

物理の上達法

藤田 丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

物理を深く理解するためには自分で理論体系を作ってみようと努力する事が最も重要である。勿論，簡単にできるわけではないが，しかし自分で作ろうと言う作業を行わない限り，物理の理論体系をきちんと理解できるはずがない。そして豊富な知識が頭に残っていても役には立たず，物理を深く理解して始めて研究で前に進めるための必要条件が満たされるものと思われる。

それでここでは現代物理の基礎である量子場の理論をどのようなレシピ(作業過程)で作ろうとするのがベストであろうかと言う方法論を書いて行こう。しかしながら，作り方を教えても実際に作る事とはこれもまた別問題であることは当然である。例えば，テニスの上達法を熟知していても，テニスのストロークをうまく打つことはできない。しかしそれにもかかわらず，正しいレシピを知っている事は非常に重要である。例え身体能力が高くてもテニスの理論が分かっていないとその上達はいずれ限界に達してしまうものである。

物理は本当に難しいものである．なかなか自分のものになってくれない．余程，一生懸命に努力して演習問題を解きまくったり，新しい構想を何日も何日も考え込んで努力を重ねても，その進歩は常にほんの少しでしかない．しかしだからこそ，物理を学ぶのは本当に楽しいものである．

これは一例として挙げているが，昔，量子電磁力学においてその Lagrangian 密度 \mathcal{L} をゲージ変換をして見た時，それが不変になっている事が確かめられて本当に驚いたものである．任意の関数 χ が時間と空間に依存しているにもかかわらず，Lagrangian 密度がゲージ変換に対して不変であると言う事が非常に不思議に思ったものである．しかし同時に，何故，電子の場 ψ まで $\psi' = e^{-i\chi}\psi$ と変換する必要があるのか疑問に思った事も確かである．実際問題としては，作用 $S = \int \mathcal{L} d^4x$ が不変であれば良いので，Lagrangian 密度がゲージ変換に対して不変であると言う要求は強すぎるものである．作用が不変であることを要請すると電子の状態関数の変換は不要となる．その意味ではどの物理量がゲージ変換に不変であるのかと言う問題はそう単純なことではないと言える．

目次

第 1 章	量子場の理論の作り方 :	
	フォトン	5
1.1	Maxwell 方程式	5
1.1.1	ベクトルポテンシャルの導入	6
1.1.2	ゲージ不変性	7
1.1.3	Dirac 場の構築	7
1.2	作用のゲージ不変性	8
1.2.1	Global ゲージ不変性	8
1.2.2	Local ゲージ不変性	8
1.3	電磁場の量子化	9
1.3.1	ベクトルポテンシャルは実関数	9
1.3.2	ベクトルポテンシャルの量子化	10
1.3.3	Fock 空間	10
1.3.4	フォトンの状態関数	11
1.3.5	フォトンと電子の相互作用	11
1.4	フォトンの運動方程式と偏極ベクトル	12
1.4.1	偏極ベクトルの決定	12
1.4.2	Lorentz 条件	13
1.4.3	ゲージ固定は自由か?	13
1.5	Dirac 場の量子化	14
1.5.1	Dirac 場の Lagrangian 密度	14
1.5.2	Dirac 方程式の自由粒子解	15
1.5.3	Dirac 場の量子化	16
1.5.4	反交換関係	16
1.5.5	Pauli 原理	16
1.6	何故, 繰り込み理論は間違えたのか?	17
1.6.1	電子のバーテックス補正	17
1.6.2	Log 発散の原因	17

1.6.3	伝搬関数の計算	17
1.6.4	Feynman の伝搬関数の問題点	18
1.6.5	繰り込み理論では Feynman の伝搬関数を使用!	18
1.6.6	電子-電子散乱の T - 行列	19
1.6.7	レプトンのバーテックス補正	19
第 2 章	量子場の理論の作り方 :	
	弱い相互作用	20
2.1	弱い相互作用	20
2.1.1	相互作用の形	21
2.1.2	弱ベクトルボソン場の量子化	21
2.2	弱い相互作用の繰り込み理論	22
2.2.1	Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出	22
2.2.2	ベクトル場 W^μ の自由度の数	23
2.3	有限質量ベクトルボソンの伝播関数	24
2.3.1	Green 関数による伝播関数	24
2.4	弱ベクトルボソンによるバーテックス補正	25
2.4.1	Z^0 ボソンによる電子の $g-2$	25
2.4.2	Z^0 ボソンによるミューオンの $g-2$	25
2.5	弱い相互作用の Lagrangian 密度	26
2.5.1	実験の再現性	26
第 3 章	量子場の理論の作り方 :	
	重力	27
3.1	重力	27
3.1.1	重力場 \mathcal{G} と結合する項	27
3.1.2	重力場を含む Lagrangian 密度	28
3.2	重力場の性質	28
3.2.1	静的な振る舞い	28
3.2.2	重力場の相互作用エネルギー	29
3.3	重力場の方程式	29
3.4	Foldy-Wouthuysen 変換	30
3.4.1	古典近似	30
3.4.2	非相対論近似式の直感的導出	31
3.5	新しい重力理論の予言	32

3.5.1	重力付加ポテンシャルは非可積分	32
3.5.2	重力付加ポテンシャルによる周期のズレ	33
3.5.3	地球公転周期のズレ (うるう秒)	33
3.5.4	うるう秒の起源	34
第 4 章 量子場の理論の作り方 :		
	強い相互作用 (QCD)	35
4.1	量子色力学 (QCD)	35
4.1.1	量子色力学の Lagrangian 密度	36
4.2	クォークのカラー電荷	37
4.2.1	クォークの閉じ込め	37
4.3	自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性	38
4.3.1	摂動論が定義できない!	38
4.3.2	QCD の摂動論	38
4.4	QCD における観測量	39
4.4.1	陽子・中性子の磁気能率	39
4.4.2	クォークのカラー数	40
4.4.3	$e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象	40
付録 A 電磁気学の習熟法		
A.1	電場	41
A.2	磁場	43
付録 B Notations in Field Theory		
B.1	Natural Units	46
B.2	Hermite Conjugate and Complex Conjugate	47
B.3	Scalar and Vector Products (Three Dimensions) :	48
B.4	Scalar Product (Four Dimensions)	49
B.4.1	Metric Tensor	50
B.5	Four Dimensional Derivatives ∂_μ	50
B.5.1	\hat{p}^μ and Differential Operator	50
B.5.2	Laplacian and d'Alembertian Operators	51
B.6	γ -Matrices	51
B.6.1	Pauli Matrices	51
B.6.2	Representation of γ -matrices	51
B.6.3	Useful Relations of γ -Matrices	53

B.7	Transformation of State and Operator	54
B.8	Fermion Current	55
B.9	Trace in Physics	55
B.9.1	Definition	55
B.9.2	Trace in Quantum Mechanics	56
B.9.3	Trace in $SU(N)$	56
B.9.4	Trace of γ -Matrices and \not{p}	57
付録C	Basic Equations and Principles	59
C.1	Lagrange Equation	59
C.1.1	Lagrange Equation in Classical Mechanics	59
C.1.2	Hamiltonian in Classical Mechanics	60
C.1.3	Lagrange Equation for Fields	60
C.2	Noether Current	61
C.2.1	Global Gauge Symmetry	61
C.2.2	Chiral Symmetry	63
C.3	Hamiltonian Density	63
C.3.1	Hamiltonian Density from Energy Momentum Tensor	64
C.3.2	Hamiltonian Density from Conjugate Fields	65
C.3.3	Hamiltonian Density for Free Dirac Fields	65
C.3.4	Hamiltonian for Free Dirac Fields	66
C.3.5	Role of Hamiltonian	66
C.4	Variational Principle in Hamiltonian	68
C.4.1	Schrödinger Field	68
C.4.2	Dirac Field	69
付録D	Wave Propagations in Medium and Vacuum	71
D.1	What is Wave?	71
D.1.1	A Real Wave Function: Classical Wave	72
D.1.2	A Complex Wave Function: Quantum Wave	72
D.2	Classical Wave	72
D.2.1	Classical Waves Carry Their Energy?	73
D.2.2	Longitudinal and Transverse Waves	73
D.3	Quantum Wave	74
D.3.1	Quantum Wave (Electron Motion)	74

D.3.2	Photon	75
D.4	Polarization Vector of Photon	76
D.4.1	Equation of Motion for Polarization Vector	76
D.4.2	Condition from Equation of Motion	77
D.4.3	Photon Is a Transverse Wave?	78
D.5	Poynting Vector and Radiation	78
D.5.1	Field Energy and Radiation of Photon	79
D.5.2	Poynting Vector	79
D.5.3	Emission of Photon	81
付録 E	New Derivation of Dirac Equation	82
E.1	Derivation of Lagrangian Density of Dirac Field	82
E.1.1	Lagrangian Density for Maxwell Equation	82
E.1.2	Four Component Spinor	83
E.2	Shape of Lagrangian Density	84
E.2.1	Mass Term	84
E.2.2	First Quantization	85
E.3	Two Component Spinor	85
付録 F	Nuclear Force	87
F.1	One Boson Exchange Potential	87
F.2	Two Pion Exchange Process	88
F.3	Double Counting Problem	91
F.3.1	Ladder Diagrams	91
F.3.2	One Pion Exchange Potential	92
F.3.3	Two Pion Exchange Potential	92
付録 G	Photon Propagator and Electron-Electron Scattering	94
G.1	Photon Propagator	94
G.1.1	Feynman Propagator of Photon	95
G.1.2	Calculation of $\langle 0 T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\} 0\rangle$	96
G.1.3	Summation of Polarization States	97
G.1.4	Coulomb Propagator	98
G.1.5	Correct Propagator of Photon	99
G.2	Feynman Propagator vs. Correct Propagator	100

G.2.1	Electron-Electron Scattering	100
G.2.2	Right T-matrix from Feynman Propagator	102
G.2.3	Loop Diagrams (Fermion Self-energy)	102
付録 H	Non-integrable Potential	104
H.1	Non-integrable Potential	104
H.1.1	Effects of Non-integrable Potential on Solution	105
H.1.2	Discontinuity of Orbit	106
H.2	Perturbative Treatment of Non-integrable Potential	107
H.2.1	Integrable Expression	107
H.2.2	Higher Order Effect of Perturbation	108
H.3	Period Corrections from General Relativity	109
H.3.1	Earth Revolution Period	110
H.4	Gravitational Wave	110
H.5	Predictions of New Gravity Model	111
H.5.1	Period Shifts in Additional Potential	111
H.5.2	Period Shifts of Earth Revolution (Leap Second)	112
付録 I	相対性理論	114
I.1	慣性系	114
I.1.1	Galilei の相対性理論	115
I.2	特殊相対性理論	116
I.2.1	Lorentz 変換	116
I.2.2	場の理論模型は Lorentz 不変	116
I.2.3	Minkowski 空間	117
I.3	一般相対性理論	118
I.4	座標の変換と座標系の変換	119
I.4.1	相対性理論における速度の和	120
I.4.2	運動量の Lorentz 変換	120
I.4.3	速度の和：正確な導出	121
I.4.4	運動方程式の変換不変性	122
I.5	運動系の時間刻みは遅れるか？	124
I.5.1	地上の系からみた電車の系の時間刻み	124
I.5.2	電車の系からみた地上の系の時間刻み	124

	I.5.3	思考実験の何処が間違いか？	125
	I.5.4	直感的な理解	125
I.6		相対性理論の応用例	126
	I.6.1	光のドップラー効果	126
	I.6.2	大気圏で生成されたミュオンの走行距離	127
	I.6.3	大型加速器実験における不安定粒子	127

第1章 量子場の理論の作り方： フォトン

量子場の理論を自分で作ろうとする時，それを科学的にやろうとするとまずは失敗してしまうであろう．現代物理に関しては，科学史は間違いだらけとなっているからである．それだけ，物理は難しいと言う事である．しかしながら，それが何であれ，自分で作ろうとしないと進歩はない．さらに，いくら知識が豊富でも自分で手を動かして計算チェックをやらないと物理を心底，楽しむ事はできないであろう．それでここでは量子場の理論の作り方(レシピ)を紹介しよう．そしてこのレシピに従いながら自分で量子場の理論を作ろうと試みて欲しいと思っている．この場合，その内容を自分で検証する過程が大変な作業となっている事は間違いない．実際，かなり頑張っても検証には数年は掛かるのが普通であると考えているが，どうであろうか．

1.1 Maxwell 方程式

量子場の理論を作ろうとする場合，その出発点は Maxwell 方程式である．これは電磁気に関する自然現象を記述するために作られた理論体系なので，ある意味では自然そのものであると言えよう．従って，量子場の理論はこの Maxwell 方程式を出発点として構築する事が最も合理的な手法である．ここで，Maxwell 方程式を書いて置こう．

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Gauss の法則}) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁荷がない}) \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday の法則}) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 e \mathbf{j} \quad (\text{Ampère-Maxwell の法則}) \quad (1.4)$$

この式では ε_0, μ_0 などを書いているが、今後はすべてそれらは省略している。また、以下の議論では読者が Maxwell 方程式に習熟していると仮定している。実際問題としては、Maxwell 方程式を使いこなすことは至難の業なので、この仮定は一般的には満たされていないものと言えよう。しかし電磁気学の演習問題 (付録 A) を何回か解く事により、いずれある程度、克服できると思われる。

1.1.1 ベクトルポテンシャルの導入

ここでベクトルポテンシャルを導入して Maxwell 方程式を書き直してみよう。まず、4 元のベクトルポテンシャルを $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ としよう。この時、電場 E と磁場 B は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6)$$

と書く事が出来る。この場合、電磁場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej_\mu A^\mu \quad (1.7)$$

と書けている。ここで j^μ は電子の電流密度で $j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j})$ である。また $F^{\mu\nu}$ は場の強さを表し、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.8)$$

と定義されている。この $F^{\mu\nu}$ は具体的に書くと

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

であり、電場と磁場に対応している。Maxwell 方程式 (1.1),(1.2),(1.3),(1.4) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu \quad (1.10)$$

と書き直されている。

この方程式を見ると直ちに気が付く事が一つある。それは『電場 E と磁場 B は電子 (電流密度) が存在する近辺に生成されている』と言う事実である。

この事は電場と磁場を理解する上で非常に重要な意味を持っている。物理的には、電場と磁場はそれ自体が独立して存在している物理量ではないと言う事を意味している。当然の事ではあるが、電場と磁場は電流 j^μ を起点としてそこから測られて関数形が決められている。つまりこれらの物理量は電子が存在する事により始めて生成されている。これは演習問題を自分で解いた人は気が付いている事であろう。

1.1.2 ゲージ不変性

場の強さ $F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換に対して不変である。

$$\bullet \begin{cases} A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \\ \psi \longrightarrow e^{-ie\chi} \psi \end{cases} \quad (1.11)$$

但し、今の場合、 ψ の変換は不要である。ここで χ は変数 (t, \mathbf{r}) に依存している任意の関数である。このため、このゲージ変換を局所的であるという言い方がなされている。これは対称性としては極めて強いものである事は明らかであろう。

1.1.3 Dirac 場の構築

一方、Lagrangian 密度の式 (1.7) はゲージ変換に対して不変ではない。それで Lagrangian 密度がゲージ変換に対して不変であると言う要請をすると Dirac の Lagrangian 密度が求められている。この証明はここでは省略するが付録 E や参考文献 [4, 5] を参照して欲しい。結果を書いて置くと

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

と求められている。ここで m は電子の質量を表している。これが量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度である。

1.2 作用のゲージ不変性

系の対称性を議論する時は，基本的に作用の対称性を計算して調べる事になる．付録 C で解説しているように，作用の変分から運動方程式が求まることから作用が本質的に重要な役割を果たしている事が理解できると思う．

ここでは式 (1.12) から作用を求めて，そのゲージ不変性を議論しよう．今の場合作用 S は Lagrangian 密度を \mathcal{L}_0 として

$$S = \int \mathcal{L}_0 d^4x = \int \left\{ i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} d^4x \quad (1.13)$$

と定義されている．

1.2.1 Global ゲージ不変性

式 (1.13) は次のゲージ変換に対して不変であることが簡単に確かめられる．

$$\psi' = e^{i\theta}\psi \quad (1.14)$$

但し， θ は実定数である．これは Global (大局的) ゲージ変換と呼ばれている．この場合，Noether の定理により，フェルミオンカレント $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ が保存している事が示される．すなわち

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.15)$$

である．

1.2.2 Local ゲージ不変性

ここで作用 S が次の Local (局所的) ゲージ変換

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \quad (1.16)$$

に対してどう振る舞うかを見て行こう．簡単な計算で Local ゲージ変換後

$$S = \int \{ \mathcal{L}_0 + j^\mu\partial_\mu\chi \} d^4x \quad (1.17)$$

となる事がわかる．従って，これは一見，ゲージ χ に依ってしまうように見える．しかしながら，次の恒等式

$$\partial_\mu(\chi j^\mu) = j^\mu\partial_\mu\chi + (\partial_\mu j^\mu)\chi \quad (1.18)$$

を使って式 (1.17) を書き直すと

$$S = \int \{ \mathcal{L}_0 + \partial_\mu(\chi j^\mu) - (\partial_\mu j^\mu)\chi \} d^4x \quad (1.19)$$

となる．ところが右辺第 2 項は Surface integral となり，無限遠方ではカレントがゼロとなるのでこれは積分に寄与しない事がわかる．また，第 3 項はカレント保存則よりゼロとなっている．従って，この作用 S は式 (1.16) の Local ゲージ変換に対して不変となっている事が分かる．この事から，電子の状態関数を

$$\psi' = e^{-ie\chi}\psi \quad (1.20)$$

と変換する必要はない事が理解されるのである．

1.3 電磁場の量子化

光は電磁気学と関係している．しかしこれは電磁気学を超えているので Maxwell 方程式の範囲内で理解する事は出来ない．このため，フォトンの物理学を理解する事がかなり難しくなっている．20 世紀に書かれている電磁気学の教科書と場の理論の教科書の大半はこのフォトンの記述に関しては充分とは言えないものである．特に，Poynting ベクトルが電磁波と関係していると言う記述が良く見られるが，これは勿論，間違いである (付録 D 参照)．電場と磁場は電子が作っている場である事を認識していたら，このような間違いを起こすことはあり得ない事である．フォトン粒子であり，電場や磁場とは全く関係はない．実際，フォトンの状態関数は複素数であるのに対して，電場と磁場は実関数である．この事より電場と磁場は保存系の物理量である．従ってこれらが時間に implicit に依る関数でもエネルギーを失う事はない．

1.3.1 ベクトルポテンシャルは実関数

ここでベクトルポテンシャル A に関して少し考えなければならないポイントがある．それはこの A も実数であると言う事実である．これは勿論，このベクトルポテンシャルから電場や磁場が求められているわけであり，これが実数であることは当然である．しかしこの場合，重大な問題が存在している．それは，実数の物理量は状態関数にはなれないと言う事実である．これは明らかで，自由粒子の状態関数は複素数であることが絶対条件である．実際，自由粒子の状態関数 ψ は

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik \cdot r} \quad (1.21)$$

と書かれていて，その存在確率が $|\psi|^2 = \frac{1}{V}$ と有限となっている．これは自由粒子の存在確率がゼロになってはいけない事に対応している．

それではどうしたらフォトンを記述できるのであろうか？

1.3.2 ベクトルポテンシャルの量子化

光は観測されている物理量であり，それがベクトルポテンシャルで記述されるべきである事もわかっている．それではどうしたら良いのかと言う問い掛けに答えた手法が場の量子化である．ここで，場の量子化とはベクトルポテンシャルをオペレータにするとする事である．これを式で書くと

$$\hat{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx} \right] \quad (1.22)$$

として，その展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$ を演算子と仮定する事である．実際，この $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$ に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (1.23)$$

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad [c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = 0 \quad (1.24)$$

の交換関係式を仮定する事が量子化である．

1.3.3 Fock 空間

この場合，演算子にしたためその演算子がオペレートする状態を用意する必要がある．これを Fock 空間という．この場合，Fock 状態を

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad (1.25)$$

$$c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}|0\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle \quad (1.26)$$

として導入している．最初の式で $|0\rangle$ を真空と定義し，この真空 $|0\rangle$ に $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$ をオペレートして運動量 \mathbf{k} ，偏極 λ をもつフォトンの状態 $|\mathbf{k}, \lambda\rangle$ が生成されている．

1.3.4 フォトンの状態関数

この Fock 空間の導入により，フォトンの状態関数が

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \hat{A}(x) | 0 \rangle = \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx} \quad (1.27)$$

と表されている．この事より，フォトンの状態関数が確かに複素数である事が証明されている．これは非常に重要な進展である．ベクトルポテンシャルは実数であったが，これを自由場で展開してその係数をオペレータにしたのである．そしてこの事により，式 (2.5) の右辺の第 2 項をピックアップすれば，フォトンの状態関数を複素関数にする事ができていると言う事である．

1.3.5 フォトンと電子の相互作用

電子と電磁場が相互作用している量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.28)$$

となっている．ここで相互作用ハミルトニアン H_I は

$$H_I = e \int \bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu d^3x \quad (1.29)$$

である．この場合，フォトンと電子の相互作用は

$$\hat{H}_I = -e \int \bar{\psi}\gamma\psi \cdot \hat{\mathbf{A}} d^3x \quad (1.30)$$

と書く事が出来る．この式からわかるように，フォトンは生成されるか消滅されるかのどちらかが起こるような相互作用となっている．しかもこれは常に電子から直接に生成されている．電子の存在しない真空からフォトンが生成されることは勿論，あり得ない事が良くわかるものである．

1.4 フォトンの運動方程式と偏極ベクトル

自由電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \text{但し, } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.31)$$

である．この方程式はゲージを固定する前の方程式であり，偏極ベクトルに対する最も重要な方程式となっている．この式は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.32)$$

と書き直すことが出来る．ここで

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (1.33)$$

を (1.32) 式に代入すると

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \quad (1.34)$$

が求められる．これが偏極ベクトルに対して制限を付ける方程式となっている．

1.4.1 偏極ベクトルの決定

これを行列で書き直すと

$$\sum_{\nu=0}^3 \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0 \quad (1.35)$$

となる．この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$ の解が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロと言う条件

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (1.36)$$

である．この方程式の解を探してみると

$$k^2 = 0 \quad \text{すなわち, } k_0 \equiv E_k = |\mathbf{k}| \quad (1.37)$$

が解である事が簡単に証明できる．但し，この場合，フォトンに無限小の質量 m_{ph} を仮定すると数学的な問題点がうまく処理できている．これはインフラの発散の処理の時に良く使う手法である．

1.4.2 Lorentz 条件

ここで，この $k^2 = 0$ の式を (1.34) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (\text{Lorentz 条件}) \quad (1.38)$$

の式が得られる．これは QED でよく知られている Lorentz ゲージ固定に対応した式である．しかしこの式は運動方程式から得られておりゲージ固定よりも本質的に重要な条件式である事は明らかである．従って Lorentz ゲージ固定は物理的に許されなく，それ以外のゲージ固定が必要である．例えば，Coulomb ゲージ固定

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0 \quad (1.39)$$

を選ぶとこれから $\epsilon_0 = 0$ となっている．さらには，フォトンの偏極ベクトル $\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$ の自由度は確かに 2 個である事が自然な形で理解されている．

1.4.3 ゲージ固定は自由か？

以下はまだ証明されている事ではないが『ゲージ固定は自由に選ぶことができる』とこれまで考えられてきたと思われるが，恐らくこれは正しくはないであろう．すでに上記で見たように，Lorentz ゲージ固定は許されるゲージ条件ではない．その意味で，少なくとも矛盾なく理解できるゲージ固定条件は『Coulomb ゲージ』を取る事である．従って，理論スキームとしては，それ以外のゲージ固定を選ぶ理由がないので，この Coulomb ゲージ固定で充分であると考えている．

1.5 Dirac 場の量子化

QEDにおいて電子の状態関数をしっかり理解して置く事は、当然のことである。フォトンを考えてみる場合、自由フォトンは観測不可能である。これが電子と相互作用して初めて観測量になっている。ここではDirac場の量子化について簡単に解説しておこう。

1.5.1 Dirac 場の Lagrangian 密度

質量 m を持つ質点に対する自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi$ で与えられる。ここで

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_3^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_4^\dagger(\mathbf{r}, t))$$

であり、また $\bar{\psi}$ は $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ と定義されている。 γ^μ はガンマ行列であり、Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現で具体的に書くと、

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

である。この時、質量 m を持つ自由なフェルミオンの Dirac 方程式は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} - m\beta \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.40)$$

と書かれている。但し

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

1.5.2 Dirac 方程式の自由粒子解

Dirac 方程式は ψ を自由粒子解として

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = u_{\mathbf{p}}^{(s)} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \equiv \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.41)$$

と仮定する． ζ_1 と ζ_2 は 2 成分スピノルである．これを式 (1.40) に代入すると

$$\begin{pmatrix} -m + E & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.42)$$

となりこの行列式がゼロであるという条件より $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ と求まる．

• スピノル解：

これを式 (1.42) に代入すると規格化されたスピノル解

$u_{\mathbf{p}}^{(s)}$ と $v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が求まり

$$u_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

となる．但し $u_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} u_{\mathbf{p}}^{(s)} = v_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} v_{\mathbf{p}}^{(s)} = 1$ ．ここで $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ (但し \mathbf{n} は整数) $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ である． χ_s はスピンの固有関数を表し, $s = \pm\frac{1}{2}$ である．

• 負のエネルギー解の物理：

$v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が負のエネルギー状態 $E = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ のスピノル解でありこれは物理的に意味がある状態として現われている．それは E が固有値であるからである．しかし負のエネルギー状態の存在はそのままでは問題が起こる．それは正のエネルギー状態は必ず負のエネルギー状態に遷移してしまう現象が起こってしまうからである．この困難を克服するために Dirac は物理的真空を新しく定義した．その物理的真空とは負のエネルギー状態はすべて詰まっているという仮定である．こうすると Pauli 原理のため物理的真空は安定となっている．

1.5.3 Dirac 場の量子化

フェルミオン場は必ず、量子化する必要がある。これは Pauli 原理が成り立つようにする必要があるからである。この場合、Dirac 方程式が負のエネルギー解を持っている事と密接に関係している。Dirac は物理的な真空を負のエネルギーが詰まった状態として定義しようと言う事であり、これは Pauli 原理を仮定している。従って、実験的に Pauli 原理が必要であると言う事だけではなく、理論形式の整合性からも Dirac 場の量子化は必須なのである。まず自由粒子解を書こう。これは

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}, s} \frac{1}{\sqrt{L^3}} (a_{\mathbf{n}}^{(s)} u_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - iE_{\mathbf{n}} t} + b_{\mathbf{n}}^{(s)} v_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + iE_{\mathbf{n}} t}), \quad (1.44)$$

となっている。ここで $u_{\mathbf{n}}^{(s)}$ と $v_{\mathbf{n}}^{(s)}$ はスピノル解である。Dirac 場の量子化とは生成・消滅演算子 $a_{\mathbf{n}}^{\dagger(s')}$ と $a_{\mathbf{n}}^{(s)}$ に対して反交換関係を要請する事である。この要請は負のエネルギー解の演算子 $b_{\mathbf{n}}^{(s)}$ と $b_{\mathbf{n}}^{\dagger(s')}$ にも同じように要請している。

1.5.4 反交換関係

生成・消滅演算子 $a_{\mathbf{n}'}^{\dagger(s')}$ と $a_{\mathbf{n}}^{(s)}$ は

$$\{a_{\mathbf{n}}^{(s)}, a_{\mathbf{n}'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}, \quad \{b_{\mathbf{n}}^{(s)}, b_{\mathbf{n}'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \quad (1.45)$$

と言う反交換関係式を満たす必要がある。その他の演算子に対しては例えば、

$$\{a_{\mathbf{n}}^{(s)}, a_{\mathbf{n}'}^{(s')}\} = 0, \quad \{b_{\mathbf{n}}^{(s)}, b_{\mathbf{n}'}^{(s')}\} = 0, \quad \{a_{\mathbf{n}}^{(s)}, b_{\mathbf{n}'}^{(s')}\} = 0 \quad (1.46)$$

などが成り立っている。これが Dirac 場の量子化である。

1.5.5 Pauli 原理

ここで Pauli 原理が成り立っているのかどうかを検証しよう。式 (1.46) から

$$a_{\mathbf{n}}^{(s)} a_{\mathbf{n}}^{(s)} |n\rangle = 0 \quad (1.47)$$

であることがわかる。すなわち、同じ量子状態を持つフェルミオンが2個あると、その状態はゼロになっている事を示している。これが Pauli 原理である。

1.6 何故，繰り込み理論は間違えたのか？

長い間，繰り込み理論が一世を風靡してきた．人々は『繰り込み可能ではない理論は正しい理論体系ではない』とさえ思っていたような気配があったのである．しかしそれにしても何故，このような事が起こってしまったのであろうか？その理由をはっきりさせるのは長年の懸案事項でもあり，ここで簡単にしかし正確に繰り込み理論の体系の不備が何処にあったのかを解説して行こう．

1.6.1 電子のバーテックス補正

繰り込み理論は電子のバーテックス補正に Log の無限大が出てしまった事から理論的な枠組みが考案されたものである．実際，物理的な観測量に発散が出たらこれは困るので，何とか処理しようと大半の人々は考えたのは当然である．それでこの発散の形が電子の自己エネルギーの発散と全く同じであったので，この発散を波動関数を再定義する事により繰り込んでしまおう (Renormalization Scheme) としたのが繰り込み理論である．

しかし一部の物理学者，特に Dirac はこの繰り込みの手法に反対していた．彼は『この発散は理論スキームのどこかに欠陥があるからであろう』と主張していた．[Dirac, AIP Conference Proceedings 74, 129 (1981)] 参照．

1.6.2 Log 発散の原因

観測量に発散が出た時，人々は何故，理論の枠組みにおける問題点を探そうとはしなかったのであろうか？しかしながら電子のバーテックス補正を計算してみるとわかる事であるが，場の理論における摂動計算の手法に問題があるとは到底，考えられない事である．基本的には時間依存の摂動論に従って計算するだけであり，その形式のどこかに問題があるとは思われないのである．

1.6.3 伝搬関数の計算

この場合，バーテックス補正の計算の中でフォトンの伝搬関数を求めるところが出てきている．これは $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ の計算であり，これ自体はそれ程，大変な計算ではない．しかしそこで2個の偏極ベクトルの掛け算の計算が現れるが，これに多少，任意性が出てきてしまうのである．

1.6.4 Feynman の伝搬関数の問題点

当時から最もよく使われていて、ポピュラーな伝搬関数が Feynman の伝搬関数であった。これが標準的になっていた最も大きな理由はそれが単純で取り扱いやすいものであった事に依っていると考えられる。しかしながら、この Feynman の伝搬関数はある重要な条件を満たしていない事が場の理論の教科書 [1, 2] でも指摘されていて、良く知られていた事実でもあったのである。

ここで $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ の結果をもう一度、書いて置こう。これは

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - i\varepsilon} \times \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu \quad (1.48)$$

となっている。従って、伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ は

$$D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu \quad (1.49)$$

と2個の偏極ベクトルの積に比例している。一方、Feynman の伝搬関数は

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} \quad (1.50)$$

と書かれている。この場合、

$$k_\mu D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu}{k^2 - i\varepsilon} \neq 0 \quad (1.51)$$

となっている。ところが一般の伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ [式(1.49)] は Lorentz 条件から

$$k_\mu D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^2 k_\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu = 0 \quad (1.52)$$

を満たす必要がある。従って、Feynman の伝搬関数は重要な条件 (フォトンの運動方程式からの条件式) を満たさないと言う深刻な状況となっている事がわかる。

1.6.5 繰り込み理論では Feynman の伝搬関数を使用!

ところが実際問題として、繰り込み理論で採用されていた伝搬関数は Feynman の伝搬関数なのである。そして、この Feynman の伝搬関数がバーテックス補正の計算における Log 発散の原因である事は計算を自分でチェックして見ればすぐにわかる事である。この事に関しては、一部の物理学者は気が付いていたものと思われる。しかしながら、この問題をきちんと取り上げて、繰り込み理論の問題点を指摘する物理屋はこれまでほとんどいなかったのである。何故であろうか？

1.6.6 電子-電子散乱の T - 行列

Feynman の伝搬関数が標準的なものとして長い間使われてきたが、これには物理的な理由がある。実は Feynman の伝搬関数により、電子-電子散乱の T - 行列が正しく求められていたのである。すなわち、電子-電子散乱の実験結果はこの Feynman の伝搬関数を使用した計算により正しく再現されていたのである。

この事は Feynman の伝搬関数を採用する事に関して、相当強い影響力があったものと思われる。電子-電子散乱の実験をうまく再現しているのだから、これは正しい伝搬関数として利用して良いのであろうと言う楽観的で論理的な飛躍が一般的になってしまったものと思われる。

しかしながら、付録 G で詳しい計算を解説しているように、Feynman の伝搬関数が電子-電子散乱の T - 行列を正しく再現していたのは accidental (偶然) である。実際、散乱過程の電子が on-shell (自由粒子の分散関係式を満たす) であった事が実験を再現できた理由である。これは正しい伝搬関数による電子-電子散乱の T - 行列計算と比較して見ればすぐにわかる事である。すなわち、散乱電子が on-shell つまりは自由電子であると言う事実を利用して Feynman の伝搬関数による散乱 T - 行列を書き直してみると、正しい伝搬関数による電子-電子散乱の T - 行列計算と一致するのである。

1.6.7 レプトンのバーテックス補正

これは非常に重要な問題を示唆している。Feynman の伝搬関数はループが入っているようなダイアグラムには使ってはいけないと言う事である。従って、電子のバーテックス補正のような計算に使うと間違った結果を得てしまうと言う事である。

これで何故、QED の (g-2) 計算には Log 発散が出てしまい、繰り込みが必要となってしまったのかと言う事が明白になったのである。一方、 Z^0 ボソンによるレプトンのバーテックス補正には発散が出ていない。これはその計算において、弱ベクトルボソンの伝搬関数として、Lorentz 条件 (弱ベクトルボソンの運動方程式からの条件式) を満たしている正しい伝搬関数を採用していたからである事が分かっている。これはバーテックス補正の計算過程でその計算を注意深く辿って行けば、発散が消えた理由がわかるものである。いずれにしても、ベクトルボソンの運動方程式を解いた後、そこから出てくる条件式を伝搬関数が満たすべきであると言う事は、物理では最も基本的な事項である。

第2章 量子場の理論の作り方： 弱い相互作用

弱い相互作用の理論模型を作ろうと考える時、当然、Fermi の模型が一つの指針になっている。しかし実際問題としてはこの模型は単純すぎて、実験をうまく記述すると言う事にはならなかった。その後、多くの人々により Conserved Vector Current (CVC) 模型が提唱されて、これは大きな成功を収める事になったのである。従って、量子場の理論の枠組みで弱い相互作用の理論模型を構築しようとする場合、この CVC 理論が基本的な出発点となっている。

2.1 弱い相互作用

量子場の理論において、弱い相互作用の模型を作ろうと考える場合、やはり電磁的な相互作用を参考にする事になる。この場合、電磁的なカレントに対応して、弱い相互作用におけるフェルミオンカレント J^μ が CVC 理論から知られている。これは

$$J^\mu = j_\ell^\mu + j_h^\mu \quad (2.1)$$

と書かれていて j_ℓ^μ, j_h^μ は

$$j_\ell^\mu = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\mu + \dots \quad (2.2)$$

$$j_h^\mu = \bar{\psi}_u \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_d + \bar{\psi}_s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_s + \dots \quad (2.3)$$

となっている。

2.1.1 相互作用の形

ここで、弱い相互作用の形を電磁場と同じように考えるとしたら、その相互作用 Lagrangian の形は式 (2.1) のカレント J_μ に結合させる形で

$$\mathcal{L}_I = g_w J_\mu W^\mu \quad (2.4)$$

となる事が期待される。ここで g_w は結合定数である。この時、 W^μ は弱ベクトルボソンを表している。この場合、フォトンにそっくりであるが、しかし質量を持っているベクトルボソンと言う事になる。

2.1.2 弱ベクトルボソン場の量子化

弱ベクトルボソンは粒子として振る舞う事を想定しているため、このボソン場は量子化される必要がある。これは電磁場の時と同じで、 W^μ は実関数として定義されているので量子化は必須である。この場合、

$$\hat{W}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\mathbf{k}x} + a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} \right] \quad (2.5)$$

として、その展開係数 $a_{\mathbf{k},\lambda}$ と $a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger$ を演算子と仮定する事である。実際、この $a_{\mathbf{k},\lambda}$ と $a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger$ に対して

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (2.6)$$

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad [a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = 0 \quad (2.7)$$

の交換関係式を仮定する。これは電磁場の場合と全く同じ形式となっている。フォトンとの違いとしては弱ベクトルボソンは非常に重い質量を持っている事である。また、質量がある事からこの弱い相互作用にはゲージ不変性はない。

2.2 弱い相互作用の繰り込み理論

Weinberg-Salam 理論は $SU(2) \otimes U(1)$ の非可換ゲージ理論から出発して、対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるというモデルである。このモデルは現在ではその理論的な取扱いが間違いだらけであるため、量子場の理論として受け入れる事は出来ない。しかしながら、Weinberg-Salam モデルの最終的な Hamiltonian は CVC 理論を再現しているため、弱い相互作用の実験事実と矛盾はしていない。その意味では、Higgs 粒子を除いたり、またいくつかの修正を加えれば、利用可能なモデルになりうると考えられる。

2.2.1 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 W^μ の伝播関数を求める事が必要である。この場合、まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [5]。ベクトル場 W^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2W_\mu W^\mu \quad (2.8)$$

で与えられる。ここで

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \quad (2.9)$$

である。この場合、運動方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M^2W^\nu = 0 \quad (2.10)$$

となる。ここで、自由粒子の解

$$W^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (2.11)$$

を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式を求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu)k^\mu = 0 \quad (2.12)$$

となる。この場合、 ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロとなることである。すなわち

$$\det\{(k^2 - M^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (2.13)$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \quad (2.14)$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (\text{Lorentz 条件}) \quad (2.15)$$

が求められる．これは QED では Lorentz ゲージ固定として良く知られている式である．しかし，前章で見たように QED でもゲージ固定とは無関係に同じ式が求められているが，これがゲージ理論とは関係のない弱い相互作用においても運動方程式から導かれたと言う事実は非常に重要である．

これまで何故，この運動方程式 (2.10) を解くと言う作業がなされなかったのでしょうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが，この場合も同じように行列式がゼロ

$$\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0$$

という条件によりエネルギーの分散関係式が求められている．

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

それをもとの Dirac 方程式に代入して Dirac の波動関数が求まっている．

2.2.2 ベクトル場 W^μ の自由度の数

ベクトル場 W^μ は元々 4 個の自由度を持っている．しかしベクトルボソンは粒子として振る舞う場合，その自由度は 3 個である．実際，これは W ボソンとして観測されている．自由度が 1 個減ったのは勿論，式 (2.15) の Lorentz 条件があるからである．QED の場合は，これにゲージ自由度があるため，もう 1 個減って，フォトンの自由度は 2 個であった．

2.3 有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定しよう．出発点となるのはS行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場のT-積が問題となる．ここで，2個のボソン場のT-積は

$$\langle 0|T\{W^\mu(x_1)W^\nu(x_2)\}|0\rangle = i \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (2.16)$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda)$ の形は Lorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (2.17)$$

と決定される．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = - \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (2.18)$$

と一義的に決定される事がわかる．

2.3.1 Green 関数による伝播関数

残念ながら，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものであり，これは Lorentz 条件を満たしていない．何故，このような基本的なところで間違えていたであろうか？この点に関して，詳しい解説はここでは行わない．恐らくその理由としては，これまでの教科書では Green 関数の手法により伝播関数を決めていたからであろう．しかしながら，複数の変数がある場合においては Green 関数の手法が正しい答えを与えるとは限らない事が示されている．

2.4 弱ベクトルボソンによるバーテックス補正

レプトンに対するバーテックス補正に関しては弱ベクトルボソンの効果も考慮する必要がある．事実， Z^0 ボソンはこの補正に効いてくる事は明らかである．

2.4.1 Z^0 ボソンによる電子の $g - 2$

まず電子の $g - 2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算するとこれは

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu} \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi} \left(\frac{m_e}{M_z}\right)^2 \sim 10^{-13}$$

となっている．ここで M_z は Z^0 ボソンの質量である．また α_z は Z^0 ボソンとレプトンとの弱い相互作用の結合定数である．この場合，補正は非常に小さい事が分かり，観測値と矛盾してはいない．

2.4.2 Z^0 ボソンによるミューオンの $g - 2$

一方，ミューオンの $g - 2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算すると

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu} \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi} \left(\frac{m_{\mu}}{M_z}\right)^2 \simeq 8.6 \times 10^{-10}$$

と求まっている．この値は最近の Fermilab によるミューオンの $g - 2$ の実験値と比較する事が出来る．驚いたことに，この理論値は実験値と大きさでは一致している事が分かっている．非常に小さな物理量でもあり，今後，さらなる高精度の実験が行われることを期待したい．

2.5 弱い相互作用の Lagrangian 密度

CVC 理論においては荷電カレントを考えて弱い相互作用の模型を作ったのであるが、これでは不十分であった。一方 Weinberg や Salam 達は SU(2) の模型を考えため中性カレントが自然と導入されたのである。実際、実験的にも中性カレントの存在が確認されている。

それでここでは SU(2) の弱ベクトルボソンを考慮した弱い相互作用の模型を考えて行こう。これは、結果的に標準模型の最終的な Lagrangian 密度に対応している。この場合、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_\ell(i\partial_\mu\gamma^\mu - m^a)\Psi_\ell - gJ_\mu^a W^{\mu,a} + \frac{1}{2}M^2 W_\mu^a W^{\mu,a} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} \quad (2.19)$$

と書かれている。ここで W_μ^a は SU(2) の弱ベクトルボソンを表していて

$$W_\mu^a = (W_\mu^+, Z^0, W_\mu^-) \quad (2.20)$$

である。 M は弱ベクトルボソンの質量を表していて W ボソンの質量は $M \simeq 80 \text{ GeV}/c^2$ であり、 Z^0 ボソンは $M \simeq 91 \text{ GeV}/c^2$ である。この式 (2.19) ではハドロン部分のカレントは省略している。レプトンの状態関数 Ψ_ℓ は 2 成分で書かれていて

$$\Psi_\ell = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\nu \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

となっている。ここで ψ_e と ψ_ν は電子とニュートリノの状態関数である。これに対応して、質量行列 m^a も

$$m^a = \begin{pmatrix} m_e & 0 \\ 0 & m_\nu \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

となっている。またフェルミオンカレント J_μ^a と弱ベクトルボソンの場の強さは

$$J_\mu^a = \bar{\Psi}_\ell\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\tau^a\Psi_\ell, \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a \quad (2.23)$$

と定義されている。

2.5.1 実験の再現性

この弱い相互作用の模型は弱い相互作用に関連するほとんどすべての実験を非常にうまく再現できている。ここではその議論を行わないが、実験の再現性に優れているのはすでに CVC 理論模型で確認されていた事である。但し、前述したように中性カレント関連の実験は SU(2) を導入した事の成果であることは間違いない。

第3章 量子場の理論の作り方： 重力

量子場の理論で重力の理論模型を作ろうとしたら，その重力場はスカラー場である事が必須である．これは場の理論においては，スカラー場のみが常に引力を与える場である事に依っている．さらにこのスカラー場は massless である必要がある．重力ポテンシャルの形が $1/r$ であるからである．この条件下で重力理論を作って行こう．そして，この massless のスカラー場を \mathcal{G} と表記しよう．

3.1 重力

重力の場の理論を作ろうとする場合，その出発点に massless のスカラー場 \mathcal{G} を考える事になる．ゲージ場ではその電荷によって引力にも斥力にもなってしまう，常に引力である重力理論を作る事は出来ない．一方，スカラー場の交換による力は常に引力であることは良く知られている事実である．

3.1.1 重力場 \mathcal{G} と結合する項

まず，最も信頼できる QED の Lagrangian 密度を見てみよう．

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_{\mu}\gamma^{\mu}\psi - e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu} - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

この Lagrangian 密度の中でスカラー場 \mathcal{G} と結合できる項はあるだろうか？この問い掛けに対する答えは簡単である．質量項ならば，スカラー場 \mathcal{G} と結合する事ができる．そして確かに，この項のみが候補である．

3.1.2 重力場を含む Lagrangian 密度

ここで，具体的な Lagrangian 密度を書いておこう．質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 \mathcal{G} と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \quad (3.2)$$

と書かれている．ここで右辺の最後の項は重力場の運動エネルギーを示している．この場合，QED を尊重する限り，それ以外の可能性はないので，重力の量子場の理論は一義的に決まってしまうのである．

3.2 重力場の性質

重力場の性質を議論する前に，QED と重力場を含む全 Hamiltonian を書いて置こう．運動方程式を導出したり，対称性の議論をする場合は，Lagrangian 密度の方が便利である．しかしある種の性質，例えば相互作用の形などは Hamiltonian の方が見やすい場合が多くあると言える．

$$H = \int \left\{ \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m(1 + g\mathcal{G}))\psi - e\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \right\} d^3r + \frac{\alpha}{2} \int \frac{j_0(\boldsymbol{r}')j_0(\boldsymbol{r})d^3rd^3r'}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} + \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right)^2 + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})^2 \right] d^3r + \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + (\boldsymbol{\nabla} \mathcal{G})^2 \right] d^3r \quad (3.3)$$

ここで $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ である．

3.2.1 静的な振る舞い

ここで重力は基本的に静的な性質が主であるとしよう．これは仮定であるが近似ではない．この場合，重力場 $\mathcal{G}_0(\boldsymbol{r})$ は

$$\mathcal{G}_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{mg}{4\pi} \int \frac{\rho_g(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|} d^3r' \quad (3.4)$$

となる．ここで ρ_g は密度分布である．

3.2.2 重力場の相互作用エネルギー

ここで重力場の相互作用エネルギー H_G を見てみよう．この場合，

$$H_G^S = mg \int \rho_g \mathcal{G}_0 d^3r + \frac{1}{2} \int (\nabla \mathcal{G}_0)^2 d^3r = -\frac{m^2 G}{2} \int \frac{\rho_g(\mathbf{r}') \rho_g(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3r d^3r' \quad (3.5)$$

となっている．ここで $G = \frac{g^2}{4\pi}$ は通常使われている重力定数である．この式から，重力エネルギーは常に引力となっている事がわかる．この式をクーロンエネルギー H_C と比較して見よう．クーロンエネルギーの場合，

$$H_C = \frac{\alpha}{2} \int \frac{j_0(\mathbf{r}') j_0(\mathbf{r}) d^3r d^3r'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (3.6)$$

となっている．これは，同じ分布関数を持って来ているので斥力となっている．

3.3 重力場の方程式

重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる．この方程式は時間による方程式になっているが，外場である物質場が時間によらない場合は，重力場に静的な振る舞いを仮定する事が出来る．この場合，重力場 \mathcal{G}_0 に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g \quad (3.7)$$

と求められる．この時， $m\rho_g$ は物質の密度に対応する．結合定数 g は重力定数と $G = \frac{g^2}{4\pi}$ により結びついている．これは，基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて，確かに観測されている重力場を再現している．

ここで，質量 m の質点に対して，重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式を書いて置こう．今の場合，重力場が質量 M の原子核によって作られる事を考えると Dirac 方程式は

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi \quad (3.8)$$

となる．これが水素型原子において重力場まで考慮した Dirac 方程式である．

3.4 Foldy-Wouthuysen 変換

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \right] \Psi = E\Psi \quad (3.9)$$

と求められた事より、その非相対論極限の方程式を求めて行こう。この場合、重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H = -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \quad (3.10)$$

で与えられている。この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して、非相対論的な Hamiltonian を求めよう。この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリ変換なので、常に信頼できるものである。その結果だけ書くと、

$$H = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \quad (3.11)$$

となる。この計算は必ず、自分でやってみる必要がある。恐らく、誰がやっても何回か間違えてしまい、なかなか正しい答えにはたどり着けないものと思われる [1]。

3.4.1 古典近似

ここで上記の Hamiltonian のうち、右辺第4項の $\left(\frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 \right)$ に対してさらに近似を進めて行こう。今の場合、古典力学の方程式に興味があるので、次のような因数分解仮説を採用しよう。

$$\left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \right\rangle \langle \mathbf{p}^2 \rangle \quad (3.12)$$

この場合、古典的なので中間状態はほとんど効いてこないと考えられる。従って、これはかなり良い近似であると言えよう。さらに、Virial 定理

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = -\langle V \rangle \quad (3.13)$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (3.14)$$

と求まっている．第 2 項が新しい重力の補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限で新しい項は出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を含めた様々な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているため，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

3.4.2 非相対論近似式の直感的導出

電磁場と重力場がある場合の Dirac の Hamiltonian を非相対論近似して大まかな形を推測して置く事は，色々な意味で無駄ではないと思われる．特に，エネルギーの項に入っているクーロンポテンシャルは非相対論極限の影響を何故，受けないのかと言う事も直感的に理解したいものである．

以下の手法は必ずしも正しい答えを与えるとは限らないが，見通しは良い方法なので，簡単に解説しておこう．まず，エネルギーの分散関係式から始めよう．これは

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \quad (3.15)$$

である．ここでクーロン場 ϕ ，重力場 \mathcal{G} そしてベクトルポテンシャル \mathbf{A} がある場合を考えて行こう．この場合，

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - e\phi \\ m &\rightarrow m + mg\mathcal{G} \\ \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.16)$$

と変換される．これよりエネルギーの分散関係式は

$$E - e\phi = \sqrt{(m + mg\mathcal{G})^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} \quad (3.17)$$

と変更される事になる．ここで m が十分大きいとして非相対論の極限をとると

$$E - e\phi = m \left[1 + g\mathcal{G} + \frac{(g\mathcal{G})^2}{2} + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m^2} + \dots \right] \quad (3.18)$$

となっている．ここでは水素型原子を考えて見よう．この時

$$\phi = -\frac{Ze}{r}, \quad \mathcal{G} = -\frac{gM}{r} \quad (3.19)$$

である．これを式 (3.18) に代入して，また E を H とすると

$$H = m - \frac{Ze^2}{r} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \dots \quad (3.20)$$

となっている．ここでは $G = g^2$ としていて 4π は現れない表示を取っている．ちなみに $\alpha = e^2$ でもある．この計算法はかなり大雑把なものではあるが，経験的に言えば基本的には正しい方向を示している．特に，クーロンポテンシャルが何故，非相対論極限を取っても影響を受けなかったのかが良くわかるものと思う．また，重力の付加ポテンシャルが斥力で出てくる理由も簡単に理解されるものである．

3.5 新しい重力理論の予言

新しい重力理論において，重力ポテンシャルに重力付加ポテンシャルが現われている．これはこれまでの重力ポテンシャルが変更を受けたと言う意味で非常に重要な項である．これは非常に小さい効果ではあるが，しかし実際の観測に掛かる程度の大きさではある．この大きさは簡単に評価する事ができる．今の場合，相対論的效果は大雑把に言って $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8}$ である．これは地球の公転に対しての問題であり，光速 c と地球の公転速度 ($v \sim 10^{-4}c$) を入れれば求められる．一方，地球の公転によるうるう秒の効果 ($\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$) も，ともに丁度，相対論的效果の大きさそのものである．従って，直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は，至極当然の事と納得できるものである．

3.5.1 重力付加ポテンシャルは非可積分

新しい重力理論においては，通常の重力ポテンシャルに加えて新しい重力付加ポテンシャルが導出されたため，重力ポテンシャルは全体で

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (3.21)$$

と書かれている [5]．右辺の第2項が重力付加ポテンシャルである．ここで G と c は重力定数と光速， M は重力中心の質量，そして m は回転物体の質量である．

この場合の Newton 方程式はすぐに解くことができるのであるが，実はこの重力付加ポテンシャルは非可積分であることが知られている．この非可積分ポテンシャルは物理的には容認できない解を与える事が知られている．このためこのポテンシャルの取り扱いに注意が必要である．実際問題としては，この項は摂動論的に計算される必要がある事が分かっている．付録H参照．

3.5.2 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \quad (3.22)$$

となる．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (3.23)$$

と書かれている．この式で R は平均軌道半径， ω は角速度で Newton 周期 T と $\omega = \frac{2\pi}{T}$ と結びついている．この事より，重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (3.24)$$

である [4, 5]．式 (3.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である．この式より，正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している．

3.5.3 地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R ，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (3.25)$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って 1 年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{\text{Orbital Motion}} = 0.621 \text{ s/year} \quad (3.26)$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は 1972 年 6 月から始まりこれまで 40 年間に 25 秒補正している．従って 1 年間での観測値は

$$\Delta T_{\text{Orbital Motion}}^{\text{Obs}} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (3.27)$$

である．これは式 (3.26) の理論値と完全に一致している．

3.5.4 うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [16] . すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり、これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる .

第4章 量子場の理論の作り方： 強い相互作用 (QCD)

強い相互作用はその取扱いが非常に難しくここで有意義な解説が出来るとは到底、思えないものである。それで、どうしても感想のレベルになってしまうが、それでも出来るだけの解説はして見よう。現象として知られているのは原子核物理関連での核力などである。この記述には現象論的な核力をボソン交換力などによって、理解しようとしている。そしてこの分野ではそれなりの成功を収めたと考えて良いと思われる (付録 F 参照)。しかしながら、強い相互作用を記述する理論模型は量子色力学 (Quantum Chromodynamics) であると考えられているし、自分もそう思っている。しかしこの QCD は非常に奇妙な理論体系となっている。それでここではその難しさだけを解説する事になっているように思われるが、説明して行こう。

4.1 量子色力学 (QCD)

量子色力学 (QCD) を解説することは相当、難しいものである。観測量の計算がほとんど不可能である事が主な原因である。場の理論においては、すべて摂動論を基礎にして計算を行っている。この理由は勿論、自由粒子の場は厳密に解けているため、これをベースにして摂動論を展開すればよい事が分かっているからである。電磁場の相互作用、弱い相互作用そして重力とすべて摂動計算が可能である。ところが、強い相互作用である QCD はこれらとは基本的に異なっている。結合定数が大きいから展開が収束しないと言うレベルの困難ではないのである。QCD においては、自由場が存在しないのである。これは自由場の Lagrangian 密度がゲージ不変ではない事が主な原因である。そして構成粒子であるクォークが自由粒子としては存在していないと言う事が実験的にも確認されている。

また、QCD は QED と比べてその群論的な構造が格段に複雑になっている。SU(3) の取り扱いはかなり面倒な計算を必要としている。それでここではまず、QCD の Lagrangian 密度を書いてそれに関する幾つかの性質について解説して行こう。

4.1.1 量子色力学の Lagrangian 密度

強い相互作用を記述する理論は量子色力学 (QCD) である．これはクォークとグルオンの相互作用による $SU(3)$ カラーの非可換ゲージ理論である．6種類のクォークが存在し，それぞれが3つのカラー自由度を持っていて，8つのカラー自由度を持つグルオンにより相互作用している系である [6]．バリオンは3つのクォークから出来ていて，メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である．この模型は基本的には正しいと考えられる．ここでは詳しい記述はしないが，その模型の持つ良い点と問題点を議論したい．まずは Lagrangian 密度を書いて，その性質を簡単に見て行こう．QCD の Lagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \quad (4.1)$$

と書ける．ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (4.2)$$

で与えられている．またグルオン場 A_μ は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \quad (4.3)$$

である．この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \quad (4.4)$$

を満たしている．また， C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている．この Lagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である．

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with } \chi = T^a\chi^a \quad (4.5)$$

$$A_\mu'^a = A_\mu^a - gC^{abc}A_\mu^b\chi^c + \partial_\mu\chi^a \quad (4.6)$$

ただし， χ は， $\chi = \chi(t, \mathbf{r})$ の任意の関数であるが，無限小であるとする．

4.2 クォークのカラー電荷

Lagrangian 密度 [式 (4.1)] はゲージ変換に対して不変である。しかし、クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ のカラー電荷はゲージ不変ではない。ここでクォークのカラーカレント j_μ^b は

$$j_\mu^b = \bar{\psi} \gamma^\mu T^b \psi \quad (4.7)$$

である。このクォークのカラーカレント j_μ^b に対してゲージ変換

$$\psi' = (1 - igT^a \chi^a) \psi \quad (4.8)$$

を行うと

$$j_\mu^{b'} = \bar{\psi}' \gamma^\mu T^b \psi' = \bar{\psi} (1 + igT^a \chi^a) \gamma^\mu T^b (1 - igT^a \chi^a) \psi \quad (4.9)$$

$$\neq \bar{\psi} \gamma^\mu T^b \psi \quad (4.10)$$

となり、これはゲージ変換に対して不変ではない事がわかる。すなわち、クォークのカラー電荷がゲージに依ってしまうため、これは観測量にはならないという事である。従って、これらのカラー電荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないと言う事実である。実際、クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが、これは保存量にはなっていない。

4.2.1 クォークの閉じ込め

つまり、クォークのカラー電荷は時間によってしまい、物理的な観測量にはならない事を意味している。そして、それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものである。実際、クォークは動力的に閉じ込められているわけではなく、運動学的に閉じ込められているので、その閉じ込めは絶対的なものであると言える。

4.3 自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性

クォークとグルオンのカラー電荷がゲージに依ってしまう事、およびクォークとグルオンのそれぞれの自由 Lagrangian 密度がゲージ依存である事の証明はそれ程難しくはない。しかしこれは明らかに非常に重要な事である。ところが、この事を指摘している教科書はあまり知られていない。実際、印牧誠司氏の修士論文(2007年)がこの自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性を最初に明らかにした論文のように見える。これが本当だとしたら事態はかなり深刻である事を意味している。

4.3.1 摂動論が定義できない！

クォークとグルオンの自由場が存在しないという事実は非常に重大であり、理論的な模型計算に大きな影響を及ぼしてしまう事になる。結論を先に言うと、この模型は全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に、解く方法が存在しない事が証明される。

4.3.2 QCD の摂動論

QED もそうであったように、4次元量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている。それ以外解けない事が最も大きな理由である。この摂動論の場合、その基本戦略は全ての観測量を自由場の言葉で書きたいと言う事である。例えば、QED の場合は、自由電子の状態と自由フォトン状態の言葉で全ての観測量を表現している。ところが、QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため、QCD における観測量は何かという事が問題になってくる。自由クォークの状態が存在しない限り、物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である。これは摂動論が使えないためどんな物理量が計算できるかわからないという事を意味しており、実情は想像以上に深刻であり、全くのお手上げ状態になっている。実際、QCD における理論的な発展は、この30年間ほとんどないのである。

4.4 QCD における観測量

それでは、何故 QCD が正しい理論体系であると信じているのであろうか？これにはきちんとした理由がある。最大の理由は実験的なサポートである。これは一体どういう事であろうか？クォークが観測量では無いのに、どうしてクォークの事がわかるのであろうか？これは実は簡単で、クォークには電氣的な電荷があるからである。例えば、 u クォークはその電荷が $\frac{2}{3}e$ 、 d クォークは $-\frac{1}{3}e$ であるとして実験的に矛盾が無い。すなわち、クォークの電磁氣的なカレントは保存量となっており、従って電磁氣的なプローブで陽子を研究すれば、確かにクォークが反応して様々な物理的な観測量を出しているのである。

4.4.1 陽子・中性子の磁気能率

クォーク模型によるバリオンの電磁氣的な模型計算はこれまで数多く実行されている。なかでも、核子の磁気能率は実験と理論が見事に合う例として、しばしば引用されている。そして、その物理的な根拠は十分しっかりしているのである。バリオンの構造が QCD の模型により全く解かれていないのに、どうして磁気能率だけは理論的に信頼できる計算ができてしまうのかと言う疑問に対して、答えは簡単である。例えば、陽子の磁気能率は大雑把に言って

$$\mu = \mu_0 \sum_{i=u,u,d} e_i \sigma_i = \mu_0 e \left(\frac{2}{3} \sigma_{u_1} + \frac{2}{3} \sigma_{u_2} - \frac{1}{3} \sigma_d \right) \quad (4.11)$$

と書く事が出来る。ここで、 $e_u = \frac{2}{3}e$ と $e_d = -\frac{1}{3}e$ は u クォークと d クォークの電荷を表している。 μ_0 は典型的なスケール量を表し、例えば非相対論ならば、クォークの質量を m として $\mu_0 = \frac{1}{2m}$ となっている。いずれにせよ、この模型で陽子と中性子の磁気能率を計算すると

$$\mu_p = \mu_0, \quad \mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0 \quad (4.12)$$

となり、この2つの比を取って実験と比較すると

$$\left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{theory} = -1.5, \quad \left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{exp} = -1.46 \quad (4.13)$$

となり、恐ろしいほど良く一致している。この理由は明らかで、磁気能率が動径部分の波動関数に依っていない事が最も重要な事である。このため、クォークが陽子内部

でどの様な運動をしていようが，基本的に言って，クォークのスピン の性質に支配されているので，陽子と中性子の磁気能率の比は非常に上手く記述されているのである．この事は確かにクォーク模型が正しいと考えて良い事を示している．

4.4.2 クォークのカラー数

クォークのカラー電荷が保存量ではない事から，QCD 相互作用の取り扱いの難しさについて述べたが，それではクォークのカラー数はどのようにして検証されたのであるのか？これは再び電磁的な相互作用を用いている．良く知られている

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{all hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (4.14)$$

の実験値からクォークのカラー数が3である事がわかる．それは，この比にはクォークのカラーの自由度が現れるからである．従って，クォークの動力学を研究する事は，非常に難しいのであるが，クォークのある種の性質は電磁気的方法で調べる事が出来る事を示している．

4.4.3 $e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象

実験的に $e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象が知られている．これはQCD でよく理解できるのであろうか？この実験の際，ハドロン内部において $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ が起きている事は確かであろう．この過程は電磁気的なものなので，正確にわかっている．ところが，その後どうなるのかと言う事が全くわからない．クォークがハドロンから外に出て自由になると言う事が物理的に記述できないからである．それは既に議論したようにクォークのカラー電荷がゲージによるため観測量でないと言う事と関係している．

それではこの Jet の現象はどのように理解できるのであろうか？実験的にもクォークが大きな運動量を瞬間的に得た事は事実である．しかし，クォークは自由になれない．従って，ハドロンになって行くしか他に仕様が無いのである．生成されたハドロンは反応過程においてエネルギーと運動量の保存則だけは満たしている必要がある．よって，これは同じ方向に基本的にはハドロンが生成された現象，すなわち Jet の現象が観測されたのであると考えられる．実験的には2 Jet が主であるが，3 Jet や4 Jet も観測されている．ハドロン内部でクォーク同士がどのような相互作用をするのかの具体的な描像が作れていない段階では，これ以上の物理的なコメントが出来ない．特に，摂動論が定義できていないからには，直感的な描像が作りきれないのである．

付録 A 電磁気学の習熟法

ここでは電磁気学に少しでも慣れて貰うために、幾つかの演習問題を抽出している。これは、どのような演習問題を解いて見る事が重要であるかという観点から問題を選んでいる。この問題集を何回か解いて見ると少しずつ電磁気学が分かってくるものと期待している。

A.1 電場

まずは電場関連の基礎的な問題を集めている。この問題を解く事はそれ程、難しいとは言えないが、しかし独力で解こうとするとかなり時間が掛かるものと思われる。

問1 静電場 E が $E = -\nabla\phi$ と書けるためにはどのような条件が必要か？

問2 全空間では電荷保存の式 $\frac{dQ}{dt} = 0$ が成り立つ。この事を連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

を用いて証明せよ。ただし、 $Q = \int \rho d^3r$ 。

問3 Maxwell 方程式は時間反転に対して不変である事を示せ。但し、時間反転： $t \rightarrow -t$ に対して $E \rightarrow E$, $B \rightarrow -B$ となっている事を使ってよい。

問4 電気双極子 p が点 R にある時、そこから十分離れた点 r に電気双極子が作る電位と電場を求めよ。

問5 半径 R の球の表面上に一様な面電荷密度 σ で電荷が分布している。この電荷が球内に作る電場がゼロであることを (a) 電位 ϕ を計算する (b) Gauss の法則で電場を計算するのそれぞれの方法により証明せよ。

問6 半径 R の球内に一様な密度 ρ_0 で電荷が分布している．この電荷が球内に作る電場を (a) 電位 ϕ を計算 (b) Gauss の法則で計算 の2つの方法により求めよ．

問7 電荷分布 ρ が1次元分布の時 Poisson 方程式は $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$ と書ける．電位 ϕ に対する境界条件として $\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ (接地された導体) とする．この時 Poisson 方程式を $0 \leq x \leq 1$ の範囲で解きたい．まず, $\frac{d^2G(x,x')}{dx^2} = \delta(x-x')$ を満たし, 電位 ϕ と同じ境界条件を満たす Green 関数 $G(x, x')$ を求めよ．次に一様な電荷密度 ρ_0 を持ち $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{1-d}{2} \\ \rho_0 & \frac{1-d}{2} \leq x \leq \frac{1+d}{2} \\ 0 & \frac{1+d}{2} < x < 1 \end{cases} \quad \text{の時, 電位 } \phi(x) \text{ を求めよ. } d \text{ は定数.}$$

問8 点電荷 q の作る電場は $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ であり, この電場のエネルギー U は無限大である事を示せ．この物理的意味は何か?

問9 電荷 q , 質量が m の Lagrangian は $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}, t)\}$ であった．この Lagrangian は次のゲージ変換

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

に対して不変である事を証明せよ．但し \mathbf{r} は時間の関数であるとして, 次の公式

$$\frac{d\chi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

を使ってよい．

A.2 磁場

ここでは磁場と関係している問題を集めているが、これを独力で解く事は容易な事ではない。しかしこれが解けない限り、電磁気学の全体像を把握して、量子電磁力学に進むことは難しいであろうと考えている。

問1 オームの法則 $j = \kappa E$ は時間反転不変性を破っている事を証明せよ。

問2 導体中ではオームの法則 $j = \kappa E$ が成り立っているとする。この時、Gauss の法則 $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ が成立しているとする。導体内の電荷密度は $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{\epsilon_0}{\kappa}$ と減少する事を示せ。

問3 直線電流 J が作る磁場 B を Ampère の積分形により計算する時、まずは直線と直行する $x-y$ 平面を考えて行く。電流を z -軸にとるためそこが $x-y$ 平面の原点となる。ここで半径 r の円を考える。この時、2次元平面での極座標では $r = r e_r$, $dr = r e_\theta d\theta$ となる。この時、Ampère の法則 $\oint_r B \cdot dr = \mu_0 J$ から磁場 B を求めよ。但し $B_\theta = B \cdot e_\theta$ である。

問4 電子の磁気双極子モーメント μ は角運動量 L とスピン s に関係していて $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}(2s + L)$ と書かれている。円電流が磁気双極子モーメントと関係している物理的な理由は何だと思うか？

問5 中心を原点におき $x-y$ 平面内にある半径 a の円形コイルに電流 J を流した時、(a) z -軸上の磁束密度 (b) 原点から十分はなれた点 r における磁束密度 を求めよ。

問6 磁気双極子モーメント m と磁場 B との相互作用エネルギー U は $U = -m \cdot B$ である。このエネルギーと Zeeman 効果の相互作用との関係を論ぜよ。

- 問 7 Meissner 効果についてその現象が起こる物理的なメカニズムを定性的に解説せよ。
- 問 8 水素原子の模型として $+e$ の電荷の陽子の周りに $-e$ の電荷を持つ電子が半径 $r = 0.53 \times 10^{-8} \text{cm}$ の円運動をしているとする。Newton 力学を用いて電子の速度 v を r で表せ。次に電子の電流 J を求めよ。
この問題で水素原子の磁気双極子モーメント $\mu = \mu_0 S J$ を計算せよ。また電子の運動により陽子にどれだけの磁場ができていますか？
- 問 9 インダクタンス L は物理的にどのような量として定義されているか？静電容量 C や電気抵抗 R と比べながら論じよ。
- 問 10 長さ ℓ の同軸ケーブルの中心導体 (半径 a , 透磁率 μ) に電流 J が流れ、外部導体 (半径 $b (> a)$) には電流 $-J$ が流れている。この時、この同軸ケーブルの自己インダクタンス L を求めよ。
- 問 11 変位電流 j_d の定義を書き、それが何故 Maxwell 方程式に必要であったかを論ぜよ。
- 問 12 Poynting ベクトル $S = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ は散逸物理量ではない。この事を Poynting ベクトルが生じる例をあげて保存系の物理量である事を示せ。
- 問 13 電場と磁場のエネルギーを $U = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) d^3r$ とする時、仕事率 $W = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d^3r$ は $W = -\frac{dU}{dt} - \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r$ となる事を示せ。
- 問 14 電気容量 C のコンデンサーとインダクタンス L からなる回路は保存系であり、電気容量 C のコンデンサーと電気抵抗 R からなる回路は非保存系である。何故だと思えるか？
- 問 15 中性粒子は電場の影響を受けないため、通常はそのトラップが難しい。磁気的な力で、どのようにトラップできるか (磁気トラップ) 解説せよ。

問15 容量 C のコンデンサーと抵抗 R を直列につないでそれに電位差 V を与えた
としよう．コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮
定しよう．

(a) この時コンデンサーの電場 E とその容量 C は $E = \frac{V}{d}$, $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$ となる
事を示せ．

(b) 回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \left(\text{但し } J = \frac{dQ}{dt} \right)$$

となる事を示せ．

(c) この時，円筒表面 ($r = a$) での Poynting ベクトル S は

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\epsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 r V}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

となる事を示せ．

(d) また，Poynting ベクトルのエネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi ad} 2\pi ad = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{A.1})$$

となることを示せ．

付録B Notations in Field Theory

In field theory, we often employ special notations which are by now commonly used. In this Appendix, we explain some of the notations which are particularly useful in field theory.

B.1 Natural Units

We employ the natural units because of its simplicity

$$\bullet c = 1, \quad \hbar = 1. \quad (\text{B.1})$$

To get the right dimensions out, we should make use of

$$\bullet \hbar c = 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}. \quad (\text{B.2})$$

For example, pion mass and its Compton wave length become

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}/c^2 \\ \bullet \frac{1}{m_\pi} = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{140 \text{ MeV}} \simeq 1.4 \text{ fm}. \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

The fine structure constant α is expressed by the coupling constant e which is defined in some different ways :

$$\bullet \alpha = e^2 = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.036}.$$

- **Masses of electron, muon and proton :**

$$\left(\begin{array}{l} \text{Electron mass : } m_e = 0.511 \quad MeV/c^2 \\ \text{Muon mass : } m_\mu = 105.66 \quad MeV/c^2 \\ \text{Proton mass : } M_p = 938.28 \quad MeV/c^2 \end{array} \right) .$$

- **Bohr radius:** $a_0 = \frac{1}{m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$

$$\bullet \text{ Magnetic moments: } \left(\begin{array}{l} \text{Electron : } \mu_e = 1.00115965219 \quad \frac{e\hbar}{2m_e c} \\ \text{Muon : } \mu_\mu = 1.001165920 \quad \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \\ \text{Proton : } \mu_P = 2.7928473446 \quad \frac{e\hbar}{2M_p c} \end{array} \right) .$$

B.2 Hermite Conjugate and Complex Conjugate

For a complex c-number A

$$A = a + bi \quad (a, b : \text{ real}). \quad (\text{B.4})$$

- **Complex conjugate A^* :**

$$A^* = a - bi. \quad (\text{B.5})$$

- **Matrix A**

If A is a matrix, we define the hermite conjugate A^\dagger

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*. \quad (\text{B.6})$$

- **Differential Operator \hat{A}**

If \hat{A} is a differential operator, then the hermite conjugate can be defined only when the Hilbert space and its scalar product are defined. For

example, suppose \hat{A} is written as

$$\hat{A} = i \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{B.7})$$

In this case, its hermite conjugate \hat{A}^\dagger becomes

$$\hat{A}^\dagger = -i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T = i \frac{\partial}{\partial x} = \hat{A} \quad (\text{B.8})$$

which means \hat{A} is Hermitian. This can be easily seen in a concrete fashion since

$$\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger(x) \right) \psi(x) dx = \langle \hat{A} \psi | \psi \rangle, \quad (\text{B.9})$$

where $\psi(\pm\infty) = 0$ is assumed. The complex conjugate of \hat{A} is simply

$$\hat{A}^* = -i \frac{\partial}{\partial x} \neq \hat{A}. \quad (\text{B.10})$$

- Field ψ :

If the $\psi(x)$ is a c-number field, then the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$ is just the same as the complex conjugate $\psi^*(x)$. However, when the field $\psi(x)$ is quantized, then one should always take the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$. For the complex conjugate of the field $\psi^*(x)$, we may examine the time reversal invariance later.

B.3 Scalar and Vector Products (Three Dimensions) :

- Scalar Product

For two vectors in three dimensions

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3) \quad (\text{B.11})$$

the scalar product is defined

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \sum_{k=1}^3 x_k p_k \equiv x_k p_k, \quad (\text{B.12})$$

where, in the last step, we omit the summation notation if k is repeated twice.

• Vector Product

The vector product is defined as

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv (x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1). \quad (\text{B.13})$$

This can be rewritten in terms of components,

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k, \quad (\text{B.14})$$

where ϵ_{ijk} denotes anti-symmetric symbol with

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, \quad \text{otherwise} = 0. \quad (\text{B.15})$$

B.4 Scalar Product (Four Dimensions)

For two vectors in four dimensions,

$$x^\mu \equiv (t, x, y, z) = (x_0, \mathbf{r}), \quad p^\mu \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = (p_0, \mathbf{p}) \quad (\text{B.16})$$

the scalar product is defined

$$x \cdot p \equiv Et - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = x_0 p_0 - x_k p_k. \quad (\text{B.17})$$

This can be also written as

$$x_\mu p^\mu \equiv x_0 p^0 + x_1 p^1 + x_2 p^2 + x_3 p^3 = Et - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = x \cdot p, \quad (\text{B.18})$$

where x_μ and p_μ are defined as

$$x_\mu \equiv (x_0, -\mathbf{r}), \quad p_\mu \equiv (p_0, -\mathbf{p}). \quad (\text{B.19})$$

Here, the repeated indices of the Greek letters mean the four dimensional summation $\mu = 0, 1, 2, 3$. The repeated indices of the roman letters always denote the three dimensional summation throughout the text.

B.4.1 Metric Tensor

It is convenient to introduce the metric tensor $g^{\mu\nu}$ which has the following properties

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

In this case, the scalar product can be rewritten as

$$x \cdot p = x^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = Et - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}. \quad (\text{B.21})$$

B.5 Four Dimensional Derivatives ∂_μ

The derivative ∂_μ is introduced for convenience

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (\text{B.22})$$

where the lower index has the positive space part. Therefore, the derivative ∂^μ becomes

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (\text{B.23})$$

B.5.1 \hat{p}^μ and Differential Operator

Since the operator \hat{p}^μ becomes a differential operator as

$$\hat{p}^\mu = (\hat{E}, \hat{\mathbf{p}}) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) = i\partial^\mu \quad (\text{B.24})$$

the negative sign, therefore, appears in the space part. For example, if we define the current j^μ in four dimension as

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}), \quad (\text{B.25})$$

then the current conservation is written as

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{i} \hat{p}_\mu j^\mu = 0. \quad (\text{B.26})$$

B.5.2 Laplacian and d'Alembertian Operators

The Laplacian and d'Alembertian operators, Δ and \square are defined as

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{B.27})$$

$$(\text{B.28})$$

$$\text{square} \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (\text{B.29})$$

B.6 γ -Matrices

Here, we present explicit expressions of the γ -matrices in two and four dimensions. Before presenting the representation of the γ -matrices, we first give the explicit representation of Pauli matrices.

B.6.1 Pauli Matrices

Pauli matrices are given as

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Below we write some properties of the Pauli matrices.

B.6.2 Representation of γ -matrices

(a) Two dimensional representations of γ -matrices

• Dirac :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

• Chiral :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

(b) Four dimensional representations of gamma matrices

• Dirac :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{B.33})$$

• Chiral :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

where

$$\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (\text{B.35})$$

• Hermiticity

$$\sigma_1^\dagger = \sigma_1, \quad \sigma_2^\dagger = \sigma_2, \quad \sigma_3^\dagger = \sigma_3.\quad (\text{B.36})$$

• Complex Conjugate

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \sigma_2^* = -\sigma_2, \quad \sigma_3^* = \sigma_3.\quad (\text{B.37})$$

- **Transposed**

$$\sigma_1^T = \sigma_1, \quad \sigma_2^T = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \sigma_3 \quad (\sigma_k^T = \sigma_k^*).$$
 (B.38)

- **Useful Relations**

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k,$$
 (B.39)

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k.$$
 (B.40)

B.6.3 Useful Relations of γ -Matrices

Here, we summarize some useful relations of the γ -matrices.

- **Anti-commutation relations**

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0.$$
 (B.41)

- **Hermiticity**

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_k^\dagger = -\gamma_k), \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5.$$
 (B.42)

- **Complex Conjugate**

$$\gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2, \quad \gamma_3^* = \gamma_3, \quad \gamma_5^* = \gamma_5.$$
 (B.43)

- Transposed

$$\gamma_\mu^T = \gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0, \quad \gamma_5^T = \gamma_5. \quad (\text{B.44})$$

B.7 Transformation of State and Operator

When we transform a quantum state $|\psi\rangle$ by a unitary transformation U which satisfies

$$U^\dagger U = 1 \quad (\text{B.45})$$

we write the transformed state as

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \quad (\text{B.46})$$

The unitarity is important since the norm must be conserved, that is,

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1. \quad (\text{B.47})$$

In this case, an arbitrary operator \mathcal{O} is transformed as

$$\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}. \quad (\text{B.48})$$

This can be obtained since the expectation value of the operator \mathcal{O} must be the same between two systems, that is,

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle. \quad (\text{B.49})$$

Since

$$\langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger\mathcal{O}'U|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle \quad (\text{B.50})$$

we find

$$U^\dagger\mathcal{O}'U = \mathcal{O}. \quad (\text{B.51})$$

B.8 Fermion Current

We summarize the fermion currents and their properties of the Lorentz transformation. We also give their nonrelativistic expressions since the basic behaviors must be kept in the nonrelativistic expressions. Here, the approximate expressions are obtained by making use of the plane wave solutions for the Dirac wave function.

$$\bullet \text{ Fermion currents : } \left(\begin{array}{l} \text{Scalar : } \quad \bar{\psi}\psi \simeq 1 \\ \text{Pseudoscalar : } \quad \bar{\psi}\gamma_5\psi \simeq \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} \\ \text{Vector : } \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \simeq \left(1, \frac{\mathbf{p}}{m}\right) \\ \text{Axialvector : } \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \simeq \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m}, \boldsymbol{\sigma}\right) \end{array} \right) \quad (\text{B.52})$$

Therefore, under the parity \hat{P} and time reversal \hat{T} transformation, the above currents behave as

$$\bullet \text{ Parity } \hat{P} : \left(\begin{array}{l} \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\hat{P}^{-1}\hat{P}\psi = \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{P}^{-1}\gamma_5\hat{P}\psi = -\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\psi' = \bar{\psi}\hat{P}^{-1}\gamma_k\hat{P}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{P}^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat{P}\psi = \bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi \end{array} \right) \quad (\text{B.53})$$

$$\bullet \text{ Time reversal } \hat{T} : \left(\begin{array}{l} \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\hat{T}\psi = \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_5\hat{T}\psi = \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi \end{array} \right) \quad (\text{B.54})$$

B.9 Trace in Physics

B.9.1 Definition

The trace of $N \times N$ matrix A is defined as

$$\text{Tr}\{A\} = \sum_{i=1}^N A_{ii}. \quad (\text{B.55})$$

This is simply the summation of the diagonal elements of the matrix A . It is easy to prove

$$\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}. \quad (\text{B.56})$$

B.9.2 Trace in Quantum Mechanics

In quantum mechanics, the trace of the Hamiltonian H becomes

$$\text{Tr}\{H\} = \text{Tr}\{UHU^{-1}\} = \sum_{n=1} E_n, \quad (\text{B.57})$$

where U is a unitary operator that diagonalizes the Hamiltonian, and E_n denotes the energy eigenvalue of the Hamiltonian. Therefore, the trace of the Hamiltonian has the meaning of the sum of all the eigenvalues of the Hamiltonian.

B.9.3 Trace in $SU(N)$

In the special unitary group $SU(N)$, we often describe the element U^a in terms of the generator T^a as

$$U^a = e^{iT^a}. \quad (\text{B.58})$$

In this case, the generator must be hermitian and traceless since

$$\det U^a = \exp(\text{Tr}\{\ln U^a\}) = \exp(i \text{Tr}\{T^a\}) = 1 \quad (\text{B.59})$$

and thus

$$\text{Tr}\{T^a\} = 0. \quad (\text{B.60})$$

The generators of $SU(N)$ group satisfy the following commutation relations

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c, \quad (\text{B.61})$$

where C^{abc} denotes a structure constant in the Lie algebra. The generators are normalized in this textbook such that

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{B.62})$$

B.9.4 Trace of γ -Matrices and \not{p}

The Trace of the γ -matrices is also important. First, we have

$$\text{Tr}\{1\} = 4, \quad \text{Tr}\{\gamma_\mu\} = 0, \quad \text{Tr}\{\gamma_5\} = 0. \quad (\text{B.63})$$

In field theory, we often define a symbol of \not{p} just for convenience

$$\bullet \not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu. \quad (\text{B.64})$$

In this case, the following relation holds :

$$\bullet \not{p}\not{q} = pq - i\sigma_{\mu\nu}p^\mu q^\nu. \quad (\text{B.65})$$

The following relations may also be useful :

$$\bullet \text{Tr}\{\not{p}\not{q}\} = 4pq, \quad (\text{B.66})$$

$$\bullet \text{Tr}\{\gamma_5\not{p}\not{q}\} = 0, \quad (\text{B.67})$$

$$\bullet \text{Tr}[\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = 4\left\{(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\right\} \quad (\text{B.68})$$

$$\bullet \text{Tr}[\gamma^5\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = -4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma p_4^\delta \quad (\text{B.69})$$

$$\bullet \text{Tr}[\gamma^5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5}\gamma_{\mu_6}] = -4i[g_{\mu_1\mu_2}\varepsilon_{\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6} - g_{\mu_1\mu_3}\varepsilon_{\mu_2\mu_4\mu_5\mu_6} \\ + g_{\mu_2\mu_3}\varepsilon_{\mu_1\mu_4\mu_5\mu_6} + g_{\mu_4\mu_5}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_6} - g_{\mu_4\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_5\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}] \quad (\text{B.70})$$

$$\bullet \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = - \begin{vmatrix} \delta^\mu_{\mu'} & \delta^\mu_{\nu'} & \delta^\mu_{\alpha'} & \delta^\mu_{\beta'} \\ \delta^\nu_{\mu'} & \delta^\nu_{\nu'} & \delta^\nu_{\alpha'} & \delta^\nu_{\beta'} \\ \delta^\alpha_{\mu'} & \delta^\alpha_{\nu'} & \delta^\alpha_{\alpha'} & \delta^\alpha_{\beta'} \\ \delta^\beta_{\mu'} & \delta^\beta_{\nu'} & \delta^\beta_{\alpha'} & \delta^\beta_{\beta'} \end{vmatrix} \quad (\text{B.71})$$

$$\bullet \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = - \begin{vmatrix} \delta^\nu_{\nu'} & \delta^\nu_{\alpha'} & \delta^\nu_{\beta'} \\ \delta^\alpha_{\nu'} & \delta^\alpha_{\alpha'} & \delta^\alpha_{\beta'} \\ \delta^\beta_{\nu'} & \delta^\beta_{\alpha'} & \delta^\beta_{\beta'} \end{vmatrix} \quad (\text{B.72})$$

$$\bullet \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = -2 \begin{vmatrix} \delta^\alpha_{\alpha'} & \delta^\alpha_{\beta'} \\ \delta^\beta_{\alpha'} & \delta^\beta_{\beta'} \end{vmatrix} \quad (\text{B.73})$$

$$\bullet \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta'} = -6\delta^\beta_{\beta'} \quad (\text{B.74})$$

$$\bullet \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -24 \quad (\text{B.75})$$

付録C Basic Equations and Principles

C.1 Lagrange Equation

In classical field theory, the equation of motion is derived from the Lagrange equation. Here, we briefly review how we can obtain the equation of motion from the Lagrangian density.

C.1.1 Lagrange Equation in Classical Mechanics

Before going to the field theory, we first discuss the Lagrange equation (Newton equation) in classical mechanics. In order to obtain the Lagrange equation by the variational principle in classical mechanics, we start from the action S

$$S = \int L(q, \dot{q}) dt, \quad (\text{C.1})$$

where the Lagrangian $L(q, \dot{q})$ depends on the general coordinate q and its velocity \dot{q} . At the time of deriving equation of motion by the variational principle, q and \dot{q} are independent as the function of t . This is clear since, in the action S , the functional dependence of $q(t)$ is unknown and therefore we cannot make any derivative of $q(t)$ with respect to time t . Once the equation of motion is established, then we can obtain \dot{q} by time differentiation of $q(t)$ which is a solution of the equation of motion.

The Lagrange equation can be obtained by requiring that the action S

should be a minimum with respect to the variation of q and \dot{q} .

$$\delta S = \int \delta L(q, \dot{q}) dt = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (\text{C.2})$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0, \quad (\text{C.3})$$

where the surface terms are assumed to vanish. Therefore, we obtain the Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (\text{C.4})$$

C.1.2 Hamiltonian in Classical Mechanics

The Lagrangian $L(q, \dot{q})$ must be invariant under the infinitesimal time displacement ϵ of $q(t)$ as

$$q(t + \epsilon) \rightarrow q(t) + \dot{q}\epsilon, \quad \dot{q}(t + \epsilon) \rightarrow \dot{q}(t) + \ddot{q}\epsilon + \dot{q} \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (\text{C.5})$$

Therefore, we find

$$\delta L(q, \dot{q}) = L(q(t + \epsilon), \dot{q}(t + \epsilon)) - L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \frac{d\epsilon}{dt} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Neglecting the surface term, we obtain

$$\delta L(q, \dot{q}) = \left[\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \right] \epsilon = \left[\frac{d}{dt} \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \right] \epsilon = 0. \quad (\text{C.7})$$

Thus, if we define the Hamiltonian H as

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \quad (\text{C.8})$$

then it is a conserved quantity.

C.1.3 Lagrange Equation for Fields

The Lagrange equation for fields can be obtained almost in the same way as the particle case. For fields, we should start from the Lagrangian density \mathcal{L} and the action is written as

$$S = \int \mathcal{L} \left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d^3r dt, \quad (\text{C.9})$$

where $\psi(x)$, $\dot{\psi}(x)$ and $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ are independent functional variables.

The Lagrange equation can be obtained by requiring that the action S should be a minimum with respect to the variation of ψ , $\dot{\psi}$ and $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \delta\mathcal{L}\left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) d^3r dt = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})} \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) \right) d^3r dt \\ &= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})} \right) \delta\psi d^3r dt = 0,\end{aligned}\tag{C.10}$$

where the surface terms are assumed to vanish. Therefore, we obtain

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})},\tag{C.11}$$

which can be expressed in the relativistic covariant way as

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right).\tag{C.12}$$

This is the Lagrange equation for field ψ , which should hold for any independent field ψ .

C.2 Noether Current

If the Lagrangian density is invariant under the transformation of the field with a continuous variable, then there is always a conserved current associated with this symmetry. This is called *Noether current* and can be derived from the invariance of the Lagrangian density and the Lagrange equation.

C.2.1 Global Gauge Symmetry

The Lagrangian density which is discussed in this textbook should have the following functional dependence in general

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_I[\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi].\tag{C.13}$$

This Lagrangian density is obviously invariant under the global gauge transformation

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \psi'^{\dagger} = e^{-i\alpha}\psi^{\dagger}, \quad (\text{C.14})$$

where α is a real constant. Therefore, the Noether current is conserved in this system. To derive the Noether current conservation for the global gauge transformation, we can consider the infinitesimal global transformation, that is, $|\alpha| \ll 1$. In this case, the transformation becomes

$$\psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = i\alpha\psi. \quad (\text{C.15})$$

$$\psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} + \delta\psi^{\dagger}, \quad \delta\psi^{\dagger} = -i\alpha\psi^{\dagger}. \quad (\text{C.16})$$

• Invariance of Lagrangian Density

Now, it is easy to find

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi', \psi'^{\dagger}, \partial_{\mu}\psi', \partial_{\mu}\psi'^{\dagger}) - \mathcal{L}(\psi, \psi^{\dagger}, \partial_{\mu}\psi, \partial_{\mu}\psi^{\dagger}) = 0. \quad (\text{C.17})$$

At the same time, we can easily evaluate $\delta\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \delta(\partial_{\mu}\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\dagger}} \delta\psi^{\dagger} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})} \delta(\partial_{\mu}\psi^{\dagger}) \\ &= i\alpha \left[\left(\partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \right) \psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \partial_{\mu}\psi - \left(\partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})} \right) \psi^{\dagger} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})} \partial_{\mu}\psi^{\dagger} \right] \\ &= i\alpha \partial_{\mu} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})} \psi^{\dagger} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

where the equation of motion for ψ is employed.

• Current Conservation

Therefore, if we define the current j_{μ} as

$$j^{\mu} \equiv -i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^{\dagger})} \psi^{\dagger} \right] \quad (\text{C.19})$$

then we have

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (\text{C.20})$$

For Dirac fields with electromagnetic interactions or self-interactions, we can obtain as a conserved current

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (\text{C.21})$$

C.2.2 Chiral Symmetry

When the Lagrangian density is invariant under the chiral transformation,

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \quad (\text{C.22})$$

then there is another Noether current. Here, $\delta\psi$ becomes

$$\delta\psi = i\alpha\gamma_5\psi. \quad (\text{C.23})$$

Therefore, a corresponding conserved current for massless Dirac fields with electromagnetic interactions or self-interactions can be obtained

$$j_5^\mu = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (\text{C.24})$$

In this case, we have

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0 \quad (\text{C.25})$$

which is the conservation of the axial vector current. The conservation of the axial vector current is realized for field theory models with massless fermions.

C.3 Hamiltonian Density

The Hamiltonian density \mathcal{H} is constructed from the Lagrangian density \mathcal{L} . The field theory models which we consider should possess the translational invariance. If the Lagrangian density is invariant under the translation a^μ , then there is a conserved quantity which is the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$. The Hamiltonian density is constructed from the energy momentum tensor of T^{00} .

C.3.1 Hamiltonian Density from Energy Momentum Tensor

Now, the Lagrangian density is given as $\mathcal{L}\left(\psi_i, \dot{\psi}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right)$. If we consider the following infinitesimal translation a^μ of the field ψ_i and ψ_i^\dagger

$$\begin{aligned}\psi_i' &= \psi_i + \delta\psi_i, & \delta\psi_i &= (\partial_\nu\psi_i)a^\nu, \\ \psi_i^{\dagger'} &= \psi_i^\dagger + \delta\psi_i^\dagger, & \delta\psi_i^\dagger &= (\partial_\nu\psi_i^\dagger)a^\nu,\end{aligned}\tag{C.26}$$

then the Lagrangian density should be invariant

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}(\psi_i', \partial_\mu\psi_i') - \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu\psi_i) \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i} \delta\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)} \delta(\partial_\mu\psi_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i^\dagger} \delta\psi_i^\dagger + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)} \delta(\partial_\mu\psi_i^\dagger) \right] = 0.\end{aligned}$$

Making use of the Lagrange equation, we obtain

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i} (\partial_\nu\psi_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)} (\partial_\mu\partial_\nu\psi_i) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)} \partial_\nu\psi_i \right) \right] a^\nu \\ &\quad + \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i^\dagger} (\partial_\nu\psi_i^\dagger) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)} (\partial_\mu\partial_\nu\psi_i^\dagger) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)} \partial_\nu\psi_i^\dagger \right) \right] a^\nu \\ &= \partial_\mu \left[\mathcal{L}g^{\mu\nu} - \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)} \partial^\nu\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)} \partial^\nu\psi_i^\dagger \right) \right] a_\nu = 0.\end{aligned}\tag{C.27}$$

- Energy Momentum Tensor $T^{\mu\nu}$

Therefore, if we define the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$ by

$$T^{\mu\nu} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)} \partial^\nu\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)} \partial^\nu\psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L}g^{\mu\nu}\tag{C.28}$$

then $T^{\mu\nu}$ is a conserved quantity, that is

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.\tag{C.29}$$

This leads to the definition of the Hamiltonian density \mathcal{H} in terms of T^{00}

$$\mathcal{H} \equiv T^{00} = \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_i)} \partial^0\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_i^\dagger)} \partial^0\psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L}.\tag{C.30}$$

C.3.2 Hamiltonian Density from Conjugate Fields

When the Lagrangian density is given as $\mathcal{L}(\psi_i, \dot{\psi}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k})$, we can define the conjugate fields Π_{ψ_i} and $\Pi_{\psi_i^\dagger}$ as

$$\Pi_{\psi_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i}, \quad \Pi_{\psi_i^\dagger} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i^\dagger}. \quad (\text{C.31})$$

In this case, the Hamiltonian density can be written as

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\Pi_{\psi_i} \dot{\psi}_i + \Pi_{\psi_i^\dagger} \dot{\psi}_i^\dagger \right) - \mathcal{L}. \quad (\text{C.32})$$

It should be noted that this way of making the Hamiltonian density is indeed easier to remember than the construction starting from the energy momentum tensor.

- Hamiltonian

The Hamiltonian is defined by integrating the Hamiltonian density over all space

$$H = \int \mathcal{H} d^3r = \int \left[\sum_i \left(\Pi_{\psi_i} \dot{\psi}_i + \Pi_{\psi_i^\dagger} \dot{\psi}_i^\dagger \right) - \mathcal{L} \right] d^3r. \quad (\text{C.33})$$

C.3.3 Hamiltonian Density for Free Dirac Fields

For a free Dirac field with its mass m , the Lagrangian density becomes

$$\mathcal{L} = \psi_i^\dagger \dot{\psi}_i + \psi_i^\dagger [i\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m\gamma_0]_{ij} \psi_j. \quad (\text{C.34})$$

Therefore, the conjugate fields Π_{ψ_i} and $\Pi_{\psi_i^\dagger}$ are obtained

$$\Pi_{\psi_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \psi_i^\dagger, \quad \Pi_{\psi_i^\dagger} = 0. \quad (\text{C.35})$$

Thus, the Hamiltonian density becomes

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\Pi_{\psi_i} \dot{\psi}_i + \Pi_{\psi_i^\dagger} \dot{\psi}_i^\dagger \right) - \mathcal{L} = \bar{\psi}_i [-i\gamma_k \partial_k + m]_{ij} \psi_j = \bar{\psi} [-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m] \psi. \quad (\text{C.36})$$

C.3.4 Hamiltonian for Free Dirac Fields

The Hamiltonian H is obtained by integrating the Hamiltonian density over all space and thus can be written as

$$H = \int \mathcal{H} d^3r = \int \bar{\psi} [-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m] \psi d^3r. \quad (\text{C.37})$$

In classical field theory, this Hamiltonian is not an operator but is just the field energy itself. However, this field energy cannot be evaluated unless we know the shape of the field $\psi(x)$ itself. Therefore, we should determine the shape of the field $\psi(x)$ by the equation of motion in the classical field theory.

C.3.5 Role of Hamiltonian

We should comment on the usefulness of the classical field Hamiltonian itself for field theory models. In fact, the Hamiltonian alone is not useful. This is similar to the classical mechanics case in which the Hamiltonian of a point particle itself does not tell a lot. Instead, we have to derive the Hamilton equations in order to calculate some physical properties of the system and the Hamilton equations are equivalent to the Lagrange equations in classical mechanics.

- Classical Field Theory

In classical field theory, the situation is just the same as the classical mechanics case. If we stay in the classical field theory, then we should derive the field equation from the Hamiltonian by the functional variational principle as will be discussed in the next section.

- Quantized Field Theory

The Hamiltonian of the field theory becomes important when the fields are quantized. In this case, the Hamiltonian becomes an operator, and thus we have to solve the eigenvalue problem for the quantized Hamilto-

nian \hat{H}

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (\text{C.38})$$

where $|\Psi\rangle$ is called *Fock state* and should be written in terms of the creation and annihilation operators of fermion and anti-fermion. The space spanned by the Fock states is called *Fock space*.

In normal circumstances of the field theory models such as QED and QCD, it is practically impossible to find the eigenstate of the quantized Hamiltonian. The difficulty of the quantized field theory comes mainly from two reasons. Firstly, we have to construct the vacuum state which is composed of infinite many negative energy particles interacting with each other. The vacuum state should be the eigenstate of the Hamiltonian

$$\hat{H}|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle, \quad (\text{C.39})$$

where E_Ω denotes the energy of the vacuum and it is in general infinity with the negative sign. The vacuum state $|\Omega\rangle$ is composed of infinitely many negative energy particles

$$|\Omega\rangle = \prod_{p,s} b_p^{\dagger(s)}|0\rangle, \quad (\text{C.40})$$

where $|0\rangle$ denotes the null vacuum state. In the realistic calculations, the number of the negative energy particles must be set to a finite value, and this should be reasonable since physical observables should not depend on the properties of the deep negative energy particles. However, it is most likely that the number of the negative energy particles should be, at least, larger than a few thousand for two dimensional field theory models.

The second difficulty arises from the operators in the Hamiltonian which can change the fermion and anti-fermion numbers and therefore can induce infinite series of the transitions among the Fock states. Since the spectrum of bosons and baryons can be obtained by operating the fermion and anti-fermion creation operators on the vacuum state, the Fock space which is spanned by the creation and annihilation operators becomes infinite. In the realistic calculations, the truncation of the Fock space becomes most important, even though it is difficult to find any reasonable truncation scheme.

In this respect, the Thirring model is an exceptional case where the exact eigenstate of the quantized Hamiltonian is found. This is, however, understandable since the Thirring model Hamiltonian does not contain the operators which can change the fermion and anti-fermion numbers.

C.4 Variational Principle in Hamiltonian

When we have the Hamiltonian, then we can derive the equation of motion by requiring that the Hamiltonian should be minimized with respect to the functional variation of the state $\psi(\mathbf{r})$.

C.4.1 Schrödinger Field

When we minimize the Hamiltonian

$$H = \int \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger U \psi \right] d^3r \quad (\text{C.41})$$

with respect to $\psi(\mathbf{r})$, then we can obtain the static Schrödinger equation.

- Functional Derivative

First, we define the functional derivative for an arbitrary function $\psi_i(\mathbf{r})$ by

$$\frac{\delta \psi_i(\mathbf{r}')}{\delta \psi_j(\mathbf{r})} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{C.42})$$

This is the most important equation for the functional derivative, and once we accept this definition of the functional derivative, then we can evaluate the functional variation just in the same way as normal derivative of the function $\psi_i(\mathbf{r})$.

- **Functional Variation of Hamiltonian**

For the condition on $\psi(\mathbf{r})$, we require that it should be normalized according to

$$\int \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d^3r = 1. \quad (\text{C.43})$$

In order to minimize the Hamiltonian with the above condition, we can make use of the Lagrange multiplier and make a functional derivative of the following quantity with respect to $\psi^\dagger(\mathbf{r})$

$$H[\psi] = \int \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger(\mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') + \psi^\dagger(\mathbf{r}') U \psi(\mathbf{r}') \right] d^3r' - E \left(\int \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3r' - 1 \right), \quad (\text{C.44})$$

where E denotes a Lagrange multiplier and just a constant. In this case, we obtain

$$\frac{\delta H[\psi]}{\delta \psi^\dagger(\mathbf{r})} = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[-\frac{1}{2m} \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') + U \psi(\mathbf{r}') - E \psi(\mathbf{r}') \right] d^3r' = 0. \quad (\text{C.45})$$

Therefore, we find

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + U \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{C.46})$$

which is just the static Schrödinger equation.

C.4.2 Dirac Field

The Dirac equation for free field can be obtained by the variational principle of the Hamiltonian. Below, we derive the static Dirac equation in a concrete fashion by the functional variation of the Hamiltonian.

- **Functional Variation of Hamiltonian**

For the condition on $\psi_i(\mathbf{r})$, we require that it should be normalized according to

$$\int \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) (\gamma^0)_{ij} \psi_j(\mathbf{r}) d^3r = 1. \quad (\text{C.47})$$

Now, the Hamiltonian should be minimized with the condition of eq.(C.47)

$$H[\psi_i] = \int \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) [-i(\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla})_{ij} + m(\gamma^0)_{ij}] \psi_j(\mathbf{r}) d^3r - E \left(\int \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) (\gamma^0)_{ij} \psi_j(\mathbf{r}) d^3r - 1 \right), \quad (\text{C.48})$$

where E is just a constant of the Lagrange multiplier. By minimizing the Hamiltonian with respect to $\psi_i^\dagger(\mathbf{r})$, we obtain

$$(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi(\mathbf{r}) - E\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{C.49})$$

which is just the static Dirac equation for free field.

付録D Wave Propagations in Medium and Vacuum

The classical wave such as sound can propagate through medium. However, it cannot propagate in vacuum as is well known. This is, of course, clear since the classical wave is the chain of the oscillations of the medium due to the pressure on the density.

On the other hand, quantum wave including photon can propagate in vacuum since it is a particle. Here, we clarify the difference in propagations between the classical wave and quantum wave. The most important point is that the classical wave should be always written in terms of real functions while photon or quantum wave should be described by the complex wave function of the shape e^{ikx} since it should be an eigenstate of the momentum.

D.1 What is Wave?

The sound can propagate through medium such as air or water. The wave can be described in terms of the amplitude ϕ in one dimension

$$\phi(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \quad (\text{D.1})$$

where ω and k denote the frequency and wave number, respectively. The dispersion relation of this wave can be written as

$$\omega = vk. \quad (\text{D.2})$$

Here, it is important to note that the amplitude is written as the real function, in contrast to the free wave function of electron in quantum mechanics. In fact, the free wave of electron can be described in one dimension as

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{D.3})$$

which is a complex function. The electron can propagate by itself and there is no medium necessary for the electron motion.

What is the difference between the real wave amplitude and the complex wave function? Here, we clarify this point in a simple way though this does not contain any new physics.

D.1.1 A Real Wave Function: Classical Wave

If the amplitude is real such as (D.1), then it can only propagate in medium. This can be clearly seen since the energy of the wave can be transported in terms of the density oscillation which is a real as the physical quantity. In addition, the amplitude becomes zero at some point, and this is only possible when it corresponds to the oscillation of the medium. This means that the wave function of (D.1) has nothing to do with the probability of wave object. Instead, if it is the oscillation of the medium, then it is easy to understand why one finds the point where the amplitude vanishes to zero. The real amplitude is called a classical wave since it is indeed seen in the world of the classical physics.

D.1.2 A Complex Wave Function: Quantum Wave

On the other hand, the free wave function of electron is a complex function, and there is no point where it can vanish to zero. Since this is just the wave function of electron, its probability of finding the wave is always a constant $\frac{1}{V}$ at any space point of volume V .

D.2 Classical Wave

The sound propagates in the air, and its propagation should be transported in terms of density wave. The amplitude of this wave can be written in terms of the real function as given in eq.(D.1). This is quite reasonable since the density wave should be described by the real physical quantity.

Instead, this requires the existence of the medium (air), and the wave can propagate as long as the air exists. Here, we first write the basic wave equation in one dimension

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (\text{D.4})$$

which is similar to the wave equation in quantum mechanics, though it is a real differential equation. Here, v denotes the speed of wave.

D.2.1 Classical Waves Carry Their Energy?

In this case, a question may arise as to what is a physical quantity which is carried by the classical wave like sound. It seems natural that the wave carries its energy (or wave length). In fact, the transportation of the energy should be carried out by the compression of the density and successive oscillations of the medium. Therefore this is called compression wave.

D.2.2 Longitudinal and Transverse Waves

Here, we discuss the terminology of the longitudinal and transverse waves, even though one should not stress its physics too much since there is no special physical meaning.

- Longitudinal Wave :

The sound propagates as the compressional wave, and the oscillations should be always in the direction of the wave motion. In this case, it is called longitudinal wave. This wave can be easily understood since one can make a picture of the density wave.

- Transverse Wave :

On the other hand, if the motion of the oscillations is in the perpendicular to the direction of the wave motion, then it is called transverse wave. The tidal wave may be the transverse wave, but its description may not be very simple since the density change may not directly be related to the wave itself.

D.3 Quantum Wave

Photon and quantum wave are quite different from the classical wave, and the quantum wave is a particle motion itself. No medium oscillation is involved. For example, a free electron moves with the velocity v in vacuum, and this motion is also called "wave". The reason why we call it wave is due to the fact that the equation of motion that describes electrons looks similar to the classical wave equation of motion. Further, the solution of the wave equation can be described as e^{ikx} , and thus it is the same as the wave behavior in terms of mathematics. But the physical meaning is completely different from the classical wave, and quantum wave is just the particle motion which behaves as the probabilistic motion.

D.3.1 Quantum Wave (Electron Motion)

The wave function of a free electron in one dimension can be described as

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\omega t - k \cdot r)} \quad (\text{D.5})$$

which is a solution of the Schrödinger equation of a free electron,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi \quad (\text{D.6})$$

where $k = \sqrt{2m\omega}$, and V denotes the corresponding volume. Since the Schrödinger equation is quite similar to the wave equation in a classical sense, one calls the solution of the Schrödinger equation as a wave. However, the physics of the quantum wave should be understood in terms of the quantum mechanics, and the relation to the classical wave should not be stressed. That is, the quantum wave is completely different from the classical wave, and one should treat the quantum wave as it is. In addition, the behavior and physics of the classical wave are very complicated and it is clear that we do not fully understand the behavior of the classical wave since it involves many body problems in physics.

D.3.2 Photon

The electromagnetic wave is called photon which behaves like a particle and also like a wave. This photon can propagate in vacuum and thus it should be considered to be a particle. Photon can be described by the vector potential A .

- A is real ! :

However, this A is obviously a real function, and therefore, it cannot propagate like a particle. This can be easily seen since the free Hamiltonian of photon commutes with the momentum operator $\hat{p} = -i\nabla$, and therefore it can be a simultaneous eigenstate of the Hamiltonian. Thus, the A should be an eigenstate of the momentum operator since the free state must be an eigenstate of momentum. However, any real function cannot be an eigenstate of the momentum operator, and thus the vector field in its present shape cannot describe the free particle state.

- Free solution of vector field :

What should we do? The only way of solving this puzzle is to quantize a photon field. First, the solution of A can be written as

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} \left(c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{ikx} \right) \quad (\text{D.7})$$

with $kx \equiv \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Here, $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}$ denotes the polarization vector which will be discussed later more in detail. As one sees, the vector field is indeed a real function.

- Quantization of vector field :

Now we impose the following quantization conditions on $c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}$ and $c_{\mathbf{k}, \lambda}$

$$[c_{\mathbf{k}, \lambda}, c_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad (\text{D.8})$$

$$[c_{\mathbf{k}, \lambda}, c_{\mathbf{k}', \lambda'}] = 0, \quad [c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}] = 0. \quad (\text{D.9})$$

In this case, $c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}$, $c_{\mathbf{k}, \lambda}$ become operators. Therefore, one should now consider the Fock space on which they can operate. This can be defined as

$$c_{\mathbf{k}, \lambda} |0\rangle = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$c_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle \quad (\text{D.11})$$

where $|0\rangle$ denotes the vacuum state of the photon field. Therefore, if one operates the vector field on the vacuum state, then one obtains

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx}. \quad (\text{D.12})$$

As one sees, this new state is indeed the eigenstate of the momentum operator and should correspond to the observables. Therefore, photon can be described only after the vector field is quantized. Thus, photon is a particle whose dispersion relation becomes

$$\omega_k = |\mathbf{k}|. \quad (\text{D.13})$$

D.4 Polarization Vector of Photon

Until recently, there is a serious misunderstanding for the polarization vector $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu$. This is related to the fact that the equation of motion for the polarization vector is not solved, and thus there is one condition missing in the determination of the polarization vector.

D.4.1 Equation of Motion for Polarization Vector

Now the equation of motion for $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ without any source terms can be written from the Lagrange equation as

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{D.14})$$

where $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. This can be rewritten as

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{D.15})$$

Now, the shape of the solution of this equation can be given as

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \left[c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (\text{D.16})$$

and thus we insert it into eq.(D.15) and obtain

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0. \quad (\text{D.17})$$

Now the condition that there should exist non-zero solution of $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$ is obviously that the determinant of the matrix in the above equation should vanish to zero, namely

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0. \quad (\text{D.18})$$

This leads to $k^2 = 0$, which means $k_0 \equiv \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$. This is indeed a proper dispersion relation for photon.

D.4.2 Condition from Equation of Motion

Now we insert the condition of $k^2 = 0$ into eq.(D.17), and obtain

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (\text{D.19})$$

which is a new constraint equation obtained from the basic equation of motion. Therefore, this condition (we call it ‘‘Lorentz condition’’) is most fundamental. It should be noted that the Lorentz gauge fixing is just the same as eq.(D.19). This means that the Lorentz gauge fixing is improper and forbidden for the case of no source term. In this sense, the best gauge fixing should be the Coulomb gauge fixing

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0 \quad (\text{D.20})$$

from which one finds $\epsilon_0 = 0$, and this is indeed consistent with experiment.

- Number of freedom of polarization vector :

Now we can understand the number of degree of freedom of the polarization vector. The Lorentz condition $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ should give one constraint on the polarization vector, and the Coulomb gauge fixing $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ gives another constraint. Therefore, the polarization vector has only two degrees of freedom, which is indeed an experimental fact.

- State vector of photon :

The state vector of photon is already discussed. But here we should rewrite it again. This is written as

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} e^{-i\mathbf{k}x}. \quad (\text{D.21})$$

In this case, the polarization vector $\epsilon_{k,\lambda}$ has two components, and satisfies the following conditions

$$\epsilon_{k,\lambda} \cdot \epsilon_{k,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \mathbf{k} \cdot \epsilon_{k,\lambda} = 0. \quad (\text{D.22})$$

D.4.3 Photon Is a Transverse Wave?

People often use the terminology of transverse photon. Is it a correct expression? By now, one can understand that the quantum wave is a particle motion, and thus it has nothing to do with the oscillation of the medium. Therefore, it is meaningless to claim that photon is a transverse wave. The reason of this terminology may well come from the polarization vector $\epsilon_{k,\lambda}$ which is orthogonal to the direction of photon momentum. However, as one can see, the polarization vector is an intrinsic property of photon, and it does not depend on space coordinates.

- No rest frame of photon ! :

In addition, there is no rest frame of photon, and therefore, one cannot discuss its intrinsic property unless one fixes the frame. Even if one says that the polarization vector is orthogonal to the direction of the photon momentum, one has to be careful in which frame one discusses this property.

In this respect, it should be difficult to claim that photon behaves like a transverse wave. Therefore, one sees that photon should be described as a massless particle which has two degrees of freedom with the behavior of a boson. There is no correspondence between classical waves and photon, and even more, there is no necessity of making analogy of photon with the classical waves.

D.5 Poynting Vector and Radiation

We have clarified that the propagation of the real function requires some medium which can make oscillations. Here, we discuss the Poynting vector how it appears in physics, and show that it cannot propagate in vacuum at

all. Also, we present a brief description of the basic radiation mechanism how photon can be emitted.

D.5.1 Field Energy and Radiation of Photon

Before discussing the propagation of the Poynting vector, we should first discuss the mechanism of the radiation of photon in terms of classical electrodynamics. The interaction Hamiltonian can be written as

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{D.23})$$

which should be a starting point of all the discussions. Now, we make a time derivative of the interaction Hamiltonian and obtain

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = - \int \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3r. \quad (\text{D.24})$$

Since we can safely set $A^0 = 0$ in this treatment, we find

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{D.25})$$

Therefore, we can rewrite eq.(D.24) as

$$W = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r. \quad (\text{D.26})$$

Defining the first term of eq.(D.24) as W_E , we can rewrite W_E as

$$W_E \equiv \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r = - \frac{d}{dt} \left[\int \left(\frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) d^3r \right] - \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r \quad (\text{D.27})$$

which is just the energy of electromagnetic fields.

D.5.2 Poynting Vector

Here, the last term of eq.(D.27) is Poynting vector \mathbf{S} as defined by

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{D.28})$$

which is connected to the energy flow of the electromagnetic field. This Poynting vector is a conserved quantity, and thus it has nothing to do with the electromagnetic wave. In addition, it is a real quantity, and thus there is no way that it can propagate in vacuum. In addition, the Poynting vector cannot be a target of the field quantization, and thus it always remains classical since it is written in terms of \mathbf{E} and \mathbf{B} . However, there is still some misunderstanding in some of the textbooks on Electromagnetism, and therefore, one should be careful for the treatment of the Poynting vector.

● Exercise problem:

Here, we present a simple exercise problem of circuit with condenser with C (disk radius of a and distance of d) and resistance with R . The electric potential difference V is set on the circuit. In this case, the equation for the circuit can be written as

$$V = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

This can be easily solved with the initial condition of $Q = 0$ at $t = 0$, and the solution becomes

$$Q = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Therefore, the electric current J becomes

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

In this case, we find the electric field \mathbf{E} and the displacement current \mathbf{j}_d

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V}{R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.30})$$

Thus, the magnetic field \mathbf{B} becomes

$$\mathbf{B} = \frac{i_d r}{2} \mathbf{e}_\theta = \frac{r}{2 \pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

where $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 i_d \pi r^2$ is used. Therefore, the Poynting vector at the surface (with $r = a$) of the cylindrical space of the disk condenser becomes

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{V^2}{2 \pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \mathbf{e}_r.$$

It should be noted that the energy in the Poynting vector is always flowing into the cylindrical space. Therefore, the electric field energy is now accumulated in the cylindrical space. There is, of course, no electromagnetic wave radiation, and in fact, the Poynting vector is the flow of field energy, and has nothing to do with the electromagnetic wave.

D.5.3 Emission of Photon

The emission of photon should come from the second term of eq.(D.26) which can be defined as W_R and thus

$$W_R = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r. \quad (\text{D.31})$$

In this case, we can calculate the $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ term by employing the Zeeman effect Hamiltonian with a uniform magnetic field of B_0

$$H_Z = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (\text{D.32})$$

The relevant Schrödinger equation for electron with its mass m_e becomes

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0 \psi. \quad (\text{D.33})$$

Therefore, we find

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{\mathbf{p}} \psi + \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{e^2}{2m_e^2} \nabla B_0(\mathbf{r}). \quad (\text{D.34})$$

In order to obtain the photon emission, one should quantize the field \mathbf{A} in eq.(D.31).

- **Field quantization :**

The field quantization in electromagnetic interactions can be done only for the vector potential \mathbf{A} . The electric field \mathbf{E} and the magnetic field \mathbf{B} are classical quantities which are defined before the field quantization.

付録E New Derivation of Dirac Equation

Here, we should present a novel method to derive the Dirac equation without making use of the first quantization. It is shown that, from the local gauge invariance and the Maxwell equation, we can derive the Lagrangian density of the Dirac field.

E.1 Derivation of Lagrangian Density of Dirac Field

Dirac derived the Dirac equation by factorizing the dispersion relation of energy and momentum such that the field equation becomes the first order in time derivative. Now, we can derive the Lagrangian density of the Dirac field in an alternative way by making use of the local gauge invariance and the Maxwell equation as the most fundamental principle.

E.1.1 Lagrangian Density for Maxwell Equation

We start from the Lagrangian density of the Maxwell equation

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{E.1})$$

where A^μ is the gauge field, and $F_{\mu\nu}$ is the field strength and is given as

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{E.2})$$

Here j_μ denotes the current density of matter field which couples to the electromagnetic field. From the Lagrange equation, we obtain

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu \quad (\text{E.3})$$

which is just the Maxwell equation.

E.1.2 Four Component Spinor

Now, we can derive the kinetic energy term of the fermion Lagrangian density. First, we assume that the Dirac fermion should have four components

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

This is based on the observation that electron has spin degree of freedom which is two. In addition, there must be positive and negative energy states since it is a relativistic field, and therefore the fermion field should have 4 components.

• 16 Independent Components

Now, the matrix elements

$$\psi^\dagger \hat{O} \psi \quad (\text{E.5})$$

can be classified into 16 independent Lorentz invariant components as

$$\bullet \begin{cases} \bar{\psi}\psi : & \text{scalar,} \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi : & \text{pseudo - scalar,} \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi : & \text{4 component vector,} \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi : & \text{4 component axial - vector,} \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi : & \text{6 component tensor,} \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

where $\bar{\psi}$ is defined for convenience as

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0. \quad (\text{E.7})$$

These properties are determined by mathematics.

• Shape of Vector Current

From the invariance consideration, the vector current j_μ must be written as

$$j_\mu = C_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (\text{E.8})$$

where C_0 is a constant. Since we can renormalize the constant C_0 into the coupling constant g , we can set without loss of generality

$$C_0 = 1. \quad (\text{E.9})$$

E.2 Shape of Lagrangian Density

By making use of the local gauge invariance of the Lagrangian density, we see that the following shape of the Lagrangian density can keep the local gauge invariance

$$\mathcal{L} = C_1 \bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{E.10})$$

where C_1 is a constant. At this point, we require that the Lagrangian density should be invariant under the local gauge transformation

$$\bullet \begin{cases} A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \\ \psi \longrightarrow e^{-ig\chi} \psi \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

where χ should be an arbitrary function of space and time. In this case, it is easy to find that the constant C_1 must be

$$C_1 = i. \quad (\text{E.12})$$

Here, the constant \hbar should be included implicitly into the constant C_1 . The determination of \hbar can be done only when we compare calculated results with experiment such as the spectrum of hydrogen atom.

E.2.1 Mass Term

The Lagrangian density of eq.(E.10) still lacks the mass term. Since the mass term must be a Lorentz scalar, it should be described as

$$C_2 \bar{\psi} \psi \quad (\text{E.13})$$

which is, of course, gauge invariant as well. This constant C_2 should be determined again by comparing the calculated results of hydrogen atom,

for example, with experiment. By denoting C_2 as $(-m)$, we arrive at the Lagrangian density of a relativistic fermion which couples with the electromagnetic fields A^μ

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{E.14})$$

which is just the Lagrangian density for the Dirac field interacting with electromagnetic fields.

E.2.2 First Quantization

It is important to note that, in the procedure of deriving the Lagrangian density of eq.(E.14), we have not made use of the quantization condition of

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla. \quad (\text{E.15})$$

Instead, the first quantization is automatically done by the gauge condition since the Maxwell equation knows the first quantization in advance. This indicates that there may be some chance to understand the first quantization procedure in depth since this method gives an alternative way of the quantization condition of the energy and momentum.

E.3 Two Component Spinor

The derivation of the Dirac equation in terms of the local gauge invariance shows that the current density that can couple to the gauge field A^μ must be rather limited. Here, we discuss a possibility of finding field equation for the two component spinor. When the field has only two components,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.16})$$

then we can prove that we cannot make the current j_μ that couples with the gauge field A_μ . This can be easily seen since the matrix elements

$$\phi^\dagger \hat{O} \phi \quad (\text{E.17})$$

can be classified into 4 independent variables as

$$\phi^\dagger\phi : \text{scalar}, \quad \phi^\dagger\sigma_k\phi : \text{3componentvector}. \quad (\text{E.18})$$

Therefore, there is no chance to make four vector currents which may couple to the gauge field A_μ . This way of making the Lagrangian density indicates that it should be difficult to find a Lagrangian density of relativistic bosons.

付録F Nuclear Force

Since there is no way to evaluate the strong interactions in terms of QCD, we should carry out the calculation of the nuclear interactions in terms of meson exchange processes. This is the only reliable and reasonable method to evaluate nuclear forces in a proper manner. The nuclear interaction should be mediated by the exchange processes of observed bosons, such as pions.

F.1 One Boson Exchange Potential

The structure of nucleus can be described once nucleon-nucleon interactions are properly known. Indeed there are already sufficiently large number of works available for the determination of the nucleon-nucleon potential [7, 8, 9, 10]. The most popular nuclear interaction may be obtained by one boson exchange potential (OBEP) [11, 12, 2] where exchanged bosons are taken from experimental observations. In this case, the masses and the coupling constants of the exchanged bosons are determined from various methods, partly experimentally and partly theoretically. The discussions of the determination of these parameters may have some ambiguities, but one can see that the basic part of the nuclear force can be well understood until now.

However, there is one important problem which still remains unsolved. This is related to the medium attraction of the nucleon-nucleon potential, and it is normally simulated by the effective scalar meson exchange process. Until now, however, people have discovered no massive scalar meson in nature and, therefore, the artificial introduction of the scalar meson is indeed a theoretical defect of the one boson exchange model. This is indeed a homework problem for many years of nuclear physics research. However,

this important problem is left unsolved for a long time since many of the nuclear theorists moved to the quark model calculations of the nucleon-nucleon interaction. By now, it becomes clear that the evaluation of the QCD based model has an intrinsic difficulty due to the gauge dependence of the quark color charge [4] and this strongly suggests that the meson exchange approach is indeed a right direction of nuclear force calculations.

F.2 Two Pion Exchange Process

In addition to the one boson exchange processes, one should consider the two pion exchange diagrams in order to obtain a proper nucleon-nucleon interaction. There are, of course, many calculations of the nucleon-nucleon interaction due to the two pion exchange processes [13, 14, 15], and this may indeed give rise to the medium range attraction even though until now there is no clear cut evaluation which can isolate the nuclear force contribution to the medium range attraction.

Here, we present a careful calculation of the two pion exchange processes. The important point is that the fourth order process involving the four γ_5 interactions is not suppressed at all, in contrast to the one pion exchange diagram where the γ_5 coupling is indeed suppressed by the factor of $\frac{m_\pi}{M}$ with M denoting the nucleon mass. This is basically due to the parity mismatch and corresponds to the mixture of the small and the large components of the Dirac spinors. Therefore, it should be very important to calculate the two pion exchange process properly in order to understand the medium attraction of the nucleon-nucleon interaction.

Now, the evaluation of the two pion exchange Feynman diagram is done in a straight forward way [1], and we find the corresponding T-matrix as

$$T = ig_\pi^4 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\gamma_5^{(1)} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 - k)^\mu \gamma_\mu^{(1)} - M + i\varepsilon} i\gamma_5^{(1)} \\ \times i\gamma_5^{(2)} \frac{1}{(q - k)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_2 + k)^\mu \gamma_\mu^{(2)} - M + i\varepsilon} i\gamma_5^{(2)} \quad (\text{F.1})$$

where p_1 (p'_1) and p_2 (p'_2) denote the initial (final) four momenta of the two nucleons, and q is the four momentum transfer which is defined as

$q = p_1 - p'_1$. Here, we have ignored the crossed diagram which is much smaller than eq.(F.1). By noting

$$(\gamma_5^{(1)})^2 = 1, \quad (\gamma_5^{(2)})^2 = 1, \quad \gamma_5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma_5 \quad (\text{F.2})$$

we can rewrite eq.(F.1) as

$$T = ig_\pi^4 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2} \frac{1}{(q - k)^2 - m_\pi^2} \frac{(p_1 - k)^\mu \gamma_\mu^{(1)} - M}{(p_1 - k)^2 - M^2} \\ \times \frac{(p_2 + k)^\mu \gamma_\mu^{(2)} - M}{(p_2 + k)^2 - M^2}. \quad (\text{F.3})$$

Now, we introduce the Feynman parameters x, y, z as

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \frac{1}{[a + (b - a)x + (c - b)y + (d - c)z]^4}. \quad (\text{F.4})$$

Further, we assume that the nucleons at the initial state are on the mass shell

$$(\not{p}_1 - M)u(p_1) = 0, \quad (\not{p}_2 - M)u(p_2) = 0 \quad (\text{F.5})$$

and therefore we also find

$$\bar{u}(p'_1)q^\mu \gamma_\mu u(p_1) = 0. \quad (\text{F.6})$$

In addition, we take the non-relativistic limit for the nucleon motion and thus obtain

$$T \simeq -6ig_\pi^4 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}k^2 + M^2(2z - y)^2}{(k^2 - s)^4} \quad (\text{F.7})$$

where s is defined as

$$s = q^2 ((y - x)^2 - y + x) + M^2(2z - y)^2 + m_\pi^2(1 - y). \quad (\text{F.8})$$

The momentum integration of k can be easily carried out, and we find

$$T \simeq -\frac{g_\pi^4}{32\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \left[\frac{1}{s} - \frac{2M^2(2z - y)^2}{s^2} \right]. \quad (\text{F.9})$$

This three dimensional integration of x, y, z can be done only numerically, and the calculated result can be well fit by the following shape

$$T \simeq -(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \frac{g_\pi^4}{32\pi^2} \times \frac{A}{\mathbf{q}^2 + m_s^2} \quad (\text{F.10})$$

where A and m_s are found to be

$$A \simeq 0.57, \quad m_s \simeq 4.7m_\pi \simeq 650 \text{ MeV}. \quad (\text{F.11})$$

Here, we replace the four momentum transfer of q^2 as

$$q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 \simeq -\mathbf{q}^2 \quad (\text{F.12})$$

since we may use the static approximation to a good accuracy

$$(q_0)^2 = \left(\sqrt{M^2 + \mathbf{p}_1^2} - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}'_1{}^2} \right)^2 \simeq \frac{1}{4M^2} (\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'_1{}^2)^2 \ll \mathbf{q}^2. \quad (\text{F.13})$$

If we take the value of the πNN coupling constant as $\frac{g_\pi^2}{4\pi} \simeq 8$, then we find

$$T \simeq -(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \frac{g_s^2}{\mathbf{q}^2 + m_s^2} \quad (\text{F.14})$$

where

$$\frac{g_s^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{4\pi} \times \frac{g_\pi^4}{32\pi^2} \times 0.57 \simeq 1.45 \quad (\text{F.15})$$

which are consistent with the values determined from the nucleon-nucleon scattering experiments. It should be important to note that the present calculation suggests that the $T = 0$ channel of the nucleon-nucleon interaction is very strong in comparison with the $T = 1$ case. This means that the proton-neutron interaction is much stronger than the interactions between identical particles. .

F.3 Double Counting Problem

In general, the evaluation of the two boson exchange potential should be carefully done due to the double counting problem. This is clear since the solution of the Schrödinger equation with the one boson exchange potential should contain the repeat of the one boson exchange process in some way or the other.

F.3.1 Ladder Diagrams

In order to understand the double counting problem, we should first start from the Lippmann-Schwinger equation for the T-matrix, and the T-matrix equation for the nucleon-nucleon scattering case can be written as

$$T = V_{NN} + V_{NN} \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} T \quad (\text{F.16})$$

where V_{NN} and H_0 denote the nucleon-nucleon potential and the two nucleon Hamiltonian in the free state, respectively. Suppose this V_{NN} should be one pion exchange potential V_π , and we insert it into eq.(F.16) and expand it into the ladder type contributions

$$T = V_\pi + V_\pi \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V_\pi + \dots \quad (\text{F.17})$$

Here it is claimed that the second term should correspond to the contributions from the two pion exchange potential. Indeed, it indicates that some part of the two pion exchange process should be taken into account in this T-matrix equation. However, this is not necessarily correct for the pion exchange process since the one pion exchange potential is suppressed a great deal due to the γ_5 interaction which picks up the product of the large and small components of the Dirac wave function. On the other hand, the second order ladder calculation can take into account only the large components of the Dirac wave functions. This is clear since the Lippmann-Schwinger equation is solved only for the non-relativistic wave function. In addition, the OPE potential is obtained already by making the approximation of the non-relativistic reduction, and thus the two pion

exchange process is completely different from the second order ladder contribution of OPE potential.

F.3.2 One Pion Exchange Potential

Here, we see that the T-matrix of the one pion exchange process is written as

$$T^{(OPE)} = -g_\pi^2 \bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\tau}_1 \gamma^5 u(p_1) \frac{1}{q^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\tau}_2 \gamma^5 u(p_2) \quad (\text{F.18})$$

and after some static and non-relativistic approximations, we obtain the OPE potential

$$V_\pi(r) = \frac{f^2}{4\pi} \frac{(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)}{m_\pi^2} \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \left[S_{12} \left(\frac{m_\pi^2}{3} + \frac{m_\pi}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{m_\pi^2}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \quad (\text{F.19})$$

where

$$S_{12} \equiv 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad f \equiv \frac{m_\pi}{2M_p} g_\pi. \quad (\text{F.20})$$

Here, one finds the suppression factor of $\frac{m_\pi}{2M_p}$. The most important point is that the OPE potential can be obtained only after one takes the expectation value of the γ^5 matrix with free Dirac wave functions, and the suppression factor comes from this point of the expectation value $\bar{u}(p)\gamma^5 u(p)$ which is proportional to the product of the large and small components of the Dirac wave function.

F.3.3 Two Pion Exchange Potential

On the other hand, the two pion exchange diagram does not have any such suppressions because one considers all the intermediate states which pick up the states strongly coupled to the γ^5 vertex with the initial nucleon state. We can write it more explicitly

$$T^{(TPEP)} = ig_\pi^4 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p'_1) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_5^{(1)} \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - M + i\varepsilon} \gamma_5^{(1)} u(p_1) \\ \times \bar{u}(p'_2) \gamma_5^{(2)} \frac{1}{\not{p}_2 + \not{k} - M + i\varepsilon} \gamma_5^{(2)} \frac{1}{(q - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} u(p_2). \quad (\text{F.21})$$

Here, one can see that the two $\gamma_5^{(1)}$ s appear between the spinors $\bar{u}(p'_1)$ and $u(p_1)$ and thus there is no suppression. In addition, one sees that the ladder contribution of eq.(F.21) can only take into account the intermediate states which are always described in terms of the non-relativistic wave functions in the Lippmann-Schwinger equation, and the OPEP is obtained only after one has taken the expectation value of the γ^5 with the free Dirac states.

付録G Photon Propagator and Electron-Electron Scattering

Here, we discuss the photon propagator and its consequence on the electron-electron scattering process. Even though the Feynman propagator is not a correct one, it can reproduce the right scattering T-matrix of electron-electron scattering. We here clarify the reason why it can accidentally agree with the calculated T-matrix of the correct propagator.

G.1 Photon Propagator

When we calculate the S-matrix elements in the process of the electromagnetic interaction $H' = e \int j_\mu A^\mu d^3x$ in the second order perturbation theory, then we have to evaluate the propagator of photon. This is written as

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle \quad (\text{G.1})$$

where $A^\mu(x)$ is given as

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \left[c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (\text{G.2})$$

This should be a solution of the following equation of motion for the gauge field

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0. \quad (\text{G.3})$$

In this case, a question may arise as to how we can calculate the propagator of photon since the photon field A has one redundant degree of freedom. As we discuss below, there is some problem for determining the propagator of photon.

G.1.1 Feynman Propagator of Photon

Before going to the evaluation of the photon propagator in detail, we should make a comment on the Feynman propagator of photon. The propagator of photon which is known as the Feynman propagator can be written as

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}. \quad (\text{G.4})$$

This is a standard photon propagator which can be found in most of the field theory textbooks. However, it is also well-known that this propagator cannot satisfy the condition of the polarization summation in a correct way. This is clear since it cannot satisfy the following equation

$$k_\mu D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu}{k^2 - i\varepsilon} \neq 0 \quad (\text{G.5})$$

where the left hand side should be zero due to the Lorentz condition. Further, it cannot satisfy the Coulomb gauge condition, and therefore whatever they invent, there is no way to claim that the Feynman propagator is a right one. However, as will be seen below, Feynman propagator can reproduce the same T-matrix of electron-electron scattering as the one calculated from the correct propagator as long as the scattering particles are on the mass shell. Since the agreement of the T-matrices evaluated from the two propagators is entirely based on the free Dirac equation of electrons involved in the scattering process, the Feynman propagator cannot be applied for physical processes involving electrons which are not free or off the mass shell.

G.1.2 Calculation of $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$

Here, we should evaluate the denominator of the propagator $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ explicitly in order to avoid any confusions. First, we insert the vector potential with field quantization, and find

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} \frac{1}{\sqrt{4V^2\omega_k\omega_{k'}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k}',\lambda'}^\nu \times \\ \langle 0|T\left\{\left(c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-ikx_1} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{ikx_1}\right) \left(c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger e^{-ik'x_2} + c_{\mathbf{k}',\lambda'} e^{ik'x_2}\right)\right\}|0\rangle & \quad (\text{G.6}) \end{aligned}$$

which can be calculated to be

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu (e^{ikx}\theta(t) + e^{-ikx}\theta(-t)) \quad (\text{G.7})$$

where we define

$$x = x_1 - x_2, \quad \theta(t) = 1 \text{ for } t > 0, \quad \theta(t) = 0 \text{ for } t < 0. \quad (\text{G.8})$$

By noting the following complex plane integrations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - i\varepsilon} = \begin{cases} \frac{ie^{i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for } t > 0 \\ \frac{ie^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

we can rewrite $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ as

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - i\varepsilon} \times \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu. \quad (\text{G.10})$$

This is just the propagator of photon. Now, the problem comes up when we evaluate the summation of the polarization vector.

G.1.3 Summation of Polarization States

Up to now, we have presented the expression of the propagator evaluation of photon without making any comments on the field quantization, Now, we should quantize only the vector field A which depends on time. The Coulomb field A^0 is already solved from the constraint equation, and thus it cannot appear in the S-matrix expansion. Therefore, we have the condition that $\epsilon_0 = 0$. In addition, we should respect the Coulomb gauge condition

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda} = 0. \quad (\text{G.11})$$

Now, we are ready to construct the numerator of the propagator of photon, and we find

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^a \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^b = \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (\text{G.12})$$

which is the only possible solution for the summation of the polarization vector. Note that this can satisfy the condition of $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda} = 0$, because the left hand side of eq.(G.12) multiplied by k^a becomes

$$k^a \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^a \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^b = 0 \quad (\text{G.13})$$

while the right hand side can be calculated as

$$k^a \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\mathbf{k}^2} \right) = k^b - \frac{\mathbf{k}^2 k^b}{\mathbf{k}^2} = 0 \quad (\text{G.14})$$

and thus eq.(G.12) can satisfy all the conditions we have for the polarization vectors. Therefore, the propagator of photon D^{ab} becomes

$$D^{ab}(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\mathbf{k}^2} \right). \quad (\text{G.15})$$

G.1.4 Coulomb Propagator

The Coulomb part is solved exactly since it does not depend on time. Namely the equation of motion for the Coulomb part is a constraint equation which has nothing to do with the quantization of field. Note that the field quantization should always involve the time dependence of fields. Now, the equation of motion for the A^0 part can be written as

$$\nabla^2 A^0 = -e\bar{\psi}\gamma^0\psi \equiv -ej^0(x) \quad (\text{G.16})$$

which is a constraint equation. However, the right hand side is made of electron fields, and the quantization of the electron fields is already done. It should be noted that the Coulomb case is calculated from the first order perturbation theory since it arises from

$$H_C = e \int j^0(t, \mathbf{r}) A^0(\mathbf{r}) d^3r - \frac{1}{2} \int (\nabla A^0)^2 d^3r. \quad (\text{G.17})$$

In this case, the interaction Hamiltonian between two Dirac fields j_1^0 and j_2^0 becomes

$$H_C = \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{j_1^0(x_1) j_2^0(x_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3r_1 d^3r_2 \quad (\text{G.18})$$

which can be rewritten in terms of the momentum representation as

$$H_C = e^2 \int \frac{\tilde{j}_1^0(q) \tilde{j}_2^0(-q)}{\mathbf{q}^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (\text{G.19})$$

On the other hand, the propagator of photon should be calculated from the S-matrix expansion in the second order perturbation theory. Therefore, the Coulomb propagator is completely different from the photon propagator which is calculated from the S-matrix expansion. However, the Coulomb field interaction should be always considered for the scattering process since electrons are already quantized.

G.1.5 Correct Propagator of Photon

The correct propagator of photon is given in eq.(G.12), but if we consider the scattering process such as electron-electron scattering in which the scattering particles are all on the mass shell, then we should add the Coulomb scattering in which the Coulomb propagator is employed. Therefore, the total propagators of photon together with the Coulomb scattering become

$$\left\{ \begin{array}{ll} D^{Coul}(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} & A^0 - \text{part} \\ D^{ab}(k) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\mathbf{k}^2} \right) & \mathbf{A} - \text{part.} \end{array} \right. \quad (\text{G.20})$$

G.2 Feynman Propagator vs. Correct Propagator

Here, we discuss the equivalence and/or difference between the T-matrices which are calculated from Feynman and correct propagators. The discussion of the equivalence between them is usually found in old field theory textbooks [1, 2]. However, this equivalence proof is valid only if the propagators appear in the scattering processes with free electrons. Therefore, if there is a loop involved such as the fermion self-energy, then the expected equivalence cannot be valid any more. Later in this section, we discuss some physical effects which may arise from the T-matrix difference between the Feynman and the correct propagators.

G.2.1 Electron-Electron Scattering

As an example, we present the scattering T-matrices between two electrons in which one electron with its four momentum p_1 scatters with another electron with its four momentum p_2 , and after the scattering, we find two electrons with their momenta of p'_1 and p'_2 . The four momentum transfer is defined as $q = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$.

(a) Feynman Propagator

In the case of Feynman propagator as given in eq.(G.4), the T-matrix can be written in a straight forward way as

$$T^{(F)} = -\frac{e^2}{q^2} [\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}u(p_1) \cdot \bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}u(p_2)]. \quad (\text{G.21})$$

This is accidentally consistent with experiments.

(b) Correct Propagator

Now, we evaluate the T-matrix with the correct propagator of photon which is given by eq.(G.20). First, the T-matrix from the Coulomb part can be written as

$$T^{(C)} = \frac{e^2}{\mathbf{q}^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2). \quad (\text{G.22})$$

On the other hand, the T-matrix from the vector field A becomes

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} u(p_1) \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} u(p_2) - \bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_1) \frac{1}{\mathbf{q}^2} \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_2) \right]. \quad (\text{G.23})$$

Now, we make use of the free Dirac equations for two electrons at the initial and final states

$$\begin{aligned} (\not{p}_1 - m_1)u(p_1) &= 0, \quad \bar{u}(p'_1)(\not{p}'_1 - m_1) = 0, \\ (\not{p}_2 - m_2)u(p_2) &= 0, \quad \bar{u}(p'_2)(\not{p}'_2 - m_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

and thus we can rewrite

$$\bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_1) = \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) q_1^0, \quad \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_2) = -\bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) q_2^0 \quad (\text{G.25})$$

where $q_1^0 = E_1 - E_1'$ and $q_2^0 = E_2 - E_2'$. Therefore, $T^{(A)}$ becomes

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} u(p_1) \cdot \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} u(p_2) + \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \frac{q_1^0 q_2^0}{\mathbf{q}^2} \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) \right]. \quad (\text{G.26})$$

Note that one may be tempted to assume that $q_1^0 = -q_2^0 = q^0$ at this point. However, the energy conservation can be used only at the final stage of the calculation, and therefore, the evaluation of the T-matrix should be done without using the energy conservation. It should be noted that the on-shell scattering processes like the electron-electron scattering must conserve the energy, and therefore one can employ the equation $q_1^0 = -q_2^0$ when one calculates the cross section. Now, it is easy to check that the sum of $T^{(C)}$ and $T^{(A)}$ becomes

$$\begin{aligned} T^{(C)} + T^{(A)} &= -\frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) - \bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} u(p_1) \cdot \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} u(p_2) \right] \\ &\quad + \frac{e^2(q^0 q^0 + q_1^0 q_2^0)}{q^2 \mathbf{q}^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2). \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

As can be seen, the T-matrix calculated from the correct propagator has an extra-term which is not found in the T-matrix evaluated from the Feynman propagator. Therefore, there exists a clear difference between the two T-matrices in the electron-electron scattering case.

G.2.2 Right T-matrix from Feynman Propagator

Now, if one uses the energy conservation of $q_1^0 = -q_2^0 = q^0$, then the Feynman propagator can reproduce the right T-matrix for the electron-electron scattering cross section as one can find the equivalence proof in old textbooks [1, 2]. Indeed, the on-shell scattering case is justified because the energy conservation is taken into account for the whole system. This should be one of the strong reasons why people accepted the Feynman propagator. But it should be noted that the agreement of the Feynman propagator calculation with experiments should be accidental.

G.2.3 Loop Diagrams (Fermion Self-energy)

As one sees from the comparison between the Feynman and correct propagators, the use of free Dirac equations play a very important role. Therefore, it is most likely that the two propagators should give the very big difference for the fermion self-energy type diagrams in which intermediate fermions do not satisfy the free Dirac equations.

(a) Feynman Propagator

Using the Feynman propagator, the self-energy of fermion can be easily written as

$$\begin{aligned}\Sigma^{(F)}(p) &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) (-\not{p} + 4m) + \dots\end{aligned}\quad (\text{G.28})$$

which is just the self-energy contribution normally found in the textbooks.

(b) Correct Propagator

The self-energy of fermion with the correct propagator has never been calculated up to now, but we should evaluate it since it is very important to examine whether this self-energy contribution can agree with the normal self-energy contribution with the Feynman propagator. First, the Coulomb part does not contribute to the fermion self-energy because of the equal time operations, and thus we should only calculate the contribution from the vector potential part which can be written as

$$\Sigma^{(A)}(p) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^a \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^b \frac{\left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2}\right)}{k^2 - i\varepsilon}. \quad (\text{G.29})$$

What we have to calculate is whether the $\Sigma^{(A)}(p)$ should be the same as $\Sigma^{(F)}(p)$ or not. From the calculations, we see that it does not agree with the one calculated from the Feynman propagator. In this respect, there is no reason any more that we can employ the Feynman propagator for the calculation that involves the photon propagation unless all fermions are on the mass shell.

付録H Non-integrable Potential

When the non-integrable potential appears as the small perturbation on the Newton equation, what should be the best way to take into account this small potential effect?

H.1 Non-integrable Potential

Here we discuss the physical effects of the non-integrable potential. The additional potential from the new gravity model has the shape of $\frac{B_0}{r^2}$, and, therefore, we can write the non-integrable potentials into the simple shape in the following way

$$V_a(r) = \frac{q}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (\text{H.1})$$

where

$$q = \begin{cases} -6 & \text{for General Relativity} \\ 1 & \text{for New Gravity} \end{cases} . \quad (\text{H.2})$$

In this case, the differential equation for the orbit with the additional potential becomes

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{q}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2} . \quad (\text{H.3})$$

This equation can be solved exactly and the effect due to the correction appears in $\cos \varphi$ term and is written as

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \left(\frac{L_g}{\ell} \varphi \right)} \quad (\text{H.4})$$

where A_g and L_g are given as

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2}, \quad L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{qG^2M^2m^2}{c^2}} \equiv \ell\sqrt{1+\eta} \simeq \ell \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right). \quad (\text{H.5})$$

Here, the η is defined as

$$\eta \equiv \frac{qG^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \quad (\text{H.6})$$

which is a very small number. It is around 10^{-8} for the planet motion such as the earth or Mercury.

H.1.1 Effects of Non-integrable Potential on Solution

The solution of eq.(H.4) has a serious problem in that the orbit is not closed. This is quite well known that the potential with the non-integrable shape such as $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ gives rise to the orbit which is not closed. It is, of course, clear that this type of orbits should not happen in nature.

The abnormal behavior of the solution eq.(H.4) can also be seen from the following term

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right). \quad (\text{H.7})$$

It should be interesting to see that this term cannot be described in terms of the cartesian coordinates of $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. In fact, $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ term becomes

$$\cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right) = \frac{x}{r} \cos \frac{1}{2}\eta\varphi - \frac{y}{r} \sin \frac{1}{2}\eta\varphi \quad (\text{H.8})$$

and there is no way to transform the $\cos \frac{1}{2}\eta\varphi$ term into x , y coordinates even though we started from this cartesian coordinate. This is very serious since the solution expressed by polar coordinates cannot be written any more in the cartesian coordinates. This is related to the fact that the orbit is not closed due to the non-integrable potential effects.

H.1.2 Discontinuity of Orbit

The effect of the non-integral potential can be further seen as the discontinuity of the orbit trajectory since the orbit is not closed. In order to see this discontinuity of the orbit, we first start from the orbit solution with the non-integral potential, which is eq.(H.4)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \varphi}.$$

In this case, we find the radius r at $\varphi = 0$ and $\varphi = 2\pi$ as

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon}, \quad \varphi = 0 \tag{H.9}$$

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \pi\eta}, \quad \varphi = 2\pi. \tag{H.10}$$

Therefore the difference Δr becomes

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2} A_g \pi^2 \eta^2 \varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \tag{H.11}$$

for the Mercury orbit case of the general relativity as an example. This means that the orbit is discontinuous when φ becomes 2π . This is not acceptable for the classical mechanics, and indeed it disagrees with the observation. In addition, eq.(H.4) cannot generate the perihelion shift, and this can be easily seen from the orbit trajectory of eq.(H.4).

H.2 Perturbative Treatment of Non-integrable Potential

Here we should present a perturbative treatment of the non-integrable potential. This must be the only way to reliably treat the non-integrability in classical mechanics.

H.2.1 Integrable Expression

The equation for the orbit determination becomes

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{q}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2 \sqrt{1 + \eta} \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}. \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

Therefore, we can rewrite the above equation as

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (\text{H.13})$$

Here we note that $\eta = \frac{q}{\ell^2 c^2} (GmM)^2$ is a very small number which is of the order $\eta \sim 10^{-8}$. Now in order to keep the effect of the non-integrable potential in terms of integrable expression, we should make an approximation as

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi \simeq d\varphi. \quad (\text{H.14})$$

The reason why we should make this approximation is because we should consider the dynamical effect as the perturbation while the η in the right hand side of eq.(H.13) should only change the value of constants such as E or α in the differential equation. In this way, the equation to determine the orbit becomes

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \quad (\text{H.15})$$

which gives the right orbit solution. Now the orbit is closed, and the solution can be written as

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\text{H.16})$$

where A_g is given as

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1 + \eta). \quad (\text{H.17})$$

Note that the ε is also changed due to the η term, but here we can safely neglect this effect since it does not play any role for physical observables. Therefore, the effect of the additional potential is to change the radius A_g of the orbit even though this change is very small indeed. Now eq.(H.16) clearly shows that there is no perihelion shift, and this is very reasonable since the additional potential cannot shift the main axis of the orbit.

H.2.2 Higher Order Effect of Perturbation

Here we should estimate the higher order effect of the perturbation in eq.(H.13). Denoting the solution of eq.(H.16) by $r^{(0)}$

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

and the perturbative part of the radius by r' ($r = r^{(0)} + r'$), we can write the equation for r' as

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \quad (\text{H.18})$$

where the right side depends only on φ . Here, we should make a rough estimation and only consider the case in which the eccentricity ε is zero. In this case, the right side does not depend on the variable ε , and thus we can prove that the right side is zero. Therefore, the higher order correction of r' should be proportional to the eccentricity ε and can be written as

$$r' \simeq C_0 \eta \varepsilon A_g \quad (\text{H.19})$$

where C_0 should be some numerical constant. For the earth revolution, the value of ε is very small ($\varepsilon \simeq 0.0167$) and thus we can safely ignore this higher order perturbative effect.

H.3 Period Corrections from General Relativity

Here we discuss briefly the period corrections generated by the additional potential of the general relativity. The gravitational potential together with the additional potential from the general relativity is given as

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2. \quad (\text{H.20})$$

Therefore the Newton equation becomes

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3} \quad (\text{H.21})$$

where L_g^2 is defined as

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2M^2m^2}{c^2}. \quad (\text{H.22})$$

The solution of the differential equation is given by taking into account the perturbative treatment of the non-integrable potential

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\text{H.23})$$

where A_g is given as

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2}. \quad (\text{H.24})$$

Therefore, the period T can be determined when we integrate $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ over the orbit period as

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A_g^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (\text{H.25})$$

which can be calculated to be

$$\omega T = 2\pi(1 - 2\gamma). \quad (\text{H.26})$$

In this case, the correction ΔT to the period can be written as

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{GR} \simeq -2\gamma. \quad (\text{H.27})$$

H.3.1 Earth Revolution Period

For the earth revolution around the sun, the correction to the period T due to the general relativity becomes

$$\Delta T_{GR} = -3.8 \quad [\text{s/year}] \quad (\text{H.28})$$

which is in the wrong direction as compared to the observation in terms of the leap second delay. In addition, this value is, by far, too large compared to the leap second, and in fact, the observed value of the leap second is around $0.62 \quad [\text{s/year}]$. Therefore, the correction to the earth period from the general relativity should be completely ruled out from the observation.

H.4 Gravitational Wave

It is really a shame as a theoretical physicist that we have to make a brief explanation about the gravitational wave. It is beyond imagination that some group of people insisted that they observed a signal of the gravitational wave. Those people who claimed a “discovery” of the gravitational wave should be far from physicists, and their standard of understanding physics must be lower than the fourth grade student of university. The physical observation can be done only if the object should have any interactions with matters whatever it can be. However, the gravitational wave which is a classical wave has no interaction with any physical objects. This means that its observation of their claim does not make sense.

When a physical object can propagate in vacuum, then it must be a particle like photon whatever it may be, even though massless. This is confirmed from the vast amount of experiments, and by now, “the ether hypothesis” is completely excluded. In fact, all modern physics is based on the relativity principle, and there is no experiment which contradicts the relativity.

H.5 Predictions of New Gravity Model

By now, a new gravity model is constructed, and as a byproduct, there appears the additional gravitational potential. This is a very small term, but its effect can be measurable. Indeed, this is the relativistic effect which becomes

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \quad (\text{H.29})$$

for the earth revolution around the sun. On the other hand, the leap second of the earth revolution is found to be

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \sim 2 \times 10^{-8} \quad (\text{H.30})$$

which is just the same order of magnitude as the relativistic effect. Therefore, as we see later, it is natural that the leap second value can be understood by the additional potential of the new gravity model.

H.5.1 Period Shifts in Additional Potential

In the new gravity model, there appears the additional potential in addition to the normal gravitational potential. In the case of the earth revolution around the sun, this potential is written as

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \quad (\text{H.31})$$

where the second term is the additional potential [5]. Here, G and c denote the gravitational constant and the velocity of light, respectively. m and M correspond to the masses of the earth and the sun, respectively.

- **Non-integrable Potential :**

As discussed in the previous chapter, the additional potential should be a non-integrable, and therefore, the treatment should be done in terms of the perturbation theory. In this case, the Newton equation with the perturbative procedure of the additional potential can be solved and the period T of the revolution is written as

$$\omega T \simeq 2\pi(1 + 2\eta) \quad (\text{H.32})$$

where η is given as

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2}. \quad (\text{H.33})$$

Here, R is the average radius of the earth orbit. The angular velocity ω is related to the period T by

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{H.34})$$

The period shift due to the additional potential becomes

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (\text{H.35})$$

which is the delay of the period of the revolution [4, 5].

H.5.2 Period Shifts of Earth Revolution (Leap Second)

In the earth revolution, the orbit radius, the mass of the sun and the angular velocity can be written as

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7}. \quad (\text{H.36})$$

In this case, the period shift becomes

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8} \quad (\text{H.37})$$

Therefore, the period of the earth revolution per year amounts to

$$\Delta T_{N.G.} = 0.621 \text{ [s/year]} \quad (\text{H.38})$$

which is a delay. This suggests that the corrections must be necessary in terms of the leap second.

- Leap Second :

In fact, the leap second corrections have been made for more than 40 years. The first leap second correction started from June 1972, and for 40 years, people made corrections of 25 second. Therefore, the average leap second per year becomes

$$\Delta T_{N.G.}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ [s/year]} \quad (\text{H.39})$$

which agrees perfectly with the prediction of eq.(H.38).

● **Definition of Newcomb Time :**

Newcomb defined the time series of second in terms of the earth revolution period. However, the recent measurement of time in terms of atomic clock turns out to deviate from the Newcomb time [16]. This deviation should be due to the relativistic effects, and indeed this deviation can be understood by the additional potential of gravity.

付録I 相対性理論

物理学において相対性理論は最も重要な基礎理論である。それは『どの慣性系でも物理学は同じである』と言うものであり、もしこれが成り立たないとしたら、地球上で構築された理論模型が他の星の世界では予言能力を失う事になってしまうのである。幸い、現在までのあらゆる自然現象の検証結果はどの現象もこの相対性理論と矛盾していない事が証明されている。

ここでは相対性理論について基礎的な解説を行う。相対性理論においてはまず『慣性系』と言う概念を導入する。これは例えば地上の系を静止系 (rest frame) としてこれを一つの慣性系であるとする。そしてこの系から速度 v で等速直線運動をしている系を運動系 (moving frame) として、このどちらの系でも物理は同じであると言う事である。

この慣性系同士をつなぐ変換則が Lorentz 変換である。ここで『この Lorentz 変換は座標系の変換であり、座標の変換ではない』と言う事を強調して置こう。この事は非常に重要なポイントであるが、しかしながらこれをしっかり認識する事はそう易しい事ではないと言える。

I.1 慣性系

相対性理論においては慣性系の概念が最も重要である。従って、まずはこの慣性系と言う物理用語について解説しよう。今、地上の系を静止系 (R -系) としよう。地球は自転も公転もしているが、この事は相対性理論の解説に影響するわけではない。この場合、 R -系の座標と時間を $R(t, x, y, z)$ と表記しよう。

次にこの静止系に対して、速度 v で等速直線運動をしている運動系 (S -系) を $S(t', x', y', z')$ と表記しよう。相対性理論とはこの両系で運動方程式の形がすべて同じになっていると言う要請である。

I.1.1 Galilei の相対性理論

簡単のためにまずは Galilei の相対性理論を解説しよう．今，電車の系（運動系）が静止系に対して一定速度 v で運動しているとして電車が走る方向を x -軸としよう．ここで大切な事は，それぞれの座標系には観測者も同時に定義する事ができる事である．但し，電車は光速 c と比べてゆっくり動いているとしている．この時，2つの座標系には次の関係式がある．

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (\text{I.1})$$

これを Galilei 変換という．これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい．今，地上 (R-系) で質量 m の質点がバネに繋がれていてこのバネの振動の実験をしたとする．バネの伸びを x とすると

$$m\ddot{x} = -kx \quad (\text{I.2})$$

が運動方程式になる．ここで k はバネ定数である．電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると，Galilei 変換から明らかなように運動方程式が

$$m\ddot{x}' = -kx' \quad (\text{I.3})$$

となる．ここで x' はバネの伸びを表す．これは地上で行ったバネの実験と同じであり，その微分方程式の解は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (\text{I.4})$$

$$x' = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' \quad (\text{I.5})$$

となる．ただし，初期条件 ($t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$) をつけている．相対性理論はこれ以上の事は何も言っていない．この例を見てもわかるように，それぞれの系で観測者の存在を仮定しているが，これが相対性理論の本質である．

I.2 特殊相対性理論

S-系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz 変換により与えられている。今度の場合, R-系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時, S-系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり, 時間は別のものになる。それは, どの系でも観測者が定義されているので, これは観測者の時間 t' となっている。

I.2.1 Lorentz 変換

この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{I.6})$$

である。ここで γ は

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{I.7})$$

と定義されている。この式は Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になるべきであると言う要請を充たす事により導出されている。Lorentz 変換は速度 v が光速と比べて十分小さいと

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{I.8})$$

となり, Galilei 変換を含んでいる事がわかる。

I.2.2 場の理論模型は Lorentz 不変

現在, 量子電磁力学, 弱い相互作用, 強い相互作用そして重力とすべての場の理論模型は Lorentz 変換に対して不変となっている。これは第1章から第4章までのそれぞれの模型の Lagrangian 密度を見てもわかる事ではある。

I.2.3 Minkowski 空間

相対性理論において Minkowski 空間が議論されることが良くある。この場合、Minkowski は Lorentz 変換の不変量として 4 次元空間の微小距離の 2 乗 $(ds)^2$ を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (\text{I.9})$$

と定義したのである。これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{I.10})$$

に対して不変である事が確かめられる。Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\text{I.11})$$

としている。この時、 dx^μ , dx_μ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (\text{I.12})$$

として導入している。また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている。この拡張は確かに間違っていない。しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである。この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため、計量にはなっていない。

また $(ds)^2$ は Lorentz 変換の不変量ではあるが、これは結果であり条件ではない。この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である。相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり、変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている。これに対して、数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが、これは特に重要な問題ではない。

この事より、 $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は極めて難しい問題である事がわかる。この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが、物理学に取っては特に意味があるわけでもなく、むしろ不要であると言えよう。

I.3 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である。従ってこの方程式について、ここで議論すべき価値を見出す事が非常に難しいものである。計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない。さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合、その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である。この場合、元の $(ds)^2$ の式 (I.9) を使えば問題ないのである。よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても、それにより物理に対する影響が何処かに現われていると言うことはない。

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている。恐らく、この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが、しかしそれ以上の事は良く分からない。

いずれにしても、今後、物理学においては『一般相対性理論』と言う言葉は使われなくなるものと考えられる。相対性理論に一般も特殊もない事は以前から指摘されていた事でもある。

I.4 座標の変換と座標系の変換

これまで慣性系間の座標系変換に関して解説してきたが，ここでは座標の変換について簡単な説明を行おう．この場合，座標の変換と座標系の変換との違いを明確にしておこう．質点 P の座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ としよう．ここで，点 P の座標を定数 \mathbf{a} だけ平行移動しよう．この時，点 P は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (\text{I.13})$$

へと移動する．ここで古典力学の Lagrangian がこの平行移動に対して不変であるとしよう．すなわち

$$\delta L = L(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (\text{I.14})$$

である．この式から \mathbf{a} を微小量とすれば

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\text{I.15})$$

となる．これは Lagrangian 方程式から

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = 0 \quad (\text{I.16})$$

となる．ここで $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$ は運動量であるため，質点の平行移動が運動量保存則に対応している事がわかる．

● 座標系の変換

一方，座標系の変換の場合，点 P としては一つの点を考えている．これを静止系で P (t, x, y, z) とすれば，運動系では P (t', x', y', z') となり，この間の変換が Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{I.17})$$

となっている．

I.4.1 相対性理論における速度の和

相対性理論における速度 V_1 と速度 V_2 の和を求めよう．まず Lorentz 変換から

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

である，よって変換された系での速度は $V' = V_1$, $v = V_2$ として

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}} \quad (\text{I.18})$$

となり，これは単なる和ではない．勿論，速度 V_1 , V_2 が光速 c と比べて十分小さい場合，これはよく知られている式 $V = V_1 + V_2$ になっている．

ここで速度 V_1 が光速 c の場合，この速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c \quad (\text{I.19})$$

となって光速は不変である．

I.4.2 運動量の Lorentz 変換

質点のエネルギーと運動量 (E, \mathbf{p}) は Lorentz 変換により

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (\text{I.20})$$

と変換される．この時， $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ を計算すると $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ となり，一定値となる．この一定値は系の変換によらない量であり，質点を考える場合，その質量しかあり得ない事がわかる．従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (\text{I.21})$$

と書く事ができる．ここで，運動量 \mathbf{p} がその質量と比べて十分小さい場合，

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (\text{I.22})$$

となり，確かに非相対論の「分散関係式」が得られる事がわかる．

I.4.3 速度の和：正確な導出

相対性理論においては運動量が基本的な物理量となっていて，速度自体は基本的な物理量ではない．実際，運動量が p の場合，質量 m の質点の速度 V は

$$V = \frac{pc^2}{E} \quad (\text{I.23})$$

と定義されている．これは p が質量 m と比べて充分小さい時は

$$V = \frac{pc^2}{E} \simeq \frac{p}{m} \quad (\text{I.24})$$

となり，確かに古典論の場合と一致している．

ここでは運動量における Lorentz 変換の式

$$p_x' = \gamma \left(p_x + \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E + vp_x) \quad (\text{I.25})$$

により，速度の和の公式を導出して見よう．運動する慣性系から速度 $\left(\frac{p_x c^2}{E} \right)$ で放出された質点の速度 V は式 (I.25) から

$$V \equiv \frac{p_x' c^2}{E'} = \frac{\gamma \left(p_x + \frac{vE}{c^2} \right) c^2}{\gamma (E + vp_x)} \quad (\text{I.26})$$

となる．ここでこの式の分母・分子を E で割り算すると

$$V = \frac{\frac{p_x c^2}{E} + v}{1 + v \left(\frac{p_x}{E} \right)} \quad (\text{I.27})$$

となる．表記を合わせるため $V_1 = \frac{p_x c^2}{E}$, $V_2 = v$ としよう．よって式 (I.27) は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \quad (\text{I.28})$$

となり，確かに速度の和則が求められている．

I.4.4 運動方程式の変換不変性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしている事が相対性理論の基本原則である。ここでは、Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行こう。

● Newton 方程式と Galilei 変換

Galilei 変換の場合、変換則は

$$x = x' + vt', \quad t = t' \quad (\text{I.29})$$

である。この式で Newton 方程式を変換してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (\text{I.30})$$

となり、Newton 方程式は Galilei 変換に対して不変である事がわかる。

● Newton 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換の場合、

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (\text{I.31})$$

となっている。従って、座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad (\text{I.32})$$

さらに2階微分は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2 x'}{dt'^2}}{\gamma^3\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)^3} \neq \frac{d^2 x'}{dt'^2} \quad (\text{I.33})$$

となり、Newton 方程式は全く別物になっている。すなわち、Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない。

- Maxwell 方程式と Galilei 変換

物質が無い時，Maxwell 方程式は電場 E に対して

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.34})$$

となっている．Galilei 変換の式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (\text{I.35})$$

となるので

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \nabla'^2 \right] \mathbf{E}' = 0 \quad (\text{I.36})$$

と変換され，Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不変ではない事がわかる．

- Maxwell 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (\text{I.37})$$

であるから，Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変である．

I.5 運動系の時間刻みは遅れるか？

光速に近い速度で動いている運動系の時間刻み $\Delta\tau$ が地上における時間刻み Δt とずれるかどうかを考察しよう。ここでは思考実験における観測量である時間差 Δt により系の時間の遅れがあるかどうかを検証しよう。

I.5.1 地上の系からみた電車の系の時間刻み

速度 v で等速直線運動をしている電車（運動する慣性系）を考えよう。この場合、線路は直線である。ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう。ここで、電車の中の観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう。そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 ($2\Delta\tau$) を正確に測定できたとしよう。この場合

$$\ell = c\Delta\tau \quad (\text{I.38})$$

である。一方、地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる。この場合、その時間を ($2\Delta t$) としよう。従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - (c\Delta\tau)^2} = v\Delta t \quad (\text{I.39})$$

となっている。よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (\text{I.40})$$

となり、電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている。

I.5.2 電車の系からみた地上の系の時間刻み

同様の思考実験を電車の人から行ってみよう。地上が電車に対して動いているように見える速度は ($-v$) となっている。それは Lorentz 変換を逆に解くと

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (\text{I.41})$$

となっていて確かに ($-v$) となっている。今度の場合、地上において鏡に向かってレーザービームを放ち、それを計測して時間を測る。この場合、電車の人から見ると

これまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta \tau \quad (\text{I.42})$$

となる．この結果である式 (I.40) と式 (I.42) はお互いに矛盾している． Δt と $\Delta \tau$ は思考実験における観測量なので，何かが間違っている事は確かである．

I.5.3 思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の間違いは t 秒後の電車の座標が $x' = vt$ としてしまった事が原因である．電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は，Lorentz 変換の式

$$x' = \gamma(x + vt) = \gamma vt \quad (\text{I.43})$$

で与えられる．従って $v\Delta t \Rightarrow \gamma v\Delta t$ ， $c\Delta t \Rightarrow \gamma c\Delta t$ と書き直す必要がある．すなわち式 (I.40) は

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t = \Delta t$$

となり，時間刻みの遅れがない事が証明されている．

I.5.4 直感的な理解

これまで思考実験を考えて，運動系における時間刻みが静止系の時間刻みとどう関係しているのかに関して，様々な考察を行ってきている．しかしながら，実はこの事は極めて単純な事である事が以下に示されている．

実際は，運動系の時間刻み $\Delta \tau$ が静止系の時間刻み Δt (例えば 1 秒) と同じである事は簡単に証明できる事である．それは時間刻み $\Delta \tau$ にしてもミュオンの寿命 τ にしてもこれらは定数である．実際，1 秒は地球公転周期 T から決められている．従って，これら定数は Lorentz スカラーであり Lorentz 変換の影響を受ける事はない．つまり運動系の $\Delta \tau$ は静止系の Δt と全く同じである事が分かる．

さらに蛇足となるが，地球公転周期 T は運動方程式の解から求められている．そして運動方程式はどの慣性系でも同じである．よって 周期 T はどの系で観測しても同じであり，従って時間刻み Δt が系によって変わる事はない．

I.6 相対性理論の応用例

ここで相対性理論が実際に応用されている場合の具体例を幾つかあげておこう。相対性理論は系の変換をしているだけなので、そこからダイナミックスの情報が得られると言う事はない。

I.6.1 光のドップラー効果

星が高速 v で遠ざかっている時、その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける。それは、光のドップラー効果としてよく知られている現象であるし、また観測もされている。この場合、星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (\text{I.44})$$

となり、光の運動量は減少している。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (\text{I.45})$$

となるので光の波長は大きくなり、これを赤方偏移 (red shift) という。可視光では赤っぽい光は波長が長く、青っぽい光は波長が短いからである。

また場の理論で赤外 (infra-red) 発散、紫外 (ultra-violet) 発散という言葉が良く出てくるが、この発散は物理量の運動量積分から来ている。運動量がゼロの時に積分が無限大になる時、赤外発散と呼び、運動量が大きい時の発散を紫外発散と呼んでいる。これは単なるネーミングであり、物理的な意味は全く無い。

I.6.2 大気圏で生成されたミューオンの走行距離

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突してミューオンを生成する場合がある。ミューオンはその寿命 τ_0 が $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度の不安定な素粒子である。この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (\text{I.46})$$

と書かれている。この場合、崩壊幅 Γ は Lorentz 不変な物理量である。従って、寿命も Lorentz 変換に対して変化する事はない。

● ミューオンの走行距離 L : ここでミューオンの走行距離を計算しよう。その走行距離 L は Lorentz 変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ $= \gamma vt'$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (\text{I.47})$$

である。ここでエネルギーが $1 \text{ GeV}/c^2$ のミューオンが上空で生成された時、 $v \simeq c$ であり、また $\gamma \simeq 10.6$ である。従って、このミューオンの走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (\text{I.48})$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

I.6.3 大型加速器実験における不安定粒子

大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式 (I.47) によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

関連図書

- [1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)
- [2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (Addison-Wesley,1967)
- [3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)
- [6] C.N. Yang and R.L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,” *Phys. Rev.* vol. 96, pp. 191–195, Oct. 1954.
- [7] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Cote, P. Pires, and R. de Turreil, “Parametrization of the Paris N-N potential,” *Phys. Rev. C.* vol. 21, pp. 861–873, Mar. 1980.
- [8] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Cote, P. Pires, and R. de Turreil, “Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential,” *Phys. Lett. B.* vol. 101, pp. 139–140, May. 1981.
- [9] R. Machleidt, K. Holinde, and Ch. Elster, “The bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction,” *Phys. Rep.* vol. 149, pp. 1–89, May. 1987.
- [10] R. Machleidt, *Adv. Nucl. Phys.* 1989; 19: 189.

- [11] A. Bohr and B.R. Mottelson, "Nuclear Structure" (Vol. 1), (World Scientific, 1998)
- [12] D. Kiang, M.A. Preston and P. Tip, "One-Boson-Exchange Potential and Nuclear Matter," Phys. Rev. vol. 170, pp. 907–915, Jun. 1968.
- [13] R.D. Haracz and R.D. Sharma, "Two-Boson-Exchange Effects in Nucleon-Nucleon Scattering," Phys. Rev. vol. 176, pp. 2013–2018, Dec. 1968.
- [14] M.H. Partovi and E.L. Lomon, "Field-Theoretical Nucleon-Nucleon Potential," Phys. Rev. D. vol. 2, pp. 1999–2032, Nov. 1970.
- [15] W.R. Wortman, "Two-Pion-Exchange Contributions to Nucleon-Nucleon Scattering," Phys. Rev. vol. 176, pp. 1762–1768, Dec. 1968.
- [16] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).