ろう。この場合、 $\phi_0(\mathbf{r})$  は原子内の電子の基底状態の波動関数を表している。今、フォトンと原子の弾性散乱を考えているので、これは終状態でもある。この時、遷移を起こす T-行列は2次の摂動論より

$$T = \sum_n \langle \phi_0 | H' | \phi_n \rangle \langle \phi_n | H' | \phi_0 \rangle \left( \frac{1}{E_n - E_i - k + i\epsilon} + \frac{1}{E_n - E_i + k + i\epsilon} \right) \\ \simeq \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \sum_{n,\lambda} \frac{2 \langle \phi_0 | (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) (-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) | \phi_0 \rangle}{E_n - E_i}$$

と書けている。ここでは  $E_n - E_i \gg k$  としているが今の議論には充分である。また  $|\phi_n\rangle$  は電子の  $n$  番目の励起状態を表し、 $E_i$  と  $E_n$  は原子の基底状態と  $n$  番目の励起状態のエネルギー固有値を表している。またフォトンの状態関数に関しては

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \simeq 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots \quad (1.3)$$

と長波長近似を使っている。この場合、可視光領域では  $k \simeq 1.2 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$  程度であり、また原子の半径は大きくても  $r \leq 1.0 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$  なので  $kr \simeq 10^{-2}$  となり、充分良い近似である。

ここで一つコメントしておこう。式 (1.3) における右辺第 1 項は原子との Compton 散乱に対応している。ここでは Rayleigh 散乱の議論をしているため、この項を考慮していないが、後でこの原子との散乱問題に関して詳しく解説している。

### 1.3.2 Closure 近似

ここで  $(E_n - E_i)$  を平均値で置き換えて近似してしまう『Closure 近似』を採用しよう。2 次の摂動論を大雑把に評価する場合、良く用いられる近似法である。この場合、

$$\Delta E \equiv E_n - E_i$$

として、励起状態の  $n$  依存性を無くして、励起状態全体の平均値で置き換えてしまう事に対応している。この近似が正当化される条件は行列要素の  $n$  依存性が特に強くはないと言う事である。この近似法には factor 2 程度の信頼性はあると考えて良い事が分かっている。

### 1.3.3 散乱 T 行列

フォトンと原子中の電子との散乱 T 行列は

$$T = \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \sum_{\lambda} \frac{2\langle\phi_0|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})|\phi_0\rangle}{\Delta E}$$

となっている。ここで  $\lambda$  については和と平均を取り、波動関数  $\phi_0$  に関しては単純な形  $\phi_0 = Ne^{-ar}$  を仮定すると

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda})^2 &\simeq \frac{1}{3} \mathbf{p}^2 \\ \langle\phi_0|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})|\phi_0\rangle &\simeq 3k^2 \end{aligned}$$

となる。これより T 行列は

$$T = \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \frac{2k^2}{\Delta E} = \left( \frac{e^2}{Vkm^2} \right) \frac{k^2}{\Delta E}$$

となっている。



## 第2章 Rayleigh 散乱の断面積

Rayleigh 散乱の断面積を具体的に評価して行こう。特に、この断面積がどのくらいの大きさを持っているのかを数値的に見る必要がある。

### 2.1 Rayleigh 散乱の断面積

微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi|T|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \left(\frac{V}{c}\right) = \frac{4\alpha^2 k^4}{m^4(\Delta E)^2} \quad (2.1)$$

となっている。ここで

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad r_0 = \frac{\alpha}{m} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (2.2)$$

を導入しよう。 $r_0$  は電子の古典電子半径である。これらの式を用いて書き換えると微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2\lambda^4} \times \frac{8(2\pi)^4}{m^2(\Delta E)^2} \quad (2.3)$$

となっている。ここで

$$\lambda_0^4 \equiv \frac{8(2\pi)^4}{m^2(\Delta E)^2} \quad (2.4)$$

と定義するとこれは Rayleigh 散乱の断面積そのものである。実際、Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray}^{(cl)} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \quad (2.5)$$

である。

## 2.2 $\lambda_0$ の評価

具体的な数値を入れて  $\lambda_0$  を計算してみよう。ここで  $m = 0.51 \text{ MeV}/c^2$  であり、また  $\Delta E \simeq 7 \text{ eV}$  としている。この時

$$\lambda_0 \simeq 1.1 \times 10^{-7} \text{ cm} \quad (2.6)$$

と求まる。可視光 (青色) だと  $\lambda \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$  なので

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \simeq 3.6 \times 10^{-11} \quad (2.7)$$

となり非常に小さい。これより Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray} \simeq 3.6 \times 10^{-11} \times \left(\frac{r_0^2}{2}\right) \quad (2.8)$$

となっている。

### 2.2.1 Compton 散乱の微分断面積

ここで Compton 散乱の微分断面積を書いて置こう。但し、散乱前後のフォトン  
の運動量  $k, k'$  に対して  $k \simeq k'$  としている。微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Compton} = r_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \quad (2.9)$$

となっている。

### 2.2.2 Rayleigh 散乱は起こらない!

これは Rayleigh 散乱が自然界ではほとんど起こらない事を意味している。この結果はかなり深刻である。これまで人々は Rayleigh 散乱の微分断面積の形だけを気にしてきたものと思われる。しかし断面積がこれだけ小さいと言う事はこの散乱過程は現実には起こっていない事を意味している。従って『空が何故、青いか?』と言う問題に現在、答える事が出来ていない。

## 2.2.3 次元解析による評価

Rayleigh 散乱の微分断面積  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$  がフォトンの運動量  $k$  に対して

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim k^4 \quad (2.10)$$

となったことは非常に重要である。この系において、エネルギーの次元を持っているのは電子の質量  $m$  と  $\Delta E$  である。ここでこの  $\Delta E$  は分母に

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{k^4}{(\Delta E)^2} \quad (2.11)$$

と現われる事は2次の摂動論である事から明らかである。この場合、断面積が  $L^2$  の次元を持つためにはどうしても電子の質量の4乗が分母にあらわれる必要がある。すなわち

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{k^4}{m^4(\Delta E)^2} \quad (2.12)$$

となるべきである。実際、量子論による散乱断面積もその通りになっている。これを Compton 散乱と比べてみよう。Compton 散乱は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Compton} \sim \frac{1}{m^2} \quad (2.13)$$

であった。 $\Delta E$  は  $k$  と同じ大きさなので、結局  $\left(\frac{k}{m}\right)^2$  が suppression factor となっている。そしてこれが可視光では  $\left(\frac{k}{m}\right)^2 \leq 10^{-10}$  の大きさである。これは量子論的な散乱理論による厳密な計算結果と一致している。

## 第3章 光と原子の Compton 散乱

ここでは光と原子が Compton 散乱する場合の微分断面積について計算しておく。基本的な式はすべて第1章で解説されている。

### 3.1 散乱 T 行列の評価

光と原子の散乱で最も大きな断面積となる散乱 T-行列は2次の摂動論より

$$\begin{aligned} T_{A-Comp} &= \sum_n \langle \phi_0 | H' | \phi_n \rangle \langle \phi_n | H' | \phi_0 \rangle \left( \frac{1}{E_n - E_i - k + i\varepsilon} + \frac{1}{E_n - E_i + k + i\varepsilon} \right) \\ &= \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \sum_{n,\lambda} \langle \phi_0 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle \frac{2(E_n - E_i)}{(E_n - E_i)^2 - k^2} \end{aligned}$$

と書いている。ここでは pole term は無視している。ここでも長波長近似

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots$$

を使っているが、この場合、右辺の第1項だけを考慮している。従って、これは可視光領域の散乱に対応している。

#### 3.1.1 Closure 近似と Virial 定理

ここで Closure 近似を使って T-行列を書き直すと

$$\begin{aligned} T_{A-Comp} &= \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \frac{2}{\Delta E} \sum_\lambda \langle \phi_0 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda)^2 | \phi_0 \rangle F_k \\ &= \left( \frac{e^2}{2Vkm} \right) \left( \frac{4}{3\Delta E} \right) \langle \phi_0 | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | \phi_0 \rangle F_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。ここで

$$F_k \equiv \frac{1}{1 - \left( \frac{k}{\Delta E} \right)^2} \quad (3.2)$$

と定義されている。さらにクーロンポテンシャル  $[V_c(r) = -\frac{Ze^2}{r}]$  における Virial 定理を使うと

$$\langle \phi_0 | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | \phi_0 \rangle = -\frac{1}{2} \langle \phi_0 | V_c(r) | \phi_0 \rangle = |E_0|$$

と書く事が出来る。ここで  $E_0$  は基底状態のエネルギー固有値である。今、平均のエネルギー  $\Delta E$  として

$$\Delta E \simeq \frac{4}{3} |E_0|$$

としよう。これは近似であるが、大雑把な評価のためには充分であると言えよう。これより  $T_{Comp}$  は

$$T_{A-Comp} = \frac{e^2}{2Vkm} F_k$$

となっている。

## 3.2 微分断面積

これより微分断面積は

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{A-Comp} = 2\pi \left( \frac{e^2}{2Vkm} \right)^2 \frac{V^2 k^2}{(2\pi)^3} |F_k|^2$$

となる。これを書き直すと

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{A-Comp} = r_0^2 |F_k|^2 \quad (3.3)$$

となり、これが原子の場合の Compton 散乱の微分断面積である。大雑把な評価をする場合、可視光領域では  $|F_k|^2 \simeq 1$  として充分であり、これは電子に対する Compton 散乱の微分断面積と大きさがほとんど同じである事が分かる。

### 3.3 Rayleigh 散乱との比較

原子の Compton 散乱と Rayleigh 散乱とを比較して見よう。この時、その違いは基本的にはフォトンの状態関数を長波長近似した時、どの項を取ったかと言う問題に帰着されている事が分かる。事実

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \simeq 1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \dots \quad (3.4)$$

の展開において、第1項を取れば原子の Compton 散乱となり、第2項を取れば Rayleigh 散乱となっている。1と比べて  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$  の大きさが結局、最終的に Rayleigh 散乱の大きさを大雑把には示している。

## 第4章 光と原子の共鳴散乱

光と原子が相互作用して、原子が励起状態に遷移した後、直ちに脱励起する散乱過程が共鳴散乱である。この場合、理論的に正確な取扱いは極めて難しいものであり、どうしても近似が必要になっている。ここでは現象論的な手法を採用して、まずは共鳴散乱の微分断面積の大雑把な大きさとその形を求める事を第1の目的としよう。この場合、かなり大胆な近似をしない限り先に進めないのが、説明が天下り的になっているものと思われる。しかしながら、共鳴散乱の本質は理解されるように、出来る限り丁寧に解説して行こう。

### 4.1 Lippmann-Schwinger 方程式

散乱理論を正確に取り扱おうとすると、どうしても Lippmann-Schwinger 方程式から始める必要がある。この場合、散乱  $T$  行列に対する積分方程式は

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}G\hat{T} \quad (4.1)$$

と書かれている。ここで  $V$  が散乱を起こす相互作用であり、今の場合

$$\hat{V} = H' = -\frac{e}{m}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(x)) \quad (4.2)$$

である。散乱の初期および終状態まで書くと  $T$  行列は

$$T = \langle \mathbf{k}, \phi_0 | \hat{T} | \mathbf{k}, \phi_0 \rangle \quad (4.3)$$

と書かれている。ここで  $k$  は光の運動量であり、また  $\phi_0$  は原子の基底状態の波動関数である。但しこの場合、一番外側の電子の波動関数に対応している。これは光と原子の弾性散乱に対応しているが、途中で共鳴状態を経由している事を示している。

### 4.1.1 伝搬関数 $G$

$G$  は伝搬関数であるが、これをどのように求めたら良いのか、共鳴散乱では非常に難しい。ここでは共鳴散乱の微分断面積の実験結果を見て、その結果を再現できるような形を仮定しよう。すなわち、伝搬関数  $G$  として

$$G = \frac{1}{k - \Delta E_1 + i\Gamma} \quad (4.4)$$

と取る事にしよう。ここで  $\Delta E_1$  は光で励起できる電子の励起状態のエネルギーであるが、これは基底状態から測られている。 $\Gamma$  が散乱幅であるが、しかしこれをどのように計算したら良いのかは、難し過ぎてよくわからない。基本的には考えている励起状態の寿命と関係しているものと考えられるが、いずれにしても簡単に計算できるというものではない。

## 4.2 共鳴散乱の $T$ 行列

光と原子との散乱において、共鳴散乱を経由する場合の散乱の  $T$  行列は次のように書かれている。

$$\begin{aligned} T_{Res} &= \sum_n \frac{\langle \phi_0 | V | \phi_n \rangle \langle \phi_n | V | \phi_0 \rangle}{k - \Delta E_1 + i\Gamma} \\ &= \left( \frac{e}{m\sqrt{2Vk}} \right)^2 \sum_{n,\lambda} \frac{\langle \phi_0 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_n \rangle \langle \phi_n | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle}{k - \Delta E_1 + i\Gamma} \end{aligned}$$

ここでも長波長近似

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots$$

を採用しているが、右辺の第1項だけを取っている。ここでは遷移する状態を1個だけ考えよう。それは  $E_1$  で遷移できる状態なので  $|\phi_1\rangle$  に対しては最も単純な

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{4\alpha^5}{3}} r e^{-\alpha r} Y_{10}(\theta, \varphi) \quad (4.5)$$

という波動関数を仮定しよう。一方、基底状態の波動関数  $|\phi_0\rangle$  に対しては

$$|\phi_0\rangle = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha r} \quad (4.6)$$

と言う  $s$  波の状態関数を用いている。



4.2.1  $\langle \phi_1 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle$  の計算

ここで  $\langle \phi_1 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle$  を計算しておこう。まず微分を実行すると

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) \phi_0 = -i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (\boldsymbol{\epsilon}_\mu Y_{1\mu}) \frac{d\phi_0}{dr} \quad (4.7)$$

である。さらに角度積分を実行すると球面調和関数の直交性より

$$\int Y_{10}^*(\theta, \varphi) \boldsymbol{\epsilon}_\mu Y_{1\mu}(\theta, \varphi) d\Omega = \epsilon_0 \quad (4.8)$$

となる。これより  $\langle \phi_1 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle$  は計算されて

$$\langle \phi_1 | (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) | \phi_0 \rangle = -i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\frac{4\alpha^5}{3}} \epsilon_0 \int_0^\infty \frac{d\phi_0}{dr} r e^{-\alpha r} r^2 dr \quad (4.9)$$

$$= \frac{i}{2} \epsilon_0 \alpha \quad (4.10)$$

と求まる。

## 4.2.2 散乱 T 行列

これより散乱 T 行列は

$$T_{Res} = \left( \frac{e^2}{2Vkm^2} \right) \left( \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{1}{k - \Delta E_1 + i\Gamma} \quad (4.11)$$

となる。ここで  $\epsilon_0^2 = 1$  を使っている。また Virial 定理を用いて

$$\frac{\alpha^2}{2m} = \langle \phi_0 | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | \phi_0 \rangle = |E_0|$$

が証明される。但し  $E_0$  は原子の基底状態のエネルギー固有値である。従って、散乱 T 行列は

$$T_{Res} = \left( \frac{e^2}{4Vkm^2} \right) \frac{|E_0|}{k - \Delta E_1 + i\Gamma} \quad (4.12)$$

となっている。

### 4.3 共鳴散乱の微分断面積

これより微分断面積は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Res} &= 2\pi |T_{Res}|^2 \frac{V^2 k^2}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{r_0^2}{4} \frac{E_0^2}{(k - \Delta E_1)^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

と求められた。ここで  $E_0$  は原子の基底状態のエネルギーであり、 $\Delta E_1$  は励起エネルギーである。 $\Gamma$  は共鳴幅であるが、この値にこの共鳴散乱の理論的な難しさがすべて閉じ込められていると言ってよい。

#### 4.3.1 微分断面積の大きさ

この微分断面積はピーク値ではかなり大きな値になっている。大雑把な評価として  $E_0 \simeq 10$  eV 程度であり、 $\Gamma \simeq 0.2$  eV くらいだとすれば

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Res} \text{ (at peak)} \simeq 600 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{A-Comp} \quad (4.14)$$

となっていて、充分大きい事がわかる。

#### 4.3.2 共鳴散乱の性質

ここで求めた共鳴散乱の微分断面積は最も単純化されたものであり、自然界に応用した場合、どの程度信頼できるのかと言う問題は今後、検証する必要がある。特に、この計算においては原子の状態関数として非常に単純なものを採用しているため、数値的な信頼性が高いとはとても言えない。

さらに、伝搬関数  $G$  の形も大雑把には実験と合致する形になっているものと考えているが、これも極端に単純化されたものである。そして、幅  $\Gamma$  に関しては任意のパラメータとして導入されている。基本的に言って、伝搬関数における虚数部 (幅  $\Gamma$ ) は、その励起状態が消滅する現象を簡単な表現で代用しているので、この理論的な計算が簡単であるわけがないのである。近い将来、こうした理論計算が行われる事を期待したいと思っている。

## 第5章 『空の青さ』と今後の方向

Rayleigh 散乱の断面積が小さすぎて自然界への応用はできない事が判明したため、今後どうすれば空の青さを証明できるのかと言う事が大きな問題となっている。共鳴散乱の断面積が充分大きい事は確かであるが、それがどのように実際の空の青さに反映しているのかは自明ではない。

### 5.1 空の青さ

自然界では確かに空は青い。この理由の一つに  $F_k$  の影響が考えられるかも知れない。ここでもう一度、光と原子の微分断面積を書いて置こう。これは

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{A-Comp} = r_0^2 |F_k|^2 \quad (5.1)$$

であり、 $F_k$  は

$$F_k \equiv \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{\Delta E}\right)^2} \quad (5.2)$$

である。この式で可視光領域では  $k$  と  $\Delta E$  にそれ程、大きな差があるわけではない。但し、 $\Delta E$  の値には任意性がありすぎて、これに対しては大雑把な事しかわからないのが現状である。ここでは赤色と青色の光に対して断面積がどの程度、異なるのかを評価して見よう。

(1)  $\Delta E \simeq 7 \text{ eV}$  の場合：

$$\text{赤： } |F_k|^2 \simeq 1.1$$

$$\text{青： } |F_k|^2 \simeq 1.4$$

従って、青の光の方が30%程、断面積が大きい。

(2)  $\Delta E \simeq 5 \text{ eV}$  の場合：

$$\text{赤： } |F_k|^2 \simeq 1.3$$

$$\text{青： } |F_k|^2 \simeq 2.0$$

従って、青の光の方が60%程、断面積が大きい。

## 5.2 今後の方向

この結果を見る限り、赤い光よりも、青い光の方がより多く散乱されることは確かな事である。しかしこれはあくまでも定性的な話であり、これが『空が何故、青いか？』の問題を解決したことになるとはまだ言えないであろう。

今後、より定量的な計算が必要であろう。さらに共鳴散乱の影響がどの程度、大きいのかと言う問題も検討する必要がある。これらの問題をきちんとチェックできれば、『空が何故、青いか？』の問題に答える事が出来るものと考えている。

### 5.2.1 Rayleigh 散乱の問題点

Rayleigh 散乱に関して、一つだけコメントしておこう。もし Rayleigh 散乱の公式が正しかったとしたら、この場合、Thomson 散乱は起こっていない事になっている。これは明らかで、Thomson 散乱の断面積は光の波長依存性がないからである。従ってこの Rayleigh 散乱断面積の振る舞いは実験と矛盾している。

さらに深刻な問題点として、実はこの Rayleigh 散乱断面積のパラメータ  $\lambda_0$  を観測値を再現できるように現象論的に合わせたとした場合、青色の光と赤色の光の比が6倍以上になっているのである。これは明らかに現実の反射光が白色光である事と矛盾している。この事より、Rayleigh 散乱の断面積はたとえパラメータ  $\lambda_0$  を合わせたとしても、自然界の記述には適していなかったのである。

## 付録 A 非相対論の電磁的相互作用

Dirac 方程式において電子と電磁場が相互作用している Hamiltonian を非相対論に近似すると

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \quad (\text{A.1})$$

と求められる。但し、ここでは磁場などの部分は除いている。ここで右辺第3項の問題点について解説しよう。この問題は昔、良く議論されたものであるが、最近はほとんど取り扱われる事はないように見える。それでここではこの古い問題点をしっかりと理解しておく必要があると思立ち、ここに解説するものである。

### A.1 場の理論における電磁的相互作用

$A^2$  項の問題点を議論する前に、式 (A.1) における第2項について簡単なコメントをしておこう。この第2項に対応する場の理論における相互作用 Hamiltonian は

$$H' = -\frac{e}{m} \int \psi^\dagger \mathbf{p} \psi \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{A.2})$$

である。ここで電子のカレント密度は

$$\mathbf{j} = \frac{1}{m} \psi^\dagger \mathbf{p} \psi \quad (\text{A.3})$$

である。但しスピン部分は除いている。この式は

$$H' = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{A.4})$$

となっていて、これは相対論における電磁場と電子の相互作用 Hamiltonian そのものである。従って、これが相対論において正しい電磁場と電子の相互作用  $H'$  であるため、非相対論でもこれが電磁場と電子の基本的な相互作用であることは明らかである。この事からしても、式 (A.1) における第3項がどのような物理的な意味があるかは不明であり、実際、第3項に対する実験的なサポートはない。

## A.2 $A^2$ 項の 1 次の摂動論

右辺第 3 項である  $[\frac{e^2}{2m}A^2]$  を 1 次の摂動論で計算すると何も問題がないように見える。実際、これは光と電子の散乱過程に効いてくるように見えるが、しかしこの項の実験的な確証はない。また近似して求められた Hamiltonian が信用できない事は勿論、良く知られている事実でもある。従って、この第 3 項が物理的に何らかの意味があると言う事を主張する場合、その理論的な根拠を示す必要がある。しかしながら現在まで、その議論がきちんと行われたと言う事実はない

### A.2.1 負のエネルギー状態

特に、Compton 散乱において、負のエネルギー状態を入れないと正しい非相対論の極限が取れない事は良く知られている事実である。これは Dirac 方程式においては負のエネルギー状態を考慮してはじめて完全系を張っている事と関係している。このため Dirac 方程式を非相対論化すると負のエネルギー状態を捨ててしまう事になり、その非相対論近似した Hamiltonian がどの程度、信頼できるのかと言う検証は常に必要である。特に、光と電子の散乱において非相対論の Hamiltonian を利用する場合、相当、注意深く計算する必要がある事は明らかであろう。

### A.2.2 $A^2$ 項と電子の場との結合

第 3 項である  $[\frac{e^2}{2m}A^2]$  に関してであるが、これが電子の場と結合しない限り、特に問題は起こらないと考えられる。電子の場と関係ない場合、それは場のエネルギーを表しているだけであり、相互作用しないからである。

ところが  $\int \psi^\dagger \psi A^2 d^3r$  の形で電子の場と結合させると、これは問題を起こす可能性が出てくる。それは Dirac 方程式から近似して非相対論の Hamiltonian を求める時に電子の負のエネルギー状態を消してしまったからである。少なくともベクトル場を量子化した後、この  $A^2$  項を信頼して良いと言う理由を見つける事は出来ていない。

### A.3 $A^2$ 項の 2 次の摂動論

この  $A^2$  項の 2 次摂動を計算するためには、場の Hamiltonian を書いておく必要がある。それは

$$H'' = \frac{e^2}{2m} \int \psi^\dagger \psi A^2 d^3r \quad (\text{A.5})$$

と書く事が出来る。この式から確かに  $A^2$  項が電子と結合している事が分かる。この 1 次の摂動論はこれまでの手法で計算されたものと同じである。

ところが、この Hamiltonian の 2 次の摂動論を展開するとこれは 2 次発散が起こってしまう事が分かっている。それは中間状態にフォトンが走るため、これはループ計算となっている事と関係している。ここでは非相対論のまま計算しよう。この時、2 次の摂動論において、その発散の主要項だけ書くと

$$T^{(2)} \sim \int^\Lambda \frac{1}{k} d^3k \rightarrow \Lambda^2 \quad (\Lambda \rightarrow \infty) \quad (\text{A.6})$$

となり 2 次発散しているのである。従って、 $A^2$  項を信頼する事は出来ない事が良くわかるものと思う。

一方、現在までの様々な計算結果と実験との比較を見る限り、式 (A.1) の第 2 項  $[\frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}]$  は相対論の式と一致していて、物理的に充分信頼できるものである。

### A.4 Fermi の 4 粒子相互作用

弱い相互作用の歴史を勉強している人にとって、4 粒子相互作用の 2 次の摂動計算における 2 次発散の困難は良く知られている問題であろう。弱い相互作用の模型は Feynman 達によって提案された CVC (Conserved Vector Current) 理論が非常に大きな成功を収めたのであるが、実はこれは 1 次の摂動計算の範囲内のみでの話であった。この場合、確かにほとんどの実験結果をうまく再現する事が出来たのである。ところが、これは 4 粒子相互作用であるため、2 次の摂動論計算では 2 次発散が出てしまうと言う理論的な問題点が知られていたのである。

この問題を解決するために、4 粒子相互作用を媒介するベクトルボソンの存在が理論的にも実験的にも指摘されていたのである。実際、1970 年代半ばにはこのベクトルボソンの質量が  $30 \text{ GeV}/c^2$  以上であることが報告されていたのである。その後、1980 年代になって実験的にもこの Weak Vector Boson が CERN の加速器によって発見されたのである。このベクトルボソンの導入により、2 次の摂動計算における 2 次発散の困難は解消されている。

## 関連図書

- [1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)
- [2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (Addison-Wesley,1967)
- [3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)