

力学の上達法

藤田 丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

『物理の上達法』を書いた後「これは研究者用の本ですね」と言われて、確かにそうかも知れないと思い至った。学部生にとってこの本は全くと言って良い程、参考にはならないかも知れない。しかし物理を理解したいと思う若者を何らかの形で支援するためには、基礎的な物理に関する『上達法』を書くべきであろうと考え始めて、筆を執っている。

この場合、やはり基礎になるのは自分が大学で行った講義となるであろう。従って、ここでは力学についての上達法を書いて行こう。しかしながら、大学での講義の場合、学生の反応を見ながらその講義内容を隨時、変えて行く事ができたものだが、小ノートを書く場合、この点をどうしたら良いのか今一つわからない。勿論、講義においても、理解が早い学生と遅くてもしっかり理解できる学生が等分にいるため、反応を見ながらと言ってもどの層をターゲットにするかで常に難しさはあり、そう単純ではない。

その意味では誰にでも通用するような上達法は存在しないと言えよう。しかしそれにもかかわらず、基本的な手法において、何らかの形で例え少しでもプラスになるような、そう言う『上達法』を書く事は可能であろうと思っている。

昔 1960 年代の後半 , 高校時代の物理の試験で 100 点以外取ったことがないと言う親友がいた . 模擬試験でも全国で 10 番以内に常に入っていたと言う受験の天才である . さらに東大理一の進振り成績で 10 番前後であった事からしても , 彼が超秀才であることは間違いない . その彼が大学 3 年生のある日 , 中央線快速電車の中で『物理が全くわからない』と言い出したのである . 田舎者の自分には何が何だかわからない程 , 仰天した事は良く覚えている . 今となってはその原因が何処にあったのか推測はできている . この友人は受験問題における解法を熟知していたため , どのような問題でも確実に解く事ができたのであろう .

しかしこれは物理を理解する事とは無関係である . 型にはまった問題を正確に解く事と自然を理解する事とはほとんど直交している . 実際 , 大学においても単位を取得するために試験をするとしたならば , 入試と似たような状況が起こっている可能性は充分あると思われる . この場合 , 大学における試験でも受験のように解き方を覚えて対応したら , 物理は非常につまらないものになってしまうであろう .

物理は自然を理解するための学問である . この場合 , 物理を深く理解するためにはどうしたら良いのかと言う問題はそう単純ではない . 例えば , 電磁気学の教科書を複数回読んだりしてその内容をほとんど覚えてしまったとしても , 物理を深く理解する事にはあまり繋がって来ないものである .

それでは、一体、どうしたら良いのであろうか？一番大切な事は、自然現象と物理の方程式とをうまく関連付ける作業を行う事であろう。そのためには演習問題を解く事が物理を理解するためのほとんど唯一の方法であると言えよう。しかもこれを何回か解かないとなかなか自分のものになってしまはくれないのである。そしてこの物理の基礎トレーニングを常に使う事によって、少し進歩する可能性が出てくると考えている。

その代り自分で方程式を解いて『地球の公転が何故、平面上を運動しているのか』、そして『その軌道が何故、橢円になったのか』と言う事を確かめると物理が本当に楽しくなるものである。また『量子力学的な物理過程は何故、確率的なのか』と言う事が分かると自然現象をみる見方がより深くなる事は間違いない事である。

最初は電磁気学と量子力学についての上達法も一緒に書き入れるつもりであったが、これは中止としている。構想がまとまらないのである。

目 次

第1章 力学の基礎	6
1.1 Newton 方程式	6
1.1.1 座標 r が時間の関数	6
1.1.2 Newton 方程式から何がわかるのか?	7
1.1.3 単振動	7
1.1.4 単振動を解く (1)	8
1.1.5 単振動を解く (2)	9
1.2 座標系	9
1.2.1 極座標の基底	10
1.2.2 極座標のベクトル表示	10
1.3 回転座標系	12
1.3.1 回転座標系での運動エネルギー	12
1.4 地表での運動とコリオリ力	13
1.4.1 回転系での Newton 方程式	13
1.4.2 コリオリ力の性質	13
1.4.3 東京での Newton 方程式	14
1.4.4 地上 100 mからの物体落下	14
1.4.5 フーコーの振り子	15
1.5 保存力とその起源	16
1.5.1 保存力とは何か?	16
1.5.2 保存力の起源	16
1.5.3 保存力は仕事をしない!	17
1.5.4 非保存力の例題 (1)	18
1.5.5 非保存力の例題 (2)	19
第2章 Lagrange 方程式	20
2.1 Lagrangian の定義	20
2.1.1 一般座標	21

2.1.2 一般座標の Lagrange 方程式導出	21
2.1.3 一般座標での Newton 方程式	22
2.2 Lagrange 方程式の導出：最小作用の原理	24
2.2.1 変分法の境界条件	24
第3章 運動方程式の解法	25
3.1 単振子の運動	25
3.1.1 楕円積分	26
3.1.2 エネルギー保存則	27
3.1.3 エネルギー保存則を用いた調和振動子の解	28
3.2 極座標系の運動方程式	29
3.2.1 加速度	29
3.3 Kepler 問題	30
3.3.1 運動は平面	30
3.3.2 2次元極座標でのエネルギー E	31
3.3.3 軌道は楕円	31
3.3.4 面積速度一定	33
3.3.5 周期の2乗が長半径の3乗に比例	33
3.3.6 直接積分による周期	34
3.4 3次元調和振動子の運動力学	35
3.4.1 運動方程式	35
3.4.2 2次元極座標での運動方程式	35
3.4.3 デカルト座標での3次元調和振動子	37
3.4.4 2つの楕円の相違点	37
3.4.5 楕円の関数形	38
3.5 太陽系外小惑星 (1I/2017 U1)	40
3.5.1 太陽系外小惑星の速度	40
3.5.2 太陽系外小惑星の軌道	41
第4章 振動論	42
4.1 何故、調和振動子となるのか？	42
4.1.1 一般的なポテンシャル	42
4.2 強制振動	43
4.2.1 強制振動	43
4.2.2 $F(t) = 0$ の場合の一般解 x_0	43

4.2.3 特殊解 x_1	44
4.2.4 方程式 (??) の解	44
4.2.5 共鳴現象	45
4.2.6 強制振動の方程式の別解	45
4.3 Virial 定理	46
4.3.1 Virial 定理の証明	46
4.3.2 Virial 定理の例題 (1)	47
4.3.3 Virial 定理の例題 (2)	47
第 5 章 剛体の運動	48
5.1 回転座標系	48
5.1.1 回転座標系 \dot{r} の計算	48
5.2 剛体の回転運動	50
5.2.1 剛体の運動エネルギー	50
5.3 剛体の回転エネルギー	51
5.3.1 連續極限	51
5.4 慣性モーメント I_{ij}	52
5.4.1 慣性モーメントの物理的意味	52
5.4.2 慣性モーメントの例題	53
5.5 剛体の運動	54
5.5.1 Euler 方程式	54
5.5.2 地球の自転軸の歳差運動	56
第 6 章 コマの力学	57
6.1 コマの運動	57
6.1.1 座標系の設定	57
6.1.2 対称コマのエネルギー	58
6.2 対称コマの運動方程式	58
6.2.1 対称コマの θ は一定	59
6.3 重力場中のコマの運動	60
6.3.1 コマの運動方程式	60
6.3.2 コマの運動範囲	62
6.4 歳差運動	63
6.4.1 $x_2 \leq \frac{b}{a}$ の時	63
6.4.2 $x_1 \leq \frac{b}{a} \leq x_2$ の時	64

6.4.3 章動	64
6.5 Euler 角と回転角速度の解説	65
6.5.1 φ の定義	65
6.5.2 θ の定義	65
6.5.3 ψ の定義	66
6.5.4 角速度 ω の x_1, x_2, x_3 軸の成分	66
第 7 章 準古典近似の物理	68
7.1 Hamilton-Jacobi の方程式	68
7.1.1 作用の修正	68
7.1.2 Hamilton 方程式	69
7.1.3 時間に依らない Hamilton-Jacobi の方程式	70
7.2 Sommerfeld の量子化法	72
7.2.1 Sommerfeld 量子化の規則	72
7.2.2 クーロンポテンシャル ($V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$) のエネルギー	73
7.2.3 調和振動子 ($V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$) のエネルギー	73
7.2.4 井戸型ポテンシャルのエネルギー	74
7.2.5 δ 関数ポテンシャル [$V(x) = -V_\delta\delta(x)$] のエネルギー	75
7.3 WKB 法	76
7.3.1 トンネル効果	76
7.3.2 クーロン障壁の透過率	77
第 8 章 電磁場中の荷電粒子	79
8.1 荷電粒子と電磁場の相互作用	79
8.1.1 全微分項と作用	80
8.2 運動方程式	81
8.3 一様磁場下の電子の運動	82
第 9 章 古典力学の散乱理論	84
9.1 剛体との弹性散乱	84
9.2 Rutherford 散乱	86
9.2.1 角運動量の保存	86
9.2.2 φ_0 の計算	87

第 10 章 力学の相対論効果	89
10.1 重力付加ポテンシャル	89
10.1.1 非可積分ポテンシャル	90
10.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない！	91
10.1.3 軌道の不連続性	91
10.1.4 軌道の不連続性と水星近日点	92
10.2 非可積分ポテンシャルの摂動計算	93
10.2.1 摂動計算の最低次項	94
10.2.2 摂動計算の高次項	94
10.3 新しい重力理論の予言	95
10.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ	95
10.3.2 地球公転周期のズレ（うるう秒）	96
10.3.3 うるう秒の起源	96
第 11 章 水星近日点への惑星効果	97
11.1 水星近日点への惑星の重力効果	97
11.1.1 惑星運動は同一平面	98
11.1.2 水星の運動	98
11.2 惑星効果の近似的評価	99
11.2.1 Legendre 展開	99
11.2.2 逐次近似法	100
11.2.3 特殊解	100
11.3 水星近日点に対する惑星の効果	101
11.3.1 数値計算	101
11.3.2 惑星運動の 1 周期の平均	102
11.4 数値計算の結果	103
11.4.1 100 年間の δ の値	103
11.4.2 観測値との比較	103
第 12 章 初等量子論	104
12.1 量子力学の発見	104
12.1.1 Schrödinger 方程式の目的は何か？	105
12.1.2 状態関数 ψ とは？	106
12.1.3 期待値	106
12.2 古典力学の方程式の導出	107

12.2.1 Ehrenfest の定理	107
12.3 量子力学の Virial 定理	109
12.3.1 Virial 定理の証明	109
12.4 Zeeman 効果と Lorentz 力	111
12.4.1 Zeeman 効果の Hamiltonian	111
12.4.2 Lorentz 力	112
12.4.3 Zeeman 効果	113
12.4.4 摂動論	113
12.5 スピンの歳差運動	115
12.5.1 スピン期待値の時間発展	115
12.5.2 Euler 方程式との対応	116
第 13 章 量子論における散乱理論	117
13.1 散乱振幅 $f(q)$	117
13.1.1 伝搬関数	118
13.1.2 Lippmann-Schwinger 方程式の導出	120
13.1.3 T 行列	120
13.2 微分断面積 $(\frac{d\sigma}{d\Omega})$	121
13.2.1 散乱振幅の求め方 : Born 近似	121
13.3 Born 近似による Rutherford 散乱断面積	122
13.4 部分波展開	123
13.5 Eikonal 近似法	124
13.5.1 Optical Theorem	126
13.6 多重散乱理論	127
13.6.1 高エネルギー陽子-陽子散乱	127
13.6.2 高エネルギー陽子-原子核散乱	128
13.6.3 Glauber 理論	128
13.6.4 陽子-原子核の散乱断面積	129
第 14 章 相対性理論	131
14.1 慣性系	131
14.1.1 Galilei の相対性理論	132
14.2 特殊相対性理論	133
14.2.1 Minkowski 空間	133
14.2.2 一般相対性理論	134

14.2.3 座標の変換と座標系の変換	135
14.2.4 相対性理論における速度の和	136
14.2.5 運動量の Lorentz 変換	136
14.2.6 速度の和：正確な導出	137
14.3 運動方程式の変換不变性	138
14.4 運動系の時間刻みは遅れるか？	140
14.4.1 地上の系からみた電車の系の時間刻み	140
14.4.2 電車の系からみた地上の系の時間刻み	140
14.4.3 思考実験の何処が間違いか？	141
14.4.4 直感的な理解	141
14.5 相対性理論の応用例	142
14.5.1 光のドップラー効果	142
14.5.2 大気圏で生成されたミューオンの走行距離	143
14.5.3 大型加速器実験における不安定粒子	143
14.6 あとがき	144
付録 A 数学公式集	145
A.1 基本公式	145
A.1.1 デルタ関数 $\delta(x)$ とクロネッカーデルタ δ_{ij}	145
A.1.2 ベクトルの内積と外積	145
A.1.3 ベクトルの公式	146
A.1.4 三角関数	146
A.1.5 指数関数と対数関数	147
A.1.6 テイラー展開	147
A.2 物理でよく使う積分公式	148
A.2.1 Exponential の積分	148
A.2.2 ガウス積分	148
A.2.3 その他の積分公式	148
A.2.4 n 次元球の体積	149
A.3 微分演算公式と座標系	150
A.3.1 直交座標系 (x, y, z)	150
A.3.2 極座標系 (r, θ, φ)	150
A.4 行列	151
A.4.1 行列の積	151
A.4.2 エルミート行列	151

A.4.3	エルミート行列の固有値は実数	152
A.4.4	エルミート行列の固有関数の直交性	152
A.4.5	ユニタリー行列	153
A.4.6	実対称行列の対角化可能性の証明	153
A.5	オペレータの固有値と固有関数	154
A.5.1	固有値問題	154
A.5.2	同時固有関数	154
A.6	行列式	155
A.6.1	行列式の定義	155
A.6.2	トレースの定義 : Tr	155
A.6.3	$\det(A) = \exp(\text{Tr} \ln A)$ の証明	156
A.7	複素数と複素積分	157
A.7.1	複素数 z の定義	157
A.7.2	解析関数	157
A.8	線積分と面積分	158

第1章 力学の基礎

大学初年度で学び始める物理は力学(古典力学)である。これは力学が一番、簡単である事がその主な理由であろう。力学は Newton 方程式によって記述されている。残念ながらこれは物理学の体系からしたら基本方程式ではないが、しかし日常的に見られる現象の多くは Newton 力学で理解されている。

1.1 Newton 方程式

Newton 方程式は 2 階の微分方程式である。このため物理を勉強するためには微分と微分方程式を解く事には充分慣れている事が必要条件となっている。必要な数学の公式は付録に入れておこう。ここで Newton 方程式を書いておこう。これは

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

である。 m は今、考えている質点の質量である。 \mathbf{r} はその質点の座標を表している。 $U(\mathbf{r})$ はポテンシャルと言われるものである。力 \mathbf{F} が何故ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ の微分で書かれているのかと言う問題はそう単純ではない。これは Newton 方程式が量子力学の Schrödinger 方程式からその近似式として導かれている事と関連している。ちなみに、量子力学にはポテンシャルと言う概念は存在しているが、『力』と言う概念は基本的な物理量とはなっていなく、Schrödinger 方程式に出てくることはない。

1.1.1 座標 \mathbf{r} が時間の関数

Newton 力学では座標 \mathbf{r} が時間の関数となっているとしている。 $\dot{\mathbf{r}}$ はその座標を時間で微分すると言う意味である。すなわち

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.2)$$

である。また $\ddot{\mathbf{r}}$ は時間の 2 階微分を表している。すなわち

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.3)$$

である。それでは F は何を表しているのであろうか？これは質点に働く力である。当然、これは何か他の物質があって、それが考えている質点に力を及ぼしている事に対応している。

1.1.2 Newton 方程式から何がわかるのか？

Newton 力学で定番となっている問題は振り子やバネなどの微小振動の問題であろう。振り子の場合、地球の重力が質点に働くため、振子は左右の運動を一定の周期で振動する。バネの場合は、質点にバネの力が働くためこの質点はやはり一定の周期で微小振動をする事になる。この運動は運動方程式を解くと分かるように、単振動と言われている運動をしている。この運動方程式の解からその周期など周期運動の性質を知る事が出来る。

1.1.3 単振動

それでは単振動とは具体的にどういう運動なのだろうか？まずは、バネの運動の Newton 方程式（1次元運動）を書いて見よう。これは

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1.4)$$

となっている。この場合、 x は質点の変位座標を表している。 m はバネの先につけてある質点の質量であり、 k はバネ定数である。この場合、

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{但し, } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

となる。 ω を上記のように定義したのは後で、この量が運動の振動数と関係してくるからである。先に式だけ書いて置くと、この ω は運動の周期 T と

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.6)$$

と関係づけられている。この式は勿論、運動方程式を解いて、その解を検証して始めてわかる事である。但し、以降はこの式を覚えておいた方が良いかも知れない。この単振動する運動の事を調和振動子（Harmonic Oscillator）と呼んでいる。

1.1.4 单振動を解く (1)

式 (1.5) の微分方程式を解いて見よう。これは見かけ程は易しくはない。一番簡単な方法は解の形を予測して、そこに代入して見る事であろう。方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.7)$$

の解は $x = Ae^{\mu t}$ と予想できる。実際、これを代入して見よう。

$$A\mu^2 e^{\mu t} + A\omega^2 e^{\mu t} = 0 \quad (1.8)$$

ここで A も $e^{\mu t}$ もゼロになる事はないのでこれは割り算されて

$$\mu^2 = -\omega^2 \quad (1.9)$$

となる。この解は勿論、

$$\mu = \pm i\omega \quad (1.10)$$

となっている、確かに解が求められたことになっている。これより、单振動の微分方程式の一般解は

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (1.11)$$

となっている。 C_1, C_2 は定数である。しかしこの x は複素数になっているように見える。それで Euler の公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (1.12)$$

を用いて式 (1.11) を書き直すと

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t = A_3 \sin(\omega t + \delta) \quad (1.13)$$

となる。 A_1, A_2 などは初期条件により決まる定数である。この式から運動は周期的であることが分かる。この式から周期は $T = \frac{2\pi}{\omega}$ となっている事が分かる。

1.1.5 単振動を解く(2)

上記の方法は簡単で実用的である事は確かであろう。しかしこれで本当に充分なのか心配する学生が少なくはない。それで式(1.7)の別の解き方を紹介しよう。まず、次の恒等式を用いる。

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha \right) x = e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} (e^{\alpha t} x) \quad (1.14)$$

この証明は具体的に計算すればすぐに検証できる。これを使うと式(1.7)は

$$e^{i\omega t} \frac{d}{dt} \left(e^{-i\omega t} e^{-i\omega t} \frac{d}{dt} (e^{i\omega t} x) \right) = 0 \quad (1.15)$$

と書き換える事が出来る。この場合、最初の微分が簡単に外れて

$$e^{-2i\omega t} \frac{d}{dt} (e^{i\omega t} x) = C_0 \quad (1.16)$$

となる。 C_0 は定数。この式の微分も直ちにはずれて

$$x = \frac{C_0}{2i\omega} e^{i\omega t} + C_3 e^{-i\omega t} \quad (1.17)$$

となる。定数は任意なのでこの式は先に求めた解(1.11)と一致している。

1.2 座標系

Newton 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\nabla U(r) \quad (1.18)$$

である。これはデカルト座標では単純であるが、極座標ではそう簡単な形にはなっていない。この極座標の表式はベースの変換により、書き換える事が出来る。デカルト座標で

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (1.19)$$

とする時、 \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = (x, y, z) \quad (1.20)$$

と書かれている。

1.2.1 極座標の基底

デカルト座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) で表すと

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.21)$$

となる。一方、極座標の基底 $[e_r, e_\theta, e_\varphi]$ はデカルト座標の基底と

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (1.22)$$

と結びついている。

1.2.2 極座標のベクトル表示

座標 r を極座標で表すと

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (1.23)$$

である。この場合、その微分が結構、面倒である。ここで極座標の基底 $[e_r, e_\theta, e_\varphi]$ の時間微分を書いておこう。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1.24)$$

従って r の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (1.25)$$

と書かれている。

\ddot{r} はさらに複雑になるが微分をすれば求める事が出来る。結果だけ書いて置くと

$$\ddot{r} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (1.26)$$

である。ここで $(a_r, a_\theta, a_\varphi)$ は

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.27)$$

である。コメントであるが、この上式は Lagrange 方程式で計算すると非常に簡単に求める事ができる。これは後程、議論しよう。

1.3 回転座標系

地球は自転しているため地表での物理は地球の自転の影響を少し受けている。これは回転座標系における方程式が静止系とは異なる見かけ上の力が現われるからである。ここではこの物理を簡単に解説しておこう。回転座標系に関する詳しい計算は第5章で解説する。今、静止系の座標を (X, Y, Z) として、これを φ だけ回転した回転系の座標を (x, y, z) としよう。以降の議論では、回転を Z 軸回りにして議論を進めて行く。静止系と回転座標系の間には

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}, \quad \text{但し } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

の関係がある。

1.3.1 回転座標系での運動エネルギー

ここで、 $\dot{\mathbf{r}}$ を計算してみよう。簡単な計算で

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.29)$$

となることがわかる。ここで系の回転角速度ベクトルを

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi}) \quad (1.30)$$

とした。静止系での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 \quad (1.31)$$

なので、これを回転系での変数 \mathbf{r} で書くと回転系での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (1.32)$$

となっている。従ってこの場合の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - U(\mathbf{r}) \quad (1.33)$$

である。 $U(\mathbf{r})$ は地表での重力ポテンシャルである。

1.4 地表での運動とコリオリ力

地球の自転により、地表での力学の方程式には重力以外の見かけの力としてコリオリ力と遠心力が現われている。この力による影響はそれ程、大きくはないが観測可能な物理量となっている。ここではコリオリ力に関連した物理を簡単に解説しよう。地球自転における遠心力の影響は重力加速度を少し変える程度であり、地球自転による直接の遠心力効果を見るのは難しいであろう。

1.4.1 回転系での Newton 方程式

回転系での Newton 方程式の導出は式 (1.33) を使って実行する。ここではその結果だけを書いておこう。質点 m に対する Newton 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \quad (1.34)$$

となっている。力 \mathbf{F} は $\mathbf{F} = -\nabla U(r)$ である。

ここで右辺の第1項がコリオリ力であり、第2、3項が遠心力となっている。また最終項の \mathbf{F} は外から与えられた力を表している。地表での重力の場合、 \mathbf{F} は一様重力であり $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$ となっている。

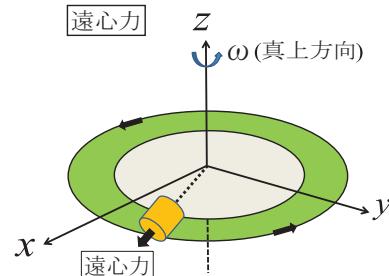


図 1.1: 遠心力

1.4.2 コリオリ力の性質

式 (1.34) のコリオリ力は速度 $\dot{\mathbf{r}}$ に依っているが、しかしあエネルギーが失われる事はない。これは Lorentz 力の場合と同じである。実際、エネルギー積分を行うと

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} &= 2m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + \dots \\ \therefore \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}^2) &= 0 + \dots \end{aligned}$$

となり、コリオリ力はエネルギーには効いてこない事が分かる。

1.4.3 東京での Newton 方程式

東京での運動方程式を求めるためには式 (1.34) をさらに回転して緯度 θ_0 での方程式に移す必要がある。ここでは簡単化のために遠心力を無視して、コリオリ力のみを取り出して議論しよう。まず、座標系として z -軸を鉛直上向きとする。また x -軸を南向き y -軸を東向きとしよう。この時、質量 m の質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \theta_0 \quad (1.35)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} \sin \theta_0 - 2m\omega\dot{z} \cos \theta_0 \quad (1.36)$$

$$m\ddot{z} = -mg \quad (1.37)$$

となる。但し、 ω は地球の自転の角加速度で

$$\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (1.38)$$

であり、 ω^2 の項は無視している。また θ_0 は東京の緯度で $\theta_0 = 36$ 度としている。

1.4.4 地上 100 m からの物体落下

地上 100 m から質量 m の物体を落下させた時、この物体は真下から東に少しずれる。この場合、 x, y 方向の速度はゼロとして充分であり、また $\dot{z} = -gt$ なので運動方程式は

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{z} \cos \theta_0 = 2\omega g \cos \theta_0 t \quad (1.39)$$

となる。この方程式はすぐ解けて

$$y = \frac{1}{3}\omega g \cos \theta_0 t^3 \quad (1.40)$$

と求まる。地上 100 m から物体を落下させた時、地表に届く時間は約 $t_0 \simeq 4.5$ s なので、コリオリ力によって物体は東に約 $y \simeq 0.02$ m だけずれている。

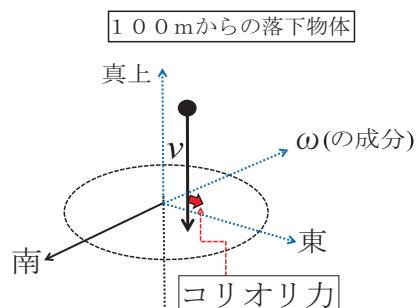


図 1.2: 100 m からの落下物体

1.4.5 フーコーの振り子

振り子が $x-y$ 平面で単振動をしている場合を考えよう。この時、質点 m に対する Newton 方程式はコリオリ力のみを考えると

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\theta_0 - m\omega_0^2x \quad (1.41)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x}\sin\theta_0 - m\omega_0^2y \quad (1.42)$$

である。ここで ω_0 はフーコーの振り子の振動数である。この微分方程式は複素変数 $u = x + iy$ を用いて解く事ができる。この時、 u に対する方程式は

$$\ddot{u} + 2i\omega\sin\theta_0\dot{u} + \omega_0^2u = 0 \quad (1.43)$$

となる。ここで $u = Ae^{i\alpha t}$ と置いて特性方程式を求める

$$\alpha^2 + 2\omega\sin\theta_0\alpha - \omega_0^2 = 0 \quad (1.44)$$

となる。また $\omega_0 \sim 1 \text{ s}^{-1}$, $\omega \simeq 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ なので $\omega_0 \gg \omega$ である。よって $\alpha \simeq -\omega\sin\theta_0 \pm \omega_0$ であり、式 (1.43) の解は

$$u = Ae^{-i\omega\sin\theta_0 t}(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) \quad (1.45)$$

となる。但し、 a, b は定数である。

これよりコリオリ力による振動面は式 (1.45) の $e^{-i\omega\sin\theta_0 t}$ より右回り(時計回り)に回転し、その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\sin\theta_0} = \frac{1 \text{ 日}}{\sin\theta_0}$$

と求まる。従ってフーコーの振り子面は約 $1 \text{ 日}/\sin\theta_0$ かけて一周する。

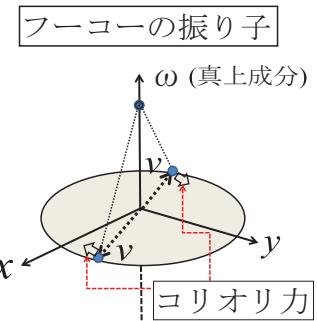


図 1.3: フーコーの振り子

1.5 保存力とその起源

Newton 方程式においては力が重要な役割を果たしている。この場合、力が保存力であるかどうかと言う問題はエネルギー保存を導く上でも重要である。保存力と言う概念はそれ程、単純なものとは言えないでここで少し解説しておこう。

1.5.1 保存力とは何か？

まず保存力の定義から始めよう。これは力 \mathbf{F} が

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

と書く事が出来る力の事である。ここで $U(\mathbf{r})$ はポテンシャルと言われている物理量である。この場合、力 \mathbf{F} は

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.47)$$

を満たしているのでこれを保存力の定義とする場合もある。しかしながら、式 (1.46) がどのように導出されたのかと言う事が分かると、やはり式 (1.46) が基本的な定義式と考えるのが妥当であろう。但し、数学的にはどちらでも良い事ではある。

1.5.2 保存力の起源

それでは保存力の起源は何処にあるのだろうか？実はこれは非常に単純な事である。この場合、Newton 方程式が何処から出てきたのかを考えればすぐに理解できる事である。Newton 方程式は量子力学の方程式である Schrödinger 方程式から Ehrenfest の定理を使う事により導き出されている。そしてこの量子力学の Schrödinger 方程式にはポテンシャルと言う物理量しかないため、力はそのポテンシャルの微分として導出されているのである。従って、Newton 方程式の元になっている量子力学の方程式には力 \mathbf{F} と言う概念が存在していないのである。このため Schrödinger 方程式を近似して求められている Newton 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.48)$$

であり、従って保存力の定義はこの式が基本になっているのである。

1.5.3 保存力は仕事をしない！

式(1.48)において、エネルギー保存の式を求めておこう。これは簡単で、式(1.48)に $\dot{\mathbf{r}}$ を掛けねば良い。この時

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) \implies \frac{1}{2}m \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} \right) = -\frac{dU(\mathbf{r})}{dt}$$

となり、これは直ちに微分が外れる。従って、定数を E とすれば

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E \quad (1.49)$$

と求める事ができる。これがエネルギー保存の式であるが、この場合、力 \mathbf{F} がポテンシャルの微分で書かれている事が本質的である。特に注意して欲しいのは力 \mathbf{F} は3個の変数で成り立っているのに対して、ポテンシャルは1個だけの変数と言う点である。実際、何か特別の条件がない限り、変数の自由度数が減少する事はない。これが保存力と言われている最も重要な意味合いである。このようにベクトル量である力がスカラー量の微分で書かれたと言う事はある種の対称性の表現でもある。

それでは仕事について解説しておこう。これはエネルギー保存と基本的には同じ事となっている。従って、まずは仕事の定義式を書いて置こう。仕事 W は

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.50)$$

と定義されている。ここで A, B は仕事をする経路の始点と終点である。ここで力が保存力の場合、すなわち $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$ の時、仕事 W は

$$W = - \int_A^B \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B dU(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r}_A) + U(\mathbf{r}_B) \quad (1.51)$$

となる。ここで、ある経路の始点から積分して、その経路の終点まで積分したとして、その終点を始点と同じところまでの積分としたら、

$$W = 0 \quad (1.52)$$

となる。これは仕事をしないと言う事になっている。すなわち、保存力の場合、この力が仕事をすることではなく、従ってエネルギーが保存されている事に対応している。

1.5.4 非保存力の例題(1)

それでは、非保存力とはどのような力であろうか？ここでは具体例として

$$\mathbf{F} = (-kx + \varepsilon y)\mathbf{e}_x - ky\mathbf{e}_y \quad (1.53)$$

を考えて見よう。この場合 $F_z = 0$ としているが、この事でこの議論がその一般性を失うと言う事はない。この力のローテーションは

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times [(-kx + \varepsilon y)\mathbf{e}_x - ky\mathbf{e}_y] = \varepsilon \mathbf{e}_z \quad (1.54)$$

である事から、 $\varepsilon = 0$ の時は保存力 $[\nabla \times \mathbf{F} = 0]$ であることがわかる。

● 仕事 W

仕事 $W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を計算して見よう。但し、この質点の運動は

$$x = A \cos \omega t \quad (1.55)$$

$$y = A \sin \omega t \quad (1.56)$$

と言う周期運動をしているものと仮定しよう。これは $\varepsilon = 0$ の時の運動に対応している。この場合、仕事 W は運動の周期を T として

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^T (-kx\dot{x} + \varepsilon y\dot{x} - ky\dot{y}) dt \quad (1.57)$$

である。但し、

$$\omega T = 2\pi$$

に注意しよう。この計算は直ちにできて

$$W = -\varepsilon A^2 \omega \int_0^T (\sin \omega t)^2 dt = -\pi \varepsilon A^2 \quad (1.58)$$

と求まる。これより保存力は仕事をしないが、非保存力は仕事をするためエネルギーを消費している事がわかる。従って、この非保存力があるとその系ではエネルギー保存則が成り立っていない。

1.5.5 非保存力の例題(2)

力が速度に依ってしまう場合、これは保存力ではない。ここでは具体的な例題として1次元系の摩擦力を考えてみよう。これは

$$F_x = -\gamma \dot{x}, \quad (\gamma > 0) \quad (1.59)$$

のような力として表現されている。例えば、雨粒が落下する場合、空気との衝突が起こっている。これを記述するために上記の摩擦力を導入すると比較的うまく雨粒の運動が記述される事が分かっている。但し、この場合、空気との衝突は多体問題でもあり、実際は極めて複雑な多体の力となっている。従って、このような単純な方程式で書かれていると言う保証は全くない。この場合、仕事 W は

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\gamma \int_{t_A}^{t_B} \dot{x}^2 dt \quad (1.60)$$

となり、これはこれ以上の計算ができない。但しこの仕事が負の値である事は分かっている。従って、これはエネルギー保存を破っている事に対応している。

第2章 Lagrange 方程式

力学の問題を比較的簡単に解くには Lagrange 方程式を利用する必要がある。一見、Lagrange 方程式は難しそうに見えるのだが、実はこれを使うと簡単になる場合がほとんどである。特に、振り子などの設問に対して、その具体的な運動方程式を立てる場合には Lagrange 方程式を利用すれば一段と易しくなることは間違いない。

2.1 Lagrangian の定義

質量 m の質点に対する Lagrangian L は

$$L = T - U \quad (2.1)$$

と定義されている。 T はその質点の運動エネルギーであり、 U はポテンシャルである。デカルト座標では

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (2.2)$$

と書かれている。この場合、Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial L}{\partial z} \quad (2.3)$$

となっている。これを具体的に計算してみると

$$m\ddot{r} = -\nabla U(r) \quad (2.4)$$

となり、これは Newton 方程式そのものである。

2.1.1 一般座標

Lagrangian が便利である意味はこの式が一般座標 (q_1, q_2, q_3) に対しても成り立つからである。一般座標とは例えば、極座標ならば

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi \quad (2.5)$$

である。この場合、Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

となっている。

2.1.2 一般座標の Lagrange 方程式導出

デカルト座標での Newton 方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

を一般座標で書き直して見よう。一般座標を $q_i = (q_1, q_2, q_3)$ として Lagrangian を

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \quad (2.8)$$

としている。ただし $T(q_i, \dot{q}_i)$ は運動エネルギーで

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.9)$$

を一般座標で書き直したものである。例えば 極座標 $(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi)$ だと

$$T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \quad (2.10)$$

となる。

2.1.3 一般座標での Newton 方程式

これはただ単純にひたすら Newton 方程式を一般座標で書き直しただけで簡単な数学だから、以下に示しておこう。まずは、 (x, y, z) から (q_1, q_2, q_3) への変数変換を考える。

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

この場合、それぞれの座標の時間微分は

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

となる。これより、

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

が求められる。ここで $U = U(x, y, z)$ であり、さらに、次の量 I

$$I \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (2.11)$$

を考えてみる。Newton 方程式

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.12)$$

を使って I を書き直して見よう。この場合

$$\begin{aligned} I &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \\ &= m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\} \end{aligned}$$

と書き直す事が出来る。但し

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i}$$

を使っている。

さらに $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$ 等の式を使って

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\}$$

と書き直す。ここで

$$\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial q_i}$$

などに注意しよう。デカルト座標での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.13)$$

なので、これらより I は

$$I = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.14)$$

と書ける。ポテンシャル U は座標のみの関数と仮定すると

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

なので、これより

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.15)$$

となり、一般座標における Lagrange 方程式が求まっている。

2.2 Lagrange 方程式の導出：最小作用の原理

この Lagrange 方程式は作用

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (2.16)$$

から Euler の変分法 ($\delta S = 0$) によって求める事ができる。実際、この計算法の方がはるかに簡単である。この場合、変分 δS の定義は

$$\delta S \equiv \int_{t_a}^{t_b} \{L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i)\} dt \quad (2.17)$$

となっている。 δq_i は $q_i(t)$ の関数形をほんの少しだけ変形したものである。従って、 δq_i は微小量であり、 δq_i は充分小さいとして Taylor 展開すると

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

となる。ここで第 2 項では一度、部分積分をしている。この場合、

$$\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i \quad (2.18)$$

と言う変分と時間微分の順序の交換が可能であるとしている。また

$$\delta q_i(t_a) = \delta q_i(t_b) = 0 \quad (2.19)$$

という変分法の境界条件を使っている。作用を最小にするためには δq_i の係数がゼロになる必要がある。よって上式の括弧の中がゼロより Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

が得られている。

2.2.1 変分法の境界条件

ここで議論している変分法とは考えている関数形をほんの少し $\delta q_i(t)$ だけ変えてみて、この時に作用 S がどう変化するかを見る方法である。そしてこの時に、作用 S が極値となる場合にその関数形が決まる方程式が求められるのである。この場合、関数の端では関数は固定されているので、その場所で関数形を変化させる事は出来ない。従って、その変分 $[\delta q_i(t_a), \delta q_i(t_b)]$ はゼロとすると言う事である。それが式 (2.19) の意味する所である。

第3章 運動方程式の解法

Lagrangian を作った後，これが基本的な力学の運動方程式である．そしてこれを解く事が物理の基本的で重要な作業となっている．勿論，運動方程式が出来れば，後はこの微分方程式を解けばよいと言う数学の問題になっている事も確かである．しかし実際問題としてはこの解がどのように自然界と結びついているのかと言う検証こそが物理学の最も重要なポイントであることをしっかり認識しておく必要がある．

3.1 单振子の運動

質量 m の单振子の運動を考えよう．伸び縮しない長さ ℓ の糸で図のようにつるしてある．質点の座標を (x, y) としよう．原点は糸をつるしてある点としよう．この時，質点の Lagrangian $L = T - U$ は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (3.1)$$

となっている． g は重力加速度である．

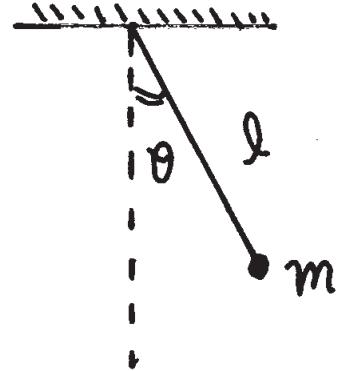


図 3.1: 单振子

ここで座標を振り子で書くと

$$x = \ell \sin \theta, \quad y = -\ell \cos \theta \quad (3.2)$$

となっている．この場合，

$$\dot{x} = \ell \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = \ell \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.3)$$

なので，これより Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (3.4)$$

となる。Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (3.5)$$

なので、運動方程式は

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \quad (3.6)$$

となる。微小振動 ($|\theta| \ll 1$) の場合を考えると $\sin \theta \simeq \theta$ なので、方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (3.7)$$

となり、調和振動子の方程式になっている。

3.1.1 楕円積分

微小振動を考えないで $\sin \theta$ そのままの微分方程式を解きたいと言う学生が必ず、出てくるものである。ここで簡単な考察だけしておこう。この場合、微分方程式は

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta \quad (3.8)$$

である。ここでエネルギー積分を行うと

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \omega^2 \cos \theta + E_0 \quad (3.9)$$

となる。 E_0 は定数である。これを書き換えると

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \Omega t + \alpha \quad (3.10)$$

となる。 α は積分定数である。この式で

$$k^2 = \frac{2\omega^2}{\omega^2 + E_0}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 + E_0)} \quad (3.11)$$

と定義してある。式 (3.10) の左辺は第 1 種椭円積分

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (3.12)$$

で書かれている。

3.1.2 エネルギー保存則

エネルギー保存則を Lagrangian から導出して見よう。まず Lagrangian を時間で微分すると

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \quad (3.13)$$

となる。Lagrangian 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.14)$$

を使って式 (3.13) を書き直すと

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (3.15)$$

となる。 U は \dot{q}_i を含まない事に注意して、また T は \dot{q}_i の2次関数である事に注意すると式 (3.15) は

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \frac{d(2T)}{dt} \quad (3.16)$$

となっている。 $L = T - U$ に注意すると

$$T + U = \text{const.} = E \quad (3.17)$$

と言うエネルギー保存則が求まっている。これはポテンシャル U が保存系である事に依っている。

3.1.3 エネルギー保存則を用いた調和振動子の解

1次元調和振動子の場合 ($m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$) , エネルギー保存則は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (3.18)$$

となっている . ここで \dot{x} について解くと

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2} \quad (3.19)$$

である . これより

$$\int \omega dt = \int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (3.20)$$

となる . この積分は $x = x_0 \sin \theta$ と置換すると直ちに解けて

$$\omega t + \alpha = \theta \quad (3.21)$$

となる . よって , この運動は

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.22)$$

となり , 調和振動子の解となっている .

3.2 極座標系の運動方程式

自然界におけるポテンシャルは基本的に言って $1/r$ の形になっている。クーロンポテンシャルも重力ポテンシャルも共にこの $1/r$ の形である。このため、運動方程式を書くとどうしても極座標を取る必要が出てくるのである。

3.2.1 加速度

惑星の運動を記述しようとするとそのポテンシャルは

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (3.23)$$

となっていて、極座標 r に依っている。 G, M, m は重力定数、太陽質量そして惑星の質量を表している。極座標の場合の運動エネルギーは

$$T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (3.24)$$

であるので、この場合の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (3.25)$$

である。従って Lagrange 方程式は r, θ, φ それぞれ

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + mr \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

となっている。この式から加速度を求める事は簡単にできる。そしてそれは式 (1.27) の加速度に対応している事が確かめられる。式 (1.27) の計算がかなり大変であったが、今回の計算は明らかに容易なものとなっている。この理由はいろいろあるとは思うが、基本的には Lagrange 方程式の手法はスカラーで計算がなされている事が主な理由となっていると考えられる。

3.3 Kepler 問題

Kepler 問題を議論しよう。Newton 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.27)$$

となる。ここではすでにエネルギー保存の式は証明されているとしてこれを利用しよう。エネルギーを E と置くと

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (3.28)$$

となる。この式は 1 個だが、もともと 3 個なのであと 2 個の式が必要である。

3.3.1 運動は平面

中心力の場合、角運動量は保存している。この証明は簡単であるが、ここに書いておこう。角運動量は $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ であり、 \mathbf{p} は運動量で $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ と定義されている。この場合

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times \left(G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \right) = 0 \quad (3.29)$$

となり、角運動量の保存が証明されている。従ってこの \mathbf{L} の方向を z -軸に選んでも一般性を失う事はない。このとき、運動は $x-y$ 平面になる。これは明らかで、運動を表す座標は r であるが

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

であるから運動は \mathbf{L} と直交している。それはすなわち $x-y$ 平面となっている。角運動量 \mathbf{L} の方向は z -軸にとっているので、その大きさを $\ell = |\mathbf{L}|$ とおこう。ここで、2 次元極座標表示では

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3.30)$$

なので、その時間微分は

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (3.31)$$

である。従って $L_z = m(\dot{y}x - \dot{x}y)$ は

$$\ell = |\mathbf{L}| = L_z = mr^2\dot{\varphi} \quad (3.32)$$

となっている。

3.3.2 2次元極座標でのエネルギー E

エネルギー E の式を極座標で書こう。

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (3.33)$$

となる。ここで、 $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ を用いれば

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (3.34)$$

と変形される。これは r に対する 1 階の微分方程式になっているが、この微分方程式の解法はすべて解析的に知られている。

3.3.3 軌道は橢円

地球が太陽の周りを回転しているが、その軌道 (orbit) は橢円である。以下にその橢円軌道を導出しよう。この問題では保存量としてエネルギー E と角運動量 ℓ がある。エネルギー E の式から \dot{r} 、そして角運動量の式から $\dot{\varphi}$ を

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \quad (3.35)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (3.36)$$

と求めよう。但し、

$$\alpha = GMm \quad (3.37)$$

を導入している。この 2 式を辺々割り算すると

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \quad (3.38)$$

と求まる。さらに積分を簡単に解ける形にするために

$$r = \frac{1}{s} \quad (3.39)$$

の変数変換をする。

この時，上式は

$$-d\varphi = \frac{\ell ds}{\sqrt{2m(E + \alpha s - \frac{\ell^2 s^2}{2m})}} = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2}s - s^2}} \quad (3.40)$$

となる。ルートの中は s の 2 次関数だから，必ず因数分解した形に書き直す事が出来る。従って，上式は

$$-d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)}} \quad (3.41)$$

と書かれる。 s_1 と s_2 はルートの中をゼロとした時の根であり

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{m\alpha}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \\ s_2 &= \frac{m\alpha}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \end{aligned}$$

で与えられる。この式 (3.41) を積分する場合，積分変数を s から χ へ

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \chi$$

と置き換える。この時，

$$ds = 2(s_2 - s_1) \sin \chi \cos \chi d\chi$$

である。従って，これより式 (3.41) の積分は直ちに出来てしまい，答えは

$$\varphi_0 - \varphi = 2\chi$$

である。 χ を s に戻しさらに s を r に戻して，後は細かい係数を入れると

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.42)$$

となる。但し，積分定数 φ_0 を $\varphi_0 = \pi$ とした。また A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad (3.43)$$

と与えられている。この事より， E が負であれば $\varepsilon < 1$ となるので，確かに軌道が橢円である事がわかる (Kepler の第 1 法則)

3.3.4 面積速度一定

Kepler 問題には面積速度一定の法則がある。これは角運動量保存則そのものである。橢円における微小面積は

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\phi \quad (3.44)$$

と書けるので、面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \quad (3.45)$$

となる。ところが、 $\ell = mr^2\dot{\phi}$ であるから

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m} \quad (3.46)$$

となり、「面積速度一定」が導かれる (Kepler の第2法則)

3.3.5 周期の2乗が長半径の3乗に比例

Kepler 問題には周期の2乗が長半径の3乗に比例すると言う法則がある。橢円は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.47)$$

で表され、 a が橢円の長半径、 b が短半径である。式 (3.42) の焦点は $x-y$ 座標の原点ではないので平面幾何を解く必要があり

$$a = \frac{A}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (3.48)$$

で与えられる事がわかる。面積速度の式を全体で一周するとこれが周期 T に対応するので

$$S = \frac{\ell}{2m}T \quad (3.49)$$

が求められる。

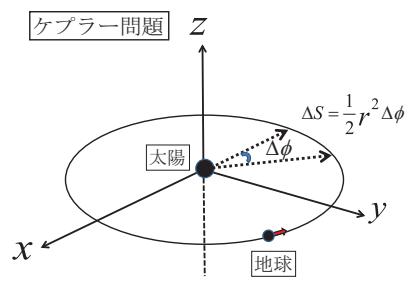


図 3.2: Kepler 問題

橢円の面積 S は

$$S = \pi ab \quad (3.50)$$

なので

$$S = \pi ab = \frac{\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi \sqrt{A} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\ell}{2m} T \quad (3.51)$$

となり， $T^2 \propto a^3$ となっている (Kepler の第 3 法則)

3.3.6 直接積分による周期

この式 (3.51) は積分を直接行っても当然求められる。それは

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (3.52)$$

を周期 T に渡って積分すれば得られる。すなわち

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (3.53)$$

を計算すればよい。この積分は積分公式を参照すると

$$\frac{\ell}{m} T = \frac{2\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.54)$$

となり、幾何学的に求めた結果と一致している。

3.4 3次元調和振動子の運動力学

3次元調和振動子の運動について少し解説して置こう。調和振動子は微小振動に関する運動に見られる力であるが、そのポテンシャル自体は不思議な形となっている。ポテンシャル $U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$ の形は r が非常に大きくなっても強い引力が働いている。これは勿論、現実的ではない。しかしそれにもかかわらず、この調和振動子の運動力学を理解しておくことは無駄にはならないと考えている。

3.4.1 運動方程式

3次元調和振動子の Newton 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega^2\mathbf{r} \quad (3.55)$$

となる。また、エネルギー保存の式は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (3.56)$$

となっている。前節で議論しているように、中心力の場合、角運動量 L は保存している。従ってこの L の方向を z -軸に選べば運動は $x-y$ 平面になっている。

3.4.2 2次元極座標での運動方程式

エネルギー E の式から \dot{r} 、そして角運動量の式から $\dot{\varphi}$ を求めると

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad (3.57)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (3.58)$$

である。この2式を辺々割り算すると

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad (3.59)$$

と求まる。さらに積分を簡単に解ける形にするために

$$r = \frac{1}{s^2} \quad (3.60)$$

の変数変換をする。

この時、上式は

$$-d\varphi = \frac{\frac{1}{2}ds}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}s - s^2 - \left(\frac{m\omega}{\ell}\right)^2}} \quad (3.61)$$

となる。ルートの中は s の 2 次関数だから、必ず因数分解した形に書き直す事が出来る。従って、上式は

$$-d\varphi = \frac{\frac{1}{2}ds}{\sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)}} \quad (3.62)$$

と書かれる。 s_1 と s_2 はルートの中をゼロとした時の根であり

$$s_1 = \frac{mE}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{mE}{\ell^2}\right)^2 - \left(\frac{m\omega}{\ell}\right)^2}$$

$$s_2 = \frac{mE}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{mE}{\ell^2}\right)^2 - \left(\frac{m\omega}{\ell}\right)^2}$$

で与えられる。この式 (3.62) を積分する場合、積分変数を s から χ へ

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \chi$$

と置き換える。従って、これより式 (3.62) の積分は直ちに出来てしまい、答えは

$$\varphi_0 - \varphi = \chi$$

である。 φ_0 は積分定数である。 χ を s に戻し、さらに s を r に戻すと

$$\frac{1}{r^2} = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \varphi = s_1 \cos^2 \varphi + s_2 \sin^2 \varphi \quad (3.63)$$

となる。但し、 $\varphi_0 = 0$ とした。この式 (3.63) は

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3.64)$$

$$s_1 = \frac{1}{a^2}, \quad s_2 = \frac{1}{b^2} \quad (3.65)$$

と (r, φ) を (x, y) で表し、また (s_1, s_2) を (a, b) で表せば

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.66)$$

と書き直すことが出来る。これより、軌道は確かに橢円となっている事がわかる。但し、Kepler 問題の時の橢円とは異なり、これは焦点が原点とはなっていない。

3.4.3 デカルト座標での3次元調和振動子

3次元調和振動子の問題をデカルト座標で解いて見よう。この場合、角運動量の保存則から運動は2次元平面である。従って Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (3.67)$$

として十分である。この場合、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \quad (3.68)$$

$$m\ddot{y} = -m\omega^2 y \quad (3.69)$$

である。この解は定数を適当に選べば

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.70)$$

$$y = B \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.71)$$

と書く事が出来る。よってこの運動の軌道は

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (3.72)$$

となって、橙円である。これは極座標で求めた軌道と一致している。

3.4.4 2つの橙円の相違点

Kepler 問題の橙円と3次元調和振動子問題の橙円は共に橙円であるが、表現が異なっている。これは原点の選び方が異なっているからである。Kepler 問題の橙円はその焦点を原点に取っているが、3次元調和振動子問題の橙円の原点はデカルト座標の原点そのものである。次節でこの橙円に関する簡単な解説を書いて置こう。

3.4.5 楕円の関数形

楕円の定義は「その曲線上の点 $P(x, y)$ から 2 個の焦点への距離の和が一定値 2ℓ となる曲線」と言うものである。まず長さ 2ℓ のひもを持って来て、その両端を 2 点に固定する。そして鉛筆をそのひもに付けて立てるようにして、ひもがきちんと張っていると言う条件で端から絵を描いて行くとそれが楕円になっている。実際、こうした経験を中学生の頃された読者も多い事と思う。しかしながら、このような原始的な作図は極めて重要であると筆者は考えている。

● 楕円の形 (1)

ここで 2 個の焦点座標を

$$(-p, 0), \quad (p, 0) \quad (3.73)$$

としよう。ここで、点 $P(x, y)$ から 2 個の焦点への距離の和が一定値 2ℓ となる事が楕円の条件である。従って

$$\sqrt{(x + p)^2 + y^2} + \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = 2\ell \quad (3.74)$$

と書く事ができる。これを変形して 2 乗すると

$$(x + p)^2 + y^2 = (\sqrt{(x - p)^2 + y^2} - 2\ell)^2 \quad (3.75)$$

$$= (x - p)^2 + y^2 + 4\ell^2 - 4\ell\sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad (3.76)$$

となる。ここで再び、ルートを外すように整理して 2 乗すると

$$(\ell^2 - xp)^2 = \ell^2 \{(x - p)^2 + y^2\} \quad (3.77)$$

となり、これより

$$\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{(\ell^2 - p^2)} = 1 \quad (3.78)$$

と求まる。よって

$$\begin{aligned} a &= \ell \\ b &= \sqrt{\ell^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - p^2} \end{aligned}$$

とすれば楕円の式 (3.66) と一致している。

● 楕円の形 (2)

一方, 楕円はその焦点を原点として

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.79)$$

とも書くことができる. この2個の式にどのような関係があるのか調べてみよう. ここでは式(3.66)から式(3.79)を導出しよう.

今, 1個の焦点座標を $F(p, 0)$ として, この焦点を原点とする極座標 (r, φ) を考えよう. この時, 楕円の座標を $P(x, y)$ とすると

$$x = r \cos \varphi + p, \quad y = r \sin \varphi \quad (3.80)$$

である. これを式(3.66)に代入すると

$$\frac{(r \cos \varphi + p)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \varphi)^2}{b^2} = 1 \quad (3.81)$$

となる. ここで

$$p = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3.82)$$

の関係式が成り立っている. 式(3.81)を書き直すと

$$(a^2 - p^2 \cos^2 \varphi)r^2 + 2(pb^2 \cos \varphi)r - b^4 = 0 \quad (3.83)$$

となる. この2次方程式は直ちに解くことが出来て

$$r = \frac{b^2}{a + p \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{p}{a} \cos \varphi} \quad (3.84)$$

となる. 従って $A = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \frac{p}{a}$ とすれば

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

となり, 確かにこれは式(3.79)となっている.

3.5 太陽系外小惑星 (1I/2017 U1)

最近, 太陽系外小惑星が発見されて注目を集めているが, 確かにこれは重要な発見と考えられる. その小惑星は「1I/2017 U1 (Oumuamua)」と呼ばれているもので太陽系外天体であると考えられている. 大きさは直径が 200 m 前後と推測されている細長い天体である. 太陽系の惑星はそのエネルギー E が負であり, 従ってこれは橢円になっている. 一方, 太陽系外小惑星のエネルギーは正であり, 太陽の束縛状態とはなっていない. そしてその軌道は双曲線である.

3.5.1 太陽系外小惑星の速度

この小惑星が太陽の重力に捕まらなかった一つの理由として, その天体の速度の高速さにある. 実際, その天体の遠方での速度 v_o は

$$v_o \simeq 0.9 \times 10^{-4} c \quad (3.85)$$

と推定されているが, これは地球の公転速度 ($v_e \simeq 1.0 \times 10^{-4} c$) とほとんど同じである. さらに太陽に最も近かった時点 (近日点) においては

$$v \simeq 2.9 \times 10^{-4} c \quad (\text{at perihelion point}) \quad (3.86)$$

の速度まで上昇していた. これはエネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2} m_o v_o^2 = \frac{1}{2} m_o v^2 - \frac{G_0 M m_o}{R} \quad (3.87)$$

より求めることができる. ここで m_o は小惑星の質量, M は太陽質量である. また R は運動中の小惑星と太陽との距離である. ちなみにこの小惑星が地球軌道に到達した時, その速度 v は

$$v \simeq 1.7 \times 10^{-4} c \quad (3.88)$$

となっていた.

3.5.2 太陽系外小惑星の軌道

この小惑星が太陽系外から飛来したことの主な証拠はその軌道が双曲線となっている事である。そして、その離心率 ε_o が 1 をかなり超えている事が分かっている。実際、この小惑星の離心率 ε_o はその軌道の測定から

$$\varepsilon_o \simeq 1.19 \quad (3.89)$$

と推定されている。ここで双曲線の極座標表示を書いておくと

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon_o \cos \varphi} \quad (3.90)$$

である。この式は勿論、Kepler 問題の解と同じ形になっている。但し φ には制限がついていて分母が負になる事はない。すなわち式 (3.90) において常に

$$|\cos \varphi| < \frac{1}{\varepsilon_o} \quad (3.91)$$

である。さらに橢円との違いはその離心率の大きさにある。橢円では離心率 ε は

$$0 \leq \varepsilon < 1 \quad (3.92)$$

であり 1 を超える事はないが、双曲線の離心率は 1 を超えている。そして実際この小惑星の離心率 $\varepsilon_o = 1.19$ は 1 をかなり超えているため、この小惑星は太陽系外から飛来した天体であるとみなす事が合理的である。さらにこの小惑星がどこで形成されたのかと言う問題は興味深いものであるが、これを特定することは難しいとは思われる。しかしながらこの天体が太陽系外であると言う事だけで十分に面白いものと言えよう。今後、太陽系外の小惑星などの天体がさらに発見される事を期待したい。

第4章 振動論

この章では典型的な振動について解説をして行こう。特に，良く出てくるのは微小振動であり，この場合，振動は調和振動子となっている。また強制振動の物理も比較的良く議論されているので，ここでは簡単に解説しておこう。

4.1 何故，調和振動子となるのか？

調和振動子の解き方は第1章で詳しく解説している。この場合，微小振動であれば必ず，調和振動子となっている。ここでその理由を簡単に解説しよう。

4.1.1 一般的なポテンシャル

今，一般的なポテンシャルを $V(x)$ しよう。ここでは1次元系を考えているが，3次元でも通用する議論となっている。現実のポテンシャル $V(x)$ は通常はかなり複雑になっている。この物理的な理由としては，大半の場合，多体系を1体問題に無理やり直しているからである。この場合，このポテンシャル $V(x)$ は $x = x_0$ で最小値を持っているとして充分，合理性がある。従って $V(x)$ は

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (4.1)$$

と展開できる。今の場合， $x = x_0$ で $\frac{dV}{dx} = 0$ なので，式(4.1)は

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (4.2)$$

となる。 $V(x_0)$ は定数なので結局，この式は調和振動子のポテンシャルとなっている。見やすくするために $V(x_0) = 0$ として $x_0 = 0$ としよう。また $\frac{d^2V(x_0)}{dx^2} \equiv m\omega^2$ とすれば式(4.2)は

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \dots \quad (4.3)$$

となっている。

4.2 強制振動

外から時間依存の力が加わった場合、運動がどうなるのかを簡単な模型で考察してみよう。これは強制振動として良く知られている問題である。

4.2.1 強制振動

Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + xF(t) \quad (4.4)$$

で与えられる系を考えよう。この運動方程式は

$$m\ddot{x} + m\omega^2x = F(t) \quad (4.5)$$

となる。具体的には

$$F(t) = a \cos \gamma t \quad (4.6)$$

を考えて行こう。この時、運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2x = f_0 \cos \gamma t, \quad \left(f_0 \equiv \frac{a}{m} \right) \quad (4.7)$$

となっている。この方程式を解いて行こう。

4.2.2 $F(t) = 0$ の場合の一般解 x_0

まずは、 $F(t) = 0$ の場合の一般解 x_0 を求めておこう。これは調和振動子の場合なので簡単であり

$$x_0 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (4.8)$$

である。

4.2.3 特殊解 x_1

次に方程式 (4.7) の特殊解 x_1 を

$$x_1 = B \cos \gamma t \quad (4.9)$$

の形に求めて行こう。何故、この形にしたのかと言う理由は直感的なものである。係数 B を見つけるのは簡単で単純に式 (4.7) に代入すればよい。実際、これを実行すると B はすぐに求まり、従って特殊解 x_1 は

$$x_1 = \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t \quad (4.10)$$

となっている。方程式 (4.7) の解は $F(t) = 0$ の一般解と特殊解の和で与えられる。すなわち、式 (4.7) の解 x は

$$x = x_1 + x_0 \quad (4.11)$$

である。

4.2.4 方程式 (4.5) の解

方程式 (4.5)

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = F(t) \quad (4.12)$$

の解は $F(t) = 0$ の一般解と方程式 (4.12) 特殊解の和で与えられる事を証明しよう。特殊解を x_0 とした時、これも方程式 (4.5) を満たしている。すなわち

$$m\ddot{x}_0 + m\omega^2 x_0 = F(t) \quad (4.13)$$

である。従って式 (4.12) から式 (4.13) を辺々引き算すると

$$m(\ddot{x} - \ddot{x}_1) + m\omega^2(x - x_1) = 0 \quad (4.14)$$

となっている。ここで

$$X = x - x_1 \quad (4.15)$$

とおこう。

この時、式(4.14)は

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \quad (4.16)$$

となる。この一般解は勿論、

$$X = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (4.17)$$

であり、従ってこれより解 x は

$$x = X + x_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t \quad (4.18)$$

となっている。

4.2.5 共鳴現象

この解である式(4.18)の x は $\gamma \rightarrow \omega$ の時に共鳴現象を起こすが、この事を見て行こう。まず、式(4.18)の x を

$$x = A'_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t - \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2} (\cos \omega t - \cos \gamma t) \quad (4.19)$$

書き換えよう。但し A'_1 は任意の定数である。ここで

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{\cos \omega t - \cos \gamma t}{\omega - \gamma} = -t \sin \omega t \quad (4.20)$$

なので、式(4.19)は

$$x = X + x_1 = A'_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad (4.21)$$

となっている。これは振幅が時間と共に線形に増大することを示している。これが共鳴現象である。

4.2.6 強制振動の方程式の別解

時間依存の外力が働く場合の方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \gamma t \quad (4.22)$$

を解こうとする時、恒等式

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha \right) x = e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} (e^{\alpha t} x) \quad (4.23)$$

を利用すると簡単に解く事が出来る。しかしこれは読者への宿題としよう。

4.3 Virial 定理

力学でも量子力学でも運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの平均値が結びつくと言う定理がある。これは Virial 定理として知られているものでかなり面白い定理である。それでここではこの Virial 定理について簡単に解説しておこう。但しこの定理の注意点も述べておこう。それはこの定理が成り立つのは周期運動をしている場合に限ると言う事である。散乱問題や双曲線運動（太陽系外小惑星の運動）には適用されない。

4.3.1 Virial 定理の証明

ポテンシャル内にとらわれている質点 m が周期運動をしている場合を考える。この時、運動エネルギーの 1 周期における平均値

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} m \mathbf{r}^2 dt \quad (4.24)$$

を考えよう。これを一度、部分積分をすると

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left(\frac{d(m\mathbf{r}^2)}{dt} - \mathbf{r} \cdot m\ddot{\mathbf{r}} \right) dt = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau (-\mathbf{r} \cdot m\ddot{\mathbf{r}}) dt \quad (4.25)$$

となる。右辺第 1 項は周期性よりゼロとなる事を使っている。一方、Newton 方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U \quad (4.26)$$

を使ってこの式を書き直すと

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau (\mathbf{r} \cdot \nabla U) dt \quad (4.27)$$

となる。これより

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \nabla U \rangle \quad (4.28)$$

が求まる。これが Virial 定理である。

4.3.2 Virial 定理の例題 (1)

具体的な例題として

$$U(r) = Ar^n \quad (4.29)$$

の形のポテンシャルを考えてみよう。この時、

$$\mathbf{r} \cdot \nabla U = n A (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) r^{n-2} = nU \quad (4.30)$$

となる。よってこの場合の Virial 定理は

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle \quad (4.31)$$

となる。調和振動子の場合、 $n = 2$ なので、

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (4.32)$$

となっている。

4.3.3 Virial 定理の例題 (2)

重力ポテンシャルの場合、 $n = -1$ である。従ってこの場合の Virial 定理は

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle \quad (4.33)$$

となる。エネルギー E は

$$E = \langle T \rangle + \langle U \rangle = -\langle T \rangle \quad (4.34)$$

となり、周期運動をしている場合、例えば Kepler 問題ではエネルギー E は必ず負となっている。従ってこの場合、軌道は橢円である。

第5章 剛体の運動

物理学は基本的に質点に対する方程式となっている。しかしながら、古典力学においては剛体の問題を扱う場合が良くある事も確かである。日常生活においても剛体の問題が良く出てくるが、その取扱いはそう簡単ではない。力学では剛体を質点の集まりとして扱う事になる。この場合、「剛体」(rigid body)の定義は単純に言って、硬いので変形しないしバラバラにはならないと言う仮定である。

5.1 回転座標系

剛体の問題を扱うためにはどうしても、回転座標系について十分な知識を持っている事が必須である。それ以外の系で剛体を扱う事は非常に難しいものである。第1章の記述と重なる所があるが、回転座標系について丁寧に解説をしておこう。今、静止系の座標を (X, Y, Z) として、これを φ だけ回転した回転系の座標を (x, y, z) としよう。以降の議論では、回転を Z 軸回りにして議論を進めるがこれで一般性を失う事はない。両者の間には

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}, \quad \text{但し } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

の関係がある。

5.1.1 回転座標系 $\dot{\mathbf{r}}$ の計算

ここで、 $\dot{\mathbf{r}}$ を計算してみよう。簡単な計算で

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R} \quad (5.2)$$

となることがわかる。これを式(5.1)を使って $\dot{\mathbf{r}}$ に書き直すと

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.3)$$

と求まる。ここで系の回転角速度ベクトルを

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi}) \quad (5.4)$$

とした。上式(5.3)の右辺第1項を $\dot{\mathbf{R}}_r$ と書くと式(5.3)は

$$\dot{\mathbf{R}}_r \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.5)$$

となる。式(5.5)の行列は直交行列なので

$$\dot{\mathbf{R}}_r^2 = \dot{\mathbf{R}}^2 \quad (5.6)$$

が証明される。ここで、静止系での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 \quad (5.7)$$

である。従って、これを回転系での変数 \mathbf{r} で書くと

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (5.8)$$

となっている。これが回転系での運動エネルギーである。

5.2 剛体の回転運動

日常の物理学で関係してくる質点以外の力学は基本的には剛体の運動と流体の運動である。ところが、流体力学に関しては明確な理論体系が存在しているとは言えない。従って、剛体の運動のみ議論しよう。

5.2.1 剛体の運動エネルギー

剛体の記述方法は良く知られており、剛体をまず小さなつぶつぶに分ける事から始める。その n 番目のつぶつぶの質量を m_n 、座標を R_n としよう。こうすると、この剛体の運動エネルギー T_{RB} は

$$T_{RB} = \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{R}_n^2 \quad (5.9)$$

と書ける。ここで n の和は剛体全体に渡って行われる事としている。

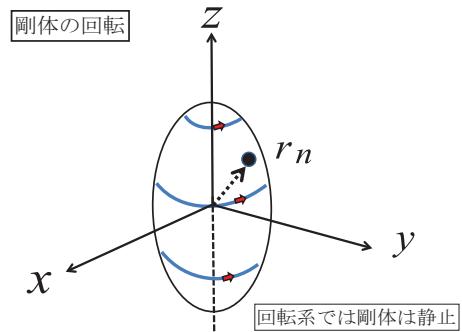


図 5.1: 剛体

この剛体の運動エネルギーをその剛体と一緒に回転している回転系で書き直してみよう。回転系への変換については付録で議論している。質量 m の質点の静止系での運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$ は回転系での座標 r により式 (5.8) で与えられている。すなわち、

$$T = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r} + \omega \times r)^2$$

である。 ω は回転座標系の回転角速度である。従って、剛体と一緒に回転している座標系では、式 (5.9) は

$$T_{RB} = \sum_n \frac{1}{2} m_n (\dot{r}_n + \omega \times r_n)^2 \quad (5.10)$$

となる。

剛体の重心 (R_G) を座標系の原点に選ぶと

$$R_G = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = 0 \quad (5.11)$$

となっている。さらに、剛体に乗っている系なので剛体は静止している。従って $\dot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{v}$ は同じであり剛体の重心の速度である。よって式(5.10)は

$$T_{RB} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + \sum_n \frac{1}{2} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \quad (5.12)$$

となる。 $M = \sum_n m_n$ は剛体の全質量である。第1項は剛体全体の並進運動のエネルギーであり、第2項が剛体の回転エネルギーに対応している。

5.3 剛体の回転エネルギー

第2項の剛体の回転エネルギーを T_R としよう。これはまだ、つぶつぶの言葉で表現しているが、これを連続極限を取った形式で書いておこう。

5.3.1 連続極限

m_n は密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ に関係しているので、連続極限は

$$\sum_n m_n \rightarrow \int \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (5.13)$$

となる。この場合、回転エネルギーは

$$T_R = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 d^3r \quad (5.14)$$

となる。さらに恒等式

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \quad (5.15)$$

を用いて式(5.14)を書き直して行こう。表現を簡単にするため

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

と言う表記を導入しよう。この時、式(5.14)はちょっとした計算で

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] d^3r \quad (5.16)$$

となる事がわかる。

5.4 慣性モーメント I_{ij}

慣性モーメント (moment of inertia) I_{ij} を

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})[r^2\delta_{ij} - x_i x_j]d^3r \quad (5.17)$$

で定義しよう。この慣性モーメントは単なる定数であり、運動力学は ω によって担われている。これは当然で、我々は剛体と一緒に回転している回転系に移っているからである。従って、剛体の力学変数は座標系を回転したその回転の角速度 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ によって記述されている。

5.4.1 慣性モーメントの物理的意味

結局、回転のエネルギーは

$$T_R = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (5.18)$$

となっている。慣性モーメント I_{ij} は対称行列であり、このためこの行列は必ず対角化することができる。すなわち、

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (5.19)$$

と書ける。従って適当なベースを選ぶと式 (5.18) は

$$T_R = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (5.20)$$

と書く事ができる。この式をみるとわかるように、慣性モーメントは回転しているときの「回転質量」のようなものである。

5.4.2 慣性モーメントの例題

慣性モーメントを具体的に計算してみよう。慣性モーメントはどの回りの慣性モーメントであるかを最初に特定しておく必要がある。一般的には重心の回りの慣性モーメントの計算が良く行われている。

- 質量 M , 半径 R の一様球の慣性モーメント : この球の重心 (中心) の回りの慣性モーメントを計算しよう。この場合, 明らかに $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ である。よってこの球の密度を ρ_0 とすると $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$ なので

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{1}{3} \int \rho_0 [y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2] d^3r \\ &= \frac{2}{3} \int \rho_0 r^2 d^3r = \frac{8\pi}{3} \rho_0 \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

となっている。この結果は覚えておいても損はしないものと思う。

- 質量 M , 半径 R の球表面分布の慣性モーメント : テニスボールの重心の回りの慣性モーメントを計算しよう。この場合, 明らかに $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ である。よってこの球表面の面密度を σ とすると $M = 4\pi\sigma R^2$ なので

$$I = \frac{2}{3} \int \sigma \delta(r - R) r^2 d^3r = \frac{8\pi}{3} \sigma \int_0^R \delta(r - R) r^4 dr = \frac{2}{3} M R^2 \quad (5.22)$$

となっている。これより, 同じ質量の場合, 一様球 (野球のボール) よりもテニスのボールの方が約 1.7 倍だけ回転質量が大きい事がわかり, テニスではスピンが重要な役割を果たしている事が理解できる。

- 質量 M 長さ ℓ の棒の慣性モーメント : 質量 M , 長さ ℓ の棒の一端を原点において z 軸に沿っておいた場合の棒の慣性モーメントを計算しよう。この場合, z 軸回りの慣性モーメントはゼロとなっている。これは棒の太さを無視した場合の事であるが, 充分と良い近似である。次に x 軸の回りの慣性モーメントを計算しよう。棒の線密度を λ とすると $M = \lambda\ell$ である。この時

$$I = \lambda \int_0^\ell z^2 dz = \frac{1}{3} \lambda \ell^3 = \frac{1}{3} M \ell^2 \quad (5.23)$$

となっている。これも覚えておいて損はしないと思う。ここでコメントであるが, この棒の慣性モーメントはその重心の回りで計算すると $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2$ であることに注意しよう。

5.5 剛体の運動

コマの回転や地球の自転を扱うためには、剛体に対する運動方程式を立てる必要がある。この運動方程式は Lagrange 方程式を用いるのが便利である。しかしこの節は専門家に取ってさえも難しい数学が含まれているので、参考のために読むか、または読み飛ばしても良いと思う。

5.5.1 Euler 方程式

剛体の回転エネルギー T_R は式 (5.20) により与えられている。回転軸を x_1, x_2, x_3 としてその回りの回転として考えて行こう。この Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (5.24)$$

と書いている。ところが、この $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は独立変数になっていないため、この変数から Lagrange 方程式を求める事はできない。

それで独立変数である Euler 角を用いる必要がある。しかしながらこの Euler 角による計算は非常に面倒で複雑である。ここでは Euler 角の解説は省き、その結果だけを書くことにしよう。この Euler 角の解説は第 6 章で行っているので、詳細を知りたい場合そちらを参照されたい。

これら $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を Euler 角 θ, φ, ψ で表すと

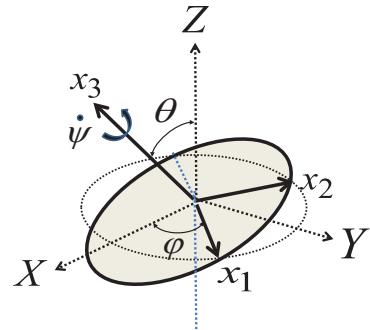


図 5.2: Euler 角

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \quad (5.25)$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \quad (5.26)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (5.27)$$

となっている。この場合、 $\dot{\psi}$ は x_3 軸回りの回転角速度である。その x_3 軸は静止座標系の Z 軸から角度 θ ずれていて、極座標表現の θ と同じである。 φ は回転している剛体が全体として回転している歳差運動を記述する角度を表している。

この時, Lagrangian L は

$$L = \frac{1}{2} \left[I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + I_2(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

となっている. 従って ψ に対する Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3\omega_3 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= I_1\omega_1(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) - I_2\omega_2(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \\ &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi = \omega_2, \quad \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = \omega_1$$

を用いている. よって

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \quad (5.28)$$

が求まる. さらに, Lagrangian L は 1,2,3 のインデックスに対してサイクリックな対称性を持っているので, その運動方程式もサイクリックな対称性があることがわかつている. 従って

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \quad (5.29)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \quad (5.30)$$

が求まる. この 3 つの方程式が Euler 方程式である.

5.5.2 地球の自転軸の歳差運動

地球を剛体として考えると $I_1 = I_2$ としてよいので、式 (5.28) より ω_3 は定数となる。これを ω_0 と置く。これは地球の自転 (rotation of the earth) の角速度であり、よって自転の周期は $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (24 時間) である。今、 $\Omega \equiv \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \omega_0$ と定義すると式 (5.29-5.30) の微分方程式が直ちに解けてしまい

$$\omega_1 = A \sin \Omega t, \quad \omega_2 = A \cos \Omega t \quad (5.31)$$

となっている。地球の慣性モーメント I_1, I_3 の観測値を代入すると、地球自転軸の歳差運動の周期 T は $T \simeq 305 T_0$ となっている。これは地球自転軸が約 300 日で 1 周していることを示している。ちなみに現在の観測値は約 440 日と考えられている。

第6章 コマの力学

剛体の運動の中で最も重要なものはコマの運動力学である。これは力学の中でも特に難しいもので、初年度生が学ぶような物理ではない。しかしコマの運動方程式を自分で解いてみる事により、物理的な直感が養われることは間違いないことである。

6.1 コマの運動

コマの運動を議論しよう。これは古典力学の中でも最も難しいテーマとなっている。ここでは出来るだけ易しく解説して行こう。この場合、数式の検証はかなり難しいとは思うが、しかし重要である。具体的なコマの運動に関しては、どうしても定性的な取扱いになっている。それでもこの定性的な議論もそれを自分の言葉で考えて行く事により、物理的な直感を養うためにはかなり重要である事は間違いない。

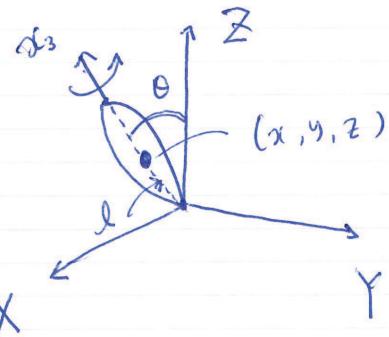


図 6.1: 固定コマの運動

6.1.1 座標系の設定

まず、静止座標系を (X, Y, Z) とし、運動座標系を (x_1, x_2, x_3) としよう。 XYZ 軸に対して、運動座標系 x_1, x_2, x_3 軸の方向を定める量として Euler 角 (θ, φ, ψ) を図 5-2 のように定義している。この場合、角速度 ω の x_1, x_2, x_3 軸の成分は

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}\tag{6.1}$$

と求められている。この式の導出は 6.5 節で行っている。

6.1.2 対称コマのエネルギー

対称コマの運動を考えよう。今は簡単のため、外場(重力)を考えない場合を考察して行こう。対称コマの場合、慣性能率が $I_1 = I_2 \neq I_3$ である。この時、対称コマの回転エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (6.2)$$

である。この式に式(6.1)の ω_1 などを代入すると

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (6.3)$$

となる。今の場合、コマに働くポテンシャルは考慮していないのでこの系の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (6.4)$$

となる。

6.2 対称コマの運動方程式

対称コマの Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} [I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{d}{dt} [I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] = 0 \quad (6.6)$$

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - I_3 \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.7)$$

となる。今、コマの角運動量を M としよう。この時、 M の方向は Z 軸である。一方、コマの回転は z 軸(3-軸)となっていて、これは ψ の回転軸方向である。従って

$$M = M_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$M_3 = M_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$$

となっている。

式(6.5)と式(6.6)より

$$M = I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.8)$$

$$M_3 = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.9)$$

が求まる。また $M_3 = M \cos \theta$ に注意して式(6.8)を書き直すと

$$M = I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.10)$$

$$= I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + M \cos^2 \theta \quad (6.11)$$

となる。これはさらに書き直すと

$$M = I_1 \dot{\varphi} \quad (6.12)$$

となっている。すなわち $\dot{\varphi}$ は一定である。

6.2.1 対称コマの θ は一定

対称コマの θ は一定となっている事を示そう。つまりは歳差運動の傾き(コマと Z 軸)の角度は一定に保たれている。これは直感的には当たり前で重力がないので歳差運動の変動がないと言う事である。対称コマのエネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \left(\frac{M}{I_1} \right)^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2I_3} M_3^2 \quad (6.13)$$

となる。一方、 θ に対する運動方程式は

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{M}{I_1} \right)^2 - \frac{M}{I_1} \sin \theta M_3 \quad (6.14)$$

となる。 $M_3 = M \cos \theta$ に注意すると上式は

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{M}{I_1} \right)^2 - \frac{M}{I_1} \sin \theta M \cos \theta = 0 \quad (6.15)$$

となり、 $\dot{\theta} = C_0$ で一定となる。従って、エネルギーの式は

$$E = \frac{1}{2} I_1 \left(C_0^2 + \left(\frac{M}{I_1} \right)^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2I_3} M_3^2 \quad (6.16)$$

となる。このため、これより θ が一定であることが分かる。

6.3 重力場中のコマの運動

一般的な重力場中のコマの運動を扱う事は難し過ぎて到底、可能とは思われない。それで図 6-1 に示したように、下端を原点に固定したコマを考えて行こう。ここでは再び、対称コマを考えよう。また、コマの重心は下端(原点)から ℓ の点にあるとしよう。この場合、コマの Lagrangian L は

$$L = T_{rot} + T_{CM} - \mathcal{M}g\ell \cos \theta \quad (6.17)$$

である。ここで \mathcal{M} はコマの質量である。 T_{rot} はコマの運動エネルギーであり、

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (6.18)$$

である。また T_{CM} はコマの重心運動のエネルギーであり、

$$T_{CM} = \frac{1}{2}\mathcal{M}\ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \quad (6.19)$$

で与えられている。これは慣性モーメント I_1, I_3 が重心の周りでのものである事と関係している。その結果、対称コマの Lagrangian L は

$$L = \frac{1}{2}\tilde{I}_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - \mathcal{M}g\ell \cos \theta \quad (6.20)$$

となっている。ここで

$$\tilde{I}_1 \equiv I_1 + \mathcal{M}\ell^2 \quad (6.21)$$

と定義している。

6.3.1 コマの運動方程式

この時、Lagrange 方程式から

$$\frac{d}{dt}[\tilde{I}_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{d}{dt}[I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] = 0 \quad (6.23)$$

$$\tilde{I}_1 \ddot{\theta} = \tilde{I}_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - I_3 \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) + \mathcal{M}g\ell \sin \theta \quad (6.24)$$

が得られる。上式 (6.22) と (6.23) において、保存量をそれぞれを

$$I_3 a \equiv I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (6.25)$$

$$\tilde{I}_1 b \equiv \tilde{I}_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \tilde{I}_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + \tilde{I}_1 a \cos \theta \quad (6.26)$$

として a, b を導入しよう。これらは初期条件に関連している物理量である。

コマは x_3 軸の周りを回転運動している。これが一番、シンプルなコマの回転運動である。それに加えて、 Z 軸の周りをコマの軸が回転している。これを歳差運動と言う。さらに、コマの首振りはもう一つある。それが章動であり、 θ の運動に対応している。まずはこの θ の運動範囲を求めて行こう。式 (6.26) より $\dot{\varphi}$ を求めると

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (6.27)$$

となる。この場合、エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) + \mathcal{M}g\ell \cos \theta + \frac{\tilde{I}_1^2}{\tilde{I}_3} a^2 \quad (6.28)$$

となる。ここで

$$E' = E - \frac{\tilde{I}_1^2}{\tilde{I}_3} a^2 \quad (6.29)$$

としよう。また

$$C_0 = \frac{2E'}{\tilde{I}_1}, \quad B_0 = \frac{2\mathcal{M}g\ell}{\tilde{I}_1}$$

と置こう。 C_0, B_0 は正の定数である。この時、 $\dot{\theta}$ に対する方程式は

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = C_0 \sin^2 \theta - (b - a \cos \theta)^2 + B_0 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (6.30)$$

と書く事ができる。ここで

$$x = \cos \theta \quad (6.31)$$

と置くと、式 (6.30) は

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(C_0 - B_0 x) - (b - ax)^2 \quad (6.32)$$

となる。

6.3.2 コマの運動範囲

コマの運動をきちんと理解する一つの方法は3個の運動方程式を数値的に解いて見る事であろう。しかしここではその解法は取らないで運動の範囲を特定しながらコマの運動を定性的に議論して行こう。

まず式(6.32)の右辺を $f(x)$ と定義して、その関数形を議論しよう。この関数 $f(x)$ がどのような条件下で正の値を取るかと言う事を検討する必要がある。この x の範囲が運動が起こる可能性がある領域である。

この関数 $f(x)$ は

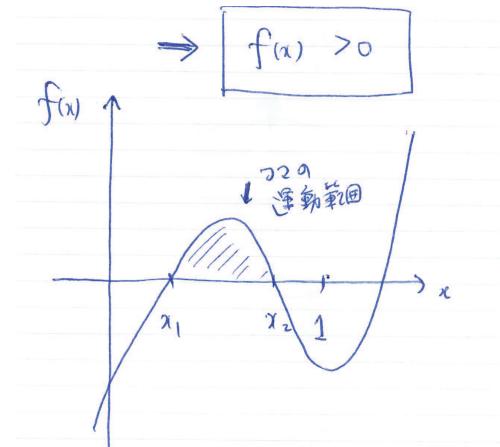


図 6.2: コマの運動範囲

$$f(x) = (1 - x^2)(C_0 - B_0 x) - (b - ax)^2 \quad (6.33)$$

となっている。この場合、コマの運動が起こる基本条件として

$$f(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.34)$$

である。ここで $f(x)$ に対して簡単にわかる条件を書いておこう。

$$f(\pm 1) \leq 0 \quad (6.35)$$

$$f(\pm \infty) \rightarrow \pm \infty, \quad (B_0 \geq 0) \quad (6.36)$$

である。また、コマの運動範囲は図 6-2 に示しているように

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad (6.37)$$

となっている。

6.4 歳差運動

歳差運動とはコマが Z 軸の周りに回転する運動であり、これは φ の時間変化に対応している。この場合、コマは x_3 軸の周りに回転しながらその x_3 軸が Z 軸の周りに回転している運動である。どのような状況で運動するのかと言う問題は簡単ではない。しかしここでは出来る限り丁寧に、またわかり易くその運動を見て行こう。

図 6-3 において矢印を持つ曲線がコマの x_3 軸を表している。この場合、 θ_1 と θ_2 の間にコマが揺れる運動が章動である。

ここではどのような条件の場合に、どのような運動をするかと言う事を以下に見て行こう。

6.4.1 $x_2 \leq \frac{b}{a}$ の時

この条件下での運動を考えて行こう。この場合、 x_2 は最大値なので

$$x \leq x_2 \quad (6.38)$$

である。従って

$$\dot{\varphi} = \frac{a \left(\frac{b}{a} - x \right)}{1 - x^2} \geq 0 \quad (6.39)$$

となっている。これより φ は常に増大している事がわかる。この速度 φ は x の依存性があるため、 θ の値によってその速度には多少の差が出ている。しかしながら、この場合、 θ の運動がどうなっているのかと言う問題に答える事は出来ないので詳しい事は良く分からぬ。

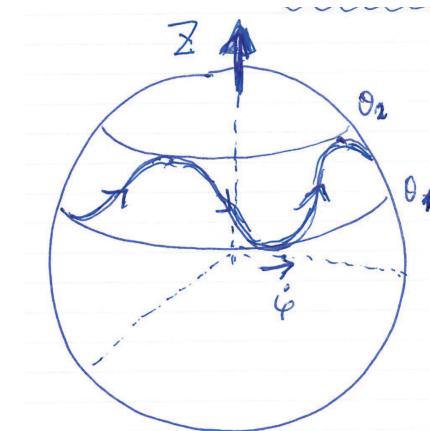


図 6.3: 歳差運動

6.4.2 $x_1 \leq \frac{b}{a} \leq x_2$ の時

この条件の場合，コマの運動はかなり複雑になっている。 $\dot{\varphi}$ は

$$\dot{\varphi} = \frac{a \left(\frac{b}{a} - x \right)}{1 - x^2} \quad (6.40)$$

で与えられているので， x がどの値かによって $\dot{\varphi}$ の符号が変わってくる。 x が x_1 の近くでは $\dot{\varphi}$ は正の値となっている。一方， x が x_2 の近くでは $\dot{\varphi}$ は負の値となっている。この状況を図にしたのが図 6-4 である。

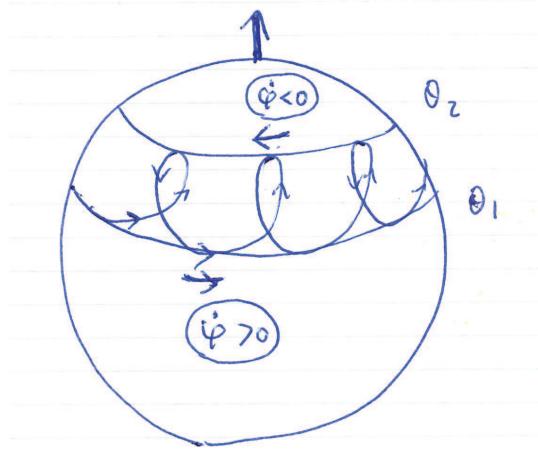


図 6.4: 歳差運動

6.4.3 章動

歳差運動をしながらコマは θ の上下運動をしている。これが章動と言われているコマの運動である。コマの θ の上下運動(章動)を詳しく知りたい場合，運動方程式

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(C_0 - B_0 x) - (b - ax)^2 \quad (6.41)$$

を解く必要がある。ここでは特別な場合を考察して見よう。

- \dot{x} が最大の場合

例えば，式 (6.41) の右辺が最大値 v_0^2 を取ったとしよう。この時， \dot{x} も一番大きな値を取っている事になる。この場合，図 6-2 から x の値はほぼ x_1 の x_2 真ん中辺りにあると言えよう。従って， θ の変化が速いのは x_1 の x_2 の中間となっている。これは実際，図 6-3 はその様子を示している。

- \dot{x} が最小の場合

一方，コマが x_1, x_2 の近くでは 式 (6.41) の右辺が最小値 v_s^2 を取る事になる。この場合， θ の変化はほとんど最小となっている。これも図 6-3 はその様子を大雑把には示している。

6.5 Euler 角と回転角速度の解説

ここでは Euler 角と回転角速度について解説しよう。この Euler 角はかなり複雑で面倒な定義となっている。しかし様々な分野で使われているし、重要でもある。特に、回転群を学ぶ時には必ず出てくるものである。3 次元空間における回転に関して、その独立な角度変数は 3 個あり、これが Euler 角に対応しているのである。その Euler 角に対応して、角速度をそれぞれ定義していく事になる。それらの角速度によって、 x_1 , x_2 , x_3 軸の角速度である ω_1 , ω_2 , ω_3 を求める事も必要な作業となっている。

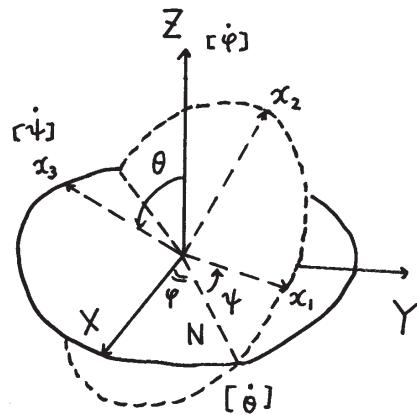


図 6.5: Euler 角と回転角速度

6.5.1 φ の定義

まず Z 軸の周りに φ だけ回転しよう。これは通常の極座標における角度 φ と同じである。従って、この角度の角速度 $\dot{\varphi}$ は Z 軸方向となっているが、その方向は右ネジの規則に依っている。 $X - Y$ 平面において、その X 軸が移ったところを新しく N 軸としている。

6.5.2 θ の定義

次に θ について定義して行こう。これは N 軸の周りに θ だけ回転したものである。この場合、 N 軸はまだ $X - Y$ 平面にあるので、この θ の定義は通常の極座標の場合と同じものとなっている。従って、この角度の角速度 $\dot{\theta}$ は N 軸方向となっている事がわかる。

ここで一つ重要な定義が入ってくる。 N 軸の周りに θ だけ回転したため Z 軸が新しく移ったことになっている。そしてこの新しい軸を x_3 軸としている。

6.5.3 ψ の定義

ここまででは基本的に言って、極座標の定義と同じであった。ここからが Euler 角の特殊性であると言える。まず新しく生成された x_3 軸に直交する平面を考えて行く。この場合、 N 軸を含むものとしよう。そしてこの x_3 軸の周りに ψ だけ回転しよう。ここで N 軸から ψ だけ移った新しい軸を x_1 軸と定義しよう。この場合 x_2 軸は自然に決まっている。従って、この角度の角速度 $\dot{\psi}$ は x_3 軸方向となっている

6.5.4 角速度 ω の x_1, x_2, x_3 軸の成分

コマの運動を記述するためには角速度を x_1, x_2, x_3 軸に射影したそれぞれの成分を求める必要がある。この場合、角速度 ω の x_1, x_2, x_3 軸の成分は

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}\tag{6.42}$$

と求められているが、この式を導出して見よう。

- 角速度 ω_3

まず x_3 軸の角速度 ω_3 を求めよう。これが一番、簡単である。 x_3 軸の角速度 $\dot{\psi}$ に Z 軸の角速度 $\dot{\varphi}$ を x_3 軸に射影したものを加えれば良い。よって

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\tag{6.43}$$

となっている。

- 角速度 ω_1

次に x_1 軸の角速度 ω_1 を求めよう。この場合、 x_3 軸の角速度である $\dot{\psi}$ は x_1 軸への射影はない。従って、まず Z 軸の角速度 $\dot{\varphi}$ を $x_1 - x_2$ 平面に射影してみると

$$\dot{\varphi} \sin \theta$$

である。

これを x_1 軸へ射影した成分は x_1 軸から測ると角度 $(\frac{\pi}{2} - \psi)$ である事を考慮して

$$\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi$$

となる。これに N 軸の角速度 $\dot{\theta}$ を x_1 軸へ射影したものを加えると

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

と求まっている。

● 角速度 ω_2

ω_2 も同様に求める事が出来る。その結果は

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

で与えられている。この右辺第2項でマイナス符号が出ているが、これは図6-5を見れば明らかであろう。

第7章 準古典近似の物理

準古典近似とは Schrödinger 方程式において $\hbar \rightarrow 0$ の極限を取る事によって，その \hbar の1次の大きさで得られる近似の方程式の事を意味している。量子力学を解説していないのに準古典近似の物理を議論するとは理論体系の観点からしたら正統的とはとても言えないものである。勿論，この事は重々承知している。

準古典近似の物理を解説しようと思い始めたのはこの物理が“quite useful”である事に依っている。例えば，太陽内部の核融合が起こる確率を計算しようとしたらどうしても WKB 近似を使う事になる。この問題に関しても量子力学の散乱理論がしっかり解かれれば，勿論，確率の計算は可能であろう。しかし現実にはそれが難し過ぎて，そう簡単に計算できると言うものではない。これらの事を考えてこの章を書いているが，何かの進歩の切っ掛けになってくれればと思っている。

7.1 Hamilton-Jacobi の方程式

Hamilton-Jacobi の方程式自体は準古典近似の手法と直接の関係があるわけではない。これは Schrödinger 方程式において $\hbar \rightarrow 0$ の極限を取ると最初の項として出てくる古典力学の方程式である。Newton 方程式とは少し違うような定式化の方程式となっているが，勿論，同じ内容の方程式である。

7.1.1 作用の修正

Hamilton-Jacobi の方程式は作用から求める事が出来る。ここでは質量 m の粒子を考えよう。作用 S は

$$S(t) = \int_{t_a}^t L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (7.1)$$

となっている。ここで注意するべき点が一つある。それはこの場合の作用の積分範囲の上限が t となっていて，作用自身が時間の関数となっていると仮定されている事で

ある。これより

$$\frac{dS(t)}{dt} = L(q, \dot{q}) \quad (7.2)$$

となる。Lagrangian は Hamiltonian H と

$$H = \dot{q}p - L(q, \dot{q}) \quad (7.3)$$

結びついているので、式 (7.2) は

$$\frac{dS(t)}{dt} = \dot{q}p - H \quad (7.4)$$

となる。よってこれを書き直すと

$$dS(q, t) = pdq - Hdt \quad (7.5)$$

となっている。一方、微分公式から

$$dS(q, t) = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt \quad (7.6)$$

である。この 2 個の式を比較する事により

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (7.7)$$

と求まる。これが Hamilton-Jacobi の方程式と言われているものである。

7.1.2 Hamilton 方程式

Hamilton-Jacobi の方程式はその定式化を示しているだけで運動方程式はまだ書かれていない。従って、この形式での Hamilton 方程式を求める必要がある。ここで Hamiltonian を $H(p, q)$ とする時 (p, q) に対する Hamilton 方程式は

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

である。ここでは正準変換を考慮して運動方程式を求めよう。Hamilton-Jacobi の方程式においては正準変換における母関数は作用 S である。この場合、正準変換は

$$pdq - Hdt = \alpha d\beta - H'dt + dS \quad (7.8)$$

となっている。ここで α, β は新しい運動量と座標である。また H' が新しい Hamiltonian である。この式を書き直すと

$$\begin{aligned} dS &= pdq - \alpha d\beta + (H' - H)dt \\ &= \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial S}{\partial t}dt \end{aligned} \quad (7.9)$$

である。これより

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \alpha = -\frac{\partial S}{\partial \beta}, \quad H' - H = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (7.10)$$

である。この結果を式 (7.7) と比較すると

$$H' = 0, \quad \alpha = -\frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (7.11)$$

が求まる。これが新しい変数に対する運動方程式である。 $H' = 0$ なので、新しい変数 α, β の Hamilton 方程式

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial H'}{\partial \alpha} = 0 \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\partial H'}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}$$

から、これら α, β は定数である事がわかる。

7.1.3 時間に依らない Hamilton-Jacobi の方程式

ここで具体的な計算を行って見よう。まず

$$S(t) = S_0(q) - Et \quad (7.12)$$

としよう。この時、式 (7.7) は

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q} \quad (7.13)$$

$$H = E \quad (7.14)$$

となっている。今、具体的な問題として、1 次元の調和振動子ポテンシャル $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$ 中の粒子を考えよう。この場合、Hamiltonian H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 = E \quad (7.15)$$

となる。よって

$$S_0(q) = \int^q \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q'^2)} dq' \quad (7.16)$$

となる。ここで $S = S_0 - Et$ であるので、運動方程式

$$\alpha = -\frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (7.17)$$

を使う必要がある。この場合、 β に対応する定数は E である。よって

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_0}{\partial E} - t = -\alpha \quad (7.18)$$

となっている。式 (7.16) より

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = \int^q \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 q'^2}} = t - \alpha \quad (7.19)$$

となる。ここで

$$q' = q_0 \sin \theta, \quad q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (7.20)$$

と置きかえると式 (7.19) は

$$\theta = \omega(t - \alpha) \quad (7.21)$$

となる。これより

$$q = q_0 \sin \omega(t - \alpha) \quad (7.22)$$

と求められている。これは調和振動子の解と一致している。

7.2 Sommerfeld の量子化法

Sommerfeld の量子化法は量子力学の初期段階では非常に有効な手法であった。特に、クーロンポテンシャルや調和振動子の固有値を求めるとき、正しいエネルギー準位が求められるのである。これは準古典近似の一つであり、ここで簡単に解説しよう。

7.2.1 Sommerfeld 量子化の規則

まずは1次元の Schrödinger 方程式から出発しよう。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (7.23)$$

ここで波動関数が次のような形を持つと仮定しよう。

$$\psi(x) = A e^{i \frac{S}{\hbar}} \quad (7.24)$$

A は定数である。そしてこの式を \hbar で

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \dots \quad (7.25)$$

と展開しよう。これを Schrödinger 方程式に入れてみよう。この時、 \hbar の 0 次の項である S_0 に対して

$$\frac{dS_0(x)}{dx} = \pm \sqrt{2m(E - V(x))}. \quad (7.26)$$

と求まる。これは Hamilton-Jacobi の方程式である。

よって波動関数 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = A e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int \sqrt{2m(E - V(x))} dx}. \quad (7.27)$$

となる。ここで波動関数が 1 値であることの条件

$$\oint pdx \equiv \oint \sqrt{2m(E - V(x))} dx = 2\pi\hbar n, \quad (n: \text{は整数か半整数}) \quad (7.28)$$

を課すが、これが Sommerfeld の量子化則である。

7.2.2 クーロンポテンシャル ($V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$) のエネルギー

Sommerfeld 量子化法によりクーロンポテンシャル ($V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$) のエネルギーを計算すると

$$\oint pdr = 2\sqrt{2m|E|} \int_0^{r_0} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} dr = nh, \quad \left(\text{但し, } r_0 = \frac{Ze^2}{|E|} \right) \quad (7.29)$$

となる。ここでこの積分を実行して見よう。この場合 $r = r_0 \sin^2 \theta$ と置換すると

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} dr &= 2r_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\pi r_0}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。従って、クーロンポテンシャルの場合、そのエネルギーは

$$E = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2} \quad (7.30)$$

と求まる。ここで $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ に注意しよう。これは良く知られている水素型原子の正しいエネルギー固有値となっている。

7.2.3 調和振動子 ($V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$) のエネルギー

次に調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ の場合のエネルギーを求めて見よう。この場合、 $x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ と置くと Sommerfeld 量子化則は

$$\begin{aligned} \oint pdx &\equiv \int \sqrt{2m(E - V(x))} dx = 2m\omega \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{x_0^2 - x^2} dx \\ &= 2\pi\hbar n \end{aligned} \quad (7.31)$$

となる。ここで積分を $x = x_0 \sin \theta$ と置換して実行すると

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{x_0^2 - x^2} dx = \frac{\pi x_0^2}{2} \quad (7.32)$$

と求まる。これより n は整数か半整数であることが Sommerfeld 量子化法の条件なので、この点を考慮するとエネルギー E は

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.33)$$

と求められている。これは確かに調和振動子ポテンシャルの正しいエネルギー固有値となっている。

7.2.4 井戸型ポテンシャルのエネルギー

1 次元の井戸型ポテンシャルは

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (7.34)$$

のポテンシャルである。Sommerfeld 量子化法による計算は

$$\oint pdx \equiv \oint \sqrt{2m(E - V(x))} dx = 2\sqrt{2m(E + V_0)}2a = 2\pi\hbar n \quad (7.35)$$

となり、これよりエネルギー固有値は

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2 (\frac{\pi n}{2})^2}{2ma^2} \quad (7.36)$$

と求められる。これを量子力学の方程式を解いた厳密解と比較して見よう。この場合、 E は

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)a^2}{\hbar^2}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{2mEa^2}{\hbar^2}} \quad (7.37)$$

$$\beta = \alpha \tan \alpha \quad (7.38)$$

から求める事ができる。これは数値計算をする以外、簡単には求められないものである。ここでは近似式を求めてみよう。今、

$$\alpha \simeq \frac{\pi}{2}n \quad (7.39)$$

を仮定して見よう。この時、式 (7.37) から

$$E \simeq -V_0 + \frac{\hbar^2 (\frac{\pi n}{2})^2}{2ma^2} \quad (7.40)$$

と求められて、これは Sommerfeld 量子化法による計算結果と一致している。しかしながら、この手法には問題点がある。式 (7.39) の仮定は式 (7.38) を満たしてはいるのである。これは Sommerfeld 量子化法が近似的にしか成り立たない手法である事に依っている。

7.2.5 δ 関数ポテンシャル $[V(x) = -V_\delta\delta(x)]$ のエネルギー

δ 関数ポテンシャル $[V(x) = -V_\delta\delta(x)]$ の問題を Sommerfeld 量子化法によって計算しようとするとうまく出来ない。これはルートの中に δ 関数が入ってしまうため、その先の計算が簡単には出来ないのである。

ここではこの困難が何処から来ているのか検証してみよう。井戸型ポテンシャルのエネルギーは式 (7.38)

$$\sqrt{-\frac{2mEa^2}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)a^2}{\hbar^2}} \tan \sqrt{\frac{2m(E + V_0)a^2}{\hbar^2}} \quad (7.41)$$

を解いて求める事になっている。ここで $a \rightarrow 0$, $V_0 \rightarrow \infty$ として、しかし aV_0 は有限としよう。この時、式 (7.41) は

$$\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \simeq \sqrt{\frac{mV_\delta}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{mV_\delta}{\hbar^2}} \quad (7.42)$$

と書く事が出来る。これは E が

$$E = -\frac{mV_\delta^2}{2\hbar^2} \quad (7.43)$$

である事に対応している。この様に量子力学から得られた方程式に極限操作を行わなければ解けない場合、Sommerfeld 量子化法はうまく機能しないと言う事である。

7.3 WKB 法

ここでは WKB 法について簡単に解説して行こう。これは準古典近似を散乱理論に応用して、ポテンシャルの山を透過する確率を計算する時に良く使われる手法である。特にトンネル効果の記述に応用されている。

7.3.1 トンネル効果

重い原子核において α 粒子の崩壊が観測されている。この場合、図 7-1 に示すような物理過程で起こっていると考えられている。すなわち、原子核内にある α 粒子がポテンシャルの山をトンネル効果で突き抜けて原子核から外に飛び出て行くと言う描像である。この場合、このポテンシャルの山は核力とクーロン斥力によって形成されていると考えられている。

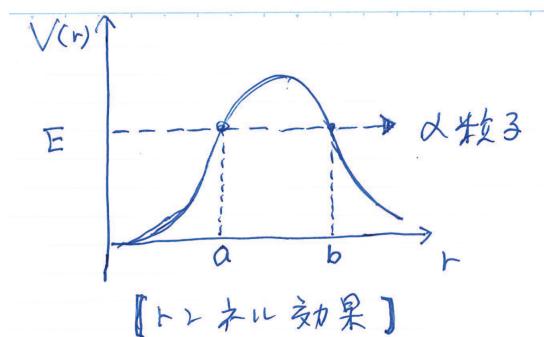


図 7.1: トンネル効果

このトンネル効果の定式化を WKB 法により行う。 α 粒子の波動関数は

$$\begin{cases} \psi_1(r) \simeq Ae^{ikr}, & r < a \\ \psi_2(r) \simeq Be^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^r \sqrt{2m(V(r)-E)} dr}, & a < r < b \\ \psi_3(r) \simeq Ce^{ikr}, & b < r \end{cases} \quad (7.44)$$

と近似的に書く事が出来る。ここで波動関数の接続を要求すると

$$(i) \quad r = a \quad Ae^{ika} = B \quad (7.45)$$

$$(ii) \quad r = b \quad Be^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(r)-E)} dr} = Ce^{ikb} \quad (7.46)$$

となっている。従って透過確率 P は

$$P = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(r)-E)} dr} \quad (7.47)$$

と求められる。これが α 粒子のトンネル確率(崩壊確率)に対応している。

7.3.2 クーロン障壁の透過率

太陽内部で核融合が起こっているが、この場合、原子核がクーロン障壁を突き抜けて原子核同士を接近させて原子核反応を起こさせる必要がある。太陽内部の温度が一定以上に大きければこの透過確率が充分大きくなり、原子核反応を起こす事が出来る。衝突する粒子のエネルギーによって、クーロン障壁を超えて原子核同士が近づくと言う描像である。我々の太陽内部ではその入射原子核は主に陽子となっている。この場合、図7-2に示すような物理過程で起こっていると考えられている。

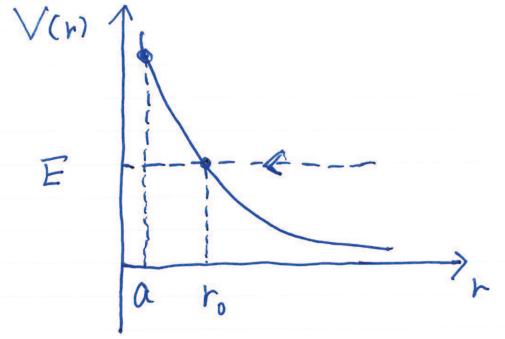


図 7.2: クーロン障壁の透過

クーロン障壁の透過確率を計算しよう。透過確率 $P(E)$ は

$$P(E) = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^{r_0} \sqrt{2m(V(r)-E)} dr} \quad (7.48)$$

である。ただし r_0 は図 7-2 より

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \quad (7.49)$$

と求まっている。この場合、クーロンポテンシャルは

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (7.50)$$

であり、斥力となっている。 Z_1, Z_2 は核融合する原子核の電荷である。まずは積分を実行しよう。

これは

$$\int_a^{r_0} \sqrt{2m \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} dr = \sqrt{2mE} \int_a^{r_0} \sqrt{\frac{r_0}{r} - E} dr \quad (7.51)$$

$$= \sqrt{2mE} \left\{ \frac{\pi r_0}{2} - \left(a \sqrt{\frac{r_0 - a}{a}} + r_0 \sin^{-1} \sqrt{\frac{a}{r_0}} \right) \right\} \quad (7.52)$$

となっている。ここで a は充分小さいので $a \rightarrow 0$ として良い。従って、式 (7.52) の最後の項は無視しても充分良い近似である。よって透過確率 $P(E)$ は

$$P(E) = e^{-\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}} \quad (7.53)$$

と求められている。これから核融合の起こる断面積 σ は

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}} \quad (7.54)$$

と書く事ができる。ここで σ_0 はこの計算では決まらない定数である。

第8章 電磁場中の荷電粒子

荷電粒子が電磁場中においてどのような運動をするのかと言う問題は基本的には量子力学の問題となっている。しかしここではこの問題を古典力学の範囲で議論しようと思う。ある程度の物理は古典力学でも学ぶことが出来るものである。

8.1 荷電粒子と電磁場の相互作用

Maxwell 方程式を基本法則と考えた時、荷電粒子は電磁場とどの様な力をおよぼし合うのであろうか？これは実はゲージ不变性から決定されている。ここでは古典力学と電磁場の相互作用を考えて行こう。古典力学では自由荷電粒子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \quad (8.1)$$

である。これが電磁場と相互作用する時、Lagrangian がゲージ変換に対して不变であると仮定する。この時、Lagrangian は次の形に一意的に決まる事が示されている。そしてそれは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \phi) \quad (8.2)$$

となっている。この Lagrangian はゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (8.3)$$

に対して

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' - \phi') - e\frac{d\chi}{dt} \quad (8.4)$$

となる。ところが、Lagrangian に全微分項 $e\frac{d\chi}{dt}$ を加えても Lagrange 方程式は不变である。

ここでこのチェックを行おう . Lagrangian を

$$L = \frac{d\chi(q, t)}{dt} = \frac{\partial\chi(q, t)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial\chi(q, t)}{\partial t} \quad (8.5)$$

としよう . この時 Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (8.6)$$

である . よって

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\chi(q, t)}{\partial q} \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{d\chi(q, t)}{dt} \quad (8.8)$$

となつていて Lagrange 方程式は常に満たされている . このため , 全微分項は方程式の不变性には影響しない事が確かめられたのである . 従つて , この Lagrangian [式 (8.2)] はゲージ変換に対して不变であると言う事が示されたのである .

8.1.1 全微分項と作用

Lagrangian のゲージ変換による不变性を見る時 , 作用で見るとわかり易い . ゲージ変換後 , 作用は

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \left(L_0 + e \frac{d\chi}{dt} \right) dt \quad (8.9)$$

となつた場合を考えよう . ここで

$$L_0 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' - \phi') \quad (8.10)$$

である . この時 , 作用は

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L_0 dt + e \{ \chi(t_a) - \chi(t_b) \} \quad (8.11)$$

となる . ここで右辺の第 2 項は定数であり , これは変分には効かない . すなわち , ゲージ不变性が示されている事がわかる .

8.2 運動方程式

この Lagrangian により、荷電粒子と電磁場の相互作用は古典力学の範囲で決まった事になる。この Lagrangian から運動方程式を求めてみよう。まず Lagrangian を成分で書いておこう。これは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z - \phi) \quad (8.12)$$

である。Lagrange 方程式を x 成分について実行しよう。これは

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (8.13)$$

となっているので

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + eA_x) = e \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (8.14)$$

となる。一方、

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (8.15)$$

となっている。よって式 (8.14) は

$$m\ddot{x} + e \left(\dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = e \left(\dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (8.16)$$

となる。ここで

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (8.17)$$

を使うと式 (8.16) は

$$m\ddot{x} = eE_x + e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_x \quad (8.18)$$

となっている。これより、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (8.19)$$

となり、良く知られているクーロン力と Lorentz 力が導出されている。

8.3 一様磁場下の電子の運動

電場と磁場のある場合の電子の運動は式 (8.19) で記述されている。定電場がある場合の運動は一定の力が働く場合と同じなのでここでは省略しよう。電磁場で特別な力となっているのは磁場であることから一様磁場下での電子の運動を調べて見よう。 z 軸方向に一様な磁場 B

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad (B \text{ は定数}) \quad (8.20)$$

が電子に働いているとしよう。この場合、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (8.21)$$

である。これを成分表示すると

$$m\ddot{x} = eB\dot{y} \quad (8.22)$$

$$m\ddot{y} = -eB\dot{x} \quad (8.23)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (8.24)$$

となる。ここでは z 軸方向の運動は考慮しない事にしよう。

式 (8.23) を 1 回積分すると

$$m\dot{y} = -eBx + C_0 \quad (8.25)$$

となる。これを式 (8.22) に代入すると

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = \frac{eB}{m} C_0 \quad (8.26)$$

となる。ここで

$$\omega \equiv \frac{eB}{m} \quad (8.27)$$

を導入すれば方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{eB}{m} C_0 \quad (8.28)$$

となる。これは直ちに解く事が出来て、その解は

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{C_0}{m\omega} \quad (8.29)$$

と求まる。 y についても直ちに

$$y = C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t + C_3 \quad (8.30)$$

と求められる。この場合、定数を適当に選んで

$$x - x_0 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (8.31)$$

$$y - y_0 = C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t \quad (8.32)$$

としよう。この時

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C_1^2 + C_2^2 \equiv R^2 \quad (8.33)$$

となっていて、これは電子が半径 R の円運動をしている事を示している。これは Larmor 運動として知られているものであり、量子力学の結果と基本的に同じとなっている。また、この周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (8.34)$$

となっている。

第9章 古典力学の散乱理論

散乱理論は量子力学でもその取扱いはかなり難しいものである。古典力学においては散乱理論の厳密な定式化が可能かどうか良く分からぬ。しかし古典力学における散乱断面積は直感的にはわかり易いとも言えるので、ここで少し散乱理論に慣れておくことは無駄にはならないと思われる。ここではまず剛体との弹性散乱における散乱断面積について解説しよう。そしてその後、Rutherford 散乱の微分断面積を計算しよう。これは勿論、量子論的な散乱理論を勉強するために多少の手助けにはなると期待して解説しているものである。

9.1 剛体との弹性散乱

質点が半径 R の剛体と散乱する場合の散乱断面積を求めてみよう。そして散乱断面積の計算結果が

$$\sigma = \pi R^2 \quad (9.1)$$

となる事を示して行こう。まず、衝突パラメータ (impact parameter) と言う物理量を導入しよう。これは図のように b を衝突パラメータと定義している。この場合、微分断面積は

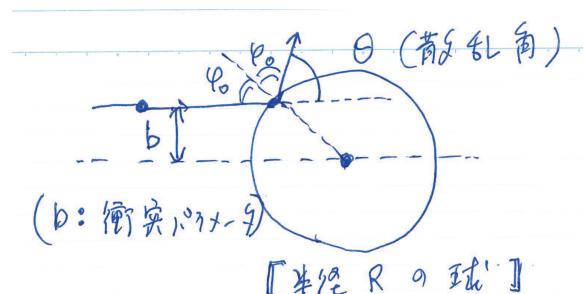


図 9.1: 剛体との散乱

$$d\sigma = d^2b = bdbd\varphi = 2\pi bdb \quad (9.2)$$

となる。この衝突パラメータ b は入射粒子の速度の方向を z 軸とした場合、円筒座標の 2 次元平面座標 r に対応している。

今の場合，散乱過程で φ の依存性はない。従って φ の積分ができる 2π が出ている。微分断面積 $d\sigma$ を求めるためには，まず衝突パラメータ b と粒子の散乱角 θ とを関係づける必要がある。よって式 (9.2) を

$$d\sigma = d^2b = bdbd\varphi = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta \quad (9.3)$$

と書き直そう。絶対値を付けたのは断面積が正の値を取るからである。図 9-1 から

$$2\varphi_0 + \theta = \pi \quad (9.4)$$

である。よって

$$b = R \sin \varphi_0 = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (9.5)$$

となる。これより

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.6)$$

である。よって微分断面積は

$$d\sigma = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = \frac{\pi}{2} R^2 \sin \theta d\theta \quad (9.7)$$

となる。ここで立体角 $d\Omega$ を

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

とすれば微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2 \quad (9.8)$$

となっている。これより剛体散乱の全断面積は

$$\sigma = \pi R^2 \quad (9.9)$$

となる。これは半径 R の球を遠方から見た時の断面積である。

9.2 Rutherford 散乱

荷電粒子が原子核と散乱する過程は Rutherford 散乱と呼ばれている。これは原子核が作るクーロン場 $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ と荷電粒子とのクーロン散乱であり、散乱理論の定番でもある。この微分断面積は量子力学における散乱理論によって記述されているが古典力学の手法でも微分断面積が正しく求まっている。ここではその計算を紹介しよう。

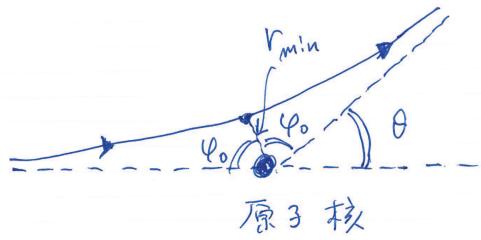


図 9.2: Rutherford 散乱

原子核が作るクーロンポテンシャルは $\alpha = Ze^2$ なので

$$U(r) = \frac{Ze^2}{r} \quad (9.10)$$

である。ここではこの Rutherford 散乱の微分断面積を求めて行こう。最初にその結果を書いておこう。この微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9.11)$$

と書かれている。ここで v は入射粒子の速度である。

9.2.1 角運動量の保存

この散乱においては中心力との散乱であるため、角運動量 L は保存する。この場合、角運動量 L は

$$L = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (9.12)$$

である。図 9-1 からこの質点の角運動量の大きさ L は

$$L = mbv \quad (9.13)$$

となっている。

9.2.2 φ_0 の計算

クーロンポテンシャルの場合，その軌道を与える方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2m \left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)} \quad (9.14)$$

であった．ここで図9-2 から φ_0 は

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (9.15)$$

となる．ここで r_{min} は荷電粒子が原子核に最も近付いた時の距離である．この積分の計算はすでに Kepler 問題のところで解説しているので，ここではその結果だけを書いておこう．この場合，この積分は

$$\cos \varphi_0 = \frac{\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + \frac{2L^2}{mE}}} \quad (9.16)$$

となっている．ここで

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad L = mbv \quad (9.17)$$

を使うと

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2b}{\alpha}\right)^2}} \quad (9.18)$$

と求まる．これより

$$\tan \varphi_0 = \frac{mv^2b}{\alpha} \quad (9.19)$$

となり， φ_0 を衝突パラメータ b と関係づける事が出来ている．

一方，図 9-2 より

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad (9.20)$$

なので，これより

$$b = \frac{\alpha}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (9.21)$$

である．式 (9.2) で定義されているように，散乱の微分断面積は

$$d\sigma = b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \frac{d\Omega}{\sin \theta} \quad (9.22)$$

となっている．ここで式 (9.21) を使って上式の計算を実行すれば Rutherford 散乱の微分断面積が求まる．それは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (9.23)$$

と書かれている．この結果は量子論の散乱理論で計算された Rutherford 散乱の微分断面積と一致している．しかしながら，この一致はクーロンポテンシャルの特殊性に依っているものと考えられる．実際，剛体との散乱の場合，古典論の結果は量子力学の計算とは少し異なったものである事が知られている．

第10章 力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである。その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果をある程度は内包している。この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である。

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である。この速度 v は約 $v \simeq 10^{-4}c$ である。従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ である。よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期（1年）が約 $\pi \times 10^7$ 秒である事から，これまでの Newton 力学における周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる。

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう。しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである。

10.1 重力附加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている。従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (10.1)$$

と求まっている。右辺の第 2 項が新しい重力ポテンシャルの補正項である。これは Zeeman 効果の導出と良く似ている。電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない。しかしふくトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を

含めた様々な項が現われている。一方、重力はスカラー項として入っているので、非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである。

10.1.1 非可積分ポテンシャル

式(10.1)の第2項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている。かつて、カオスの理論が流行していた時があったが、その頃、この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった。この場合、非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた。従って、この取り扱いには十分な注意が必要である。

非可積分ポテンシャル $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ がある場合、厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう。ここではこの問題を詳しく見て行こう。まず式(10.1)で与えられるポテンシャル問題を解くと、その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \quad (10.2)$$

となっている。この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり、何か特別な事を考える必要があると言うわけではない。但し、定数の修正はあり、ここでは A_g と L_g がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \quad (10.3)$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2}} \equiv \ell \sqrt{1 + \eta} \simeq \ell \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \quad (10.4)$$

と定義されている。但し、 η は

$$\eta \equiv \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (10.5)$$

である。

10.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない！

軌道を与える式(10.2)には明らかに問題がある。まず、一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) \quad (10.6)$$

を見てみよう。この場合、この式はデカルト座標

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (10.7)$$

で表す事が出来ない。実際、 $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ 項は

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r} \cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r} \sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \quad (10.8)$$

としてみると分かるように、デカルト座標では表現不能である。元々はデカルト座標から出発しているので、これは深刻な問題である。

10.1.3 軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある。軌道の解である式(10.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である。これは軌道 r が $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ でどうなっているのかを見れば良くわかるものである。すなわち、

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon}, \quad \varphi = 0 \quad (10.9)$$

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \pi\eta}, \quad \varphi = 2\pi \quad (10.10)$$

となっているため、同じ点で軌道に飛びがある。この差を Δr とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \quad (10.11)$$

となっている。但しこれは水星の場合である。これは勿論、自然界では起こってはならない現象である。

10.1.4 軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが，一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである。しかも，観測値と理論値が3桁近くも一致していたと言う主張であった。これは，一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が，実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう。

さらに言えば，水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には100年間の水星近日点シフト値として求められたものである。この場合，水星近日点シフトの観測値から，木星などの影響を考慮した計算値を差し引く必要があったのである。ところが，木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて，またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている。その意味で，これらの計算を自分で実行すれば，この計算値には不透明な部分が相当あり，到底，信頼できる計算ではない事が分かるものである。

物理屋として自然をきちんと理解するためには，どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう。そして，その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう。

10.2 非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう。この場合、基本的な方針は変数である φ に摂動係数 η が関係する場合に注意を要すると言う事である。まず、軌道を決める方程式を書いて置こう。これは

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2} \\ &= r^2 \sqrt{1 + \eta} \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1 + \eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1 + \eta)r} - \frac{1}{r^2}} \end{aligned} \quad (10.12)$$

である。この式は

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1 + \eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1 + \eta)r} - \frac{1}{r^2}}} \quad (10.13)$$

と書き換える事が出来る。ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2 c^2} \right)^2 \quad (10.14)$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \quad (10.15)$$

と非常に小さな量である事に注意しよう。従って、この η を摂動的に扱う必要がある。すなわち

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi \simeq d\varphi \quad (10.16)$$

と近似して見る事である。この場合、近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり、これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある。

10.2.1 摂動計算の最低次項

まず、摂動計算における最低次項を見て行こう。この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \quad (10.17)$$

となっている。これは確かに閉じた軌道を与えていている。そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (10.18)$$

となっている。ここで A_g は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2} (1 + \eta) \quad (10.19)$$

である。この場合、離心率 ε も変更を受けているが運動力学には影響していないので、具体的には書いてない。その意味においては、この付加ポテンシャルによる影響とは、軌道半径 A_g が変更されたと言う事に対応している。

この軌道の式 (10.18) から明らかなように、近日点のシフトはない。これは物理的には当然で、非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても、これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である。

10.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう。式 (10.18) の解を $r^{(0)}$ すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

である。また摂動項を r' ($r = r^{(0)} + r'$) とすれば r' に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2} \eta (r^{(0)})^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \quad (10.20)$$

となる。この場合、上式の右辺は φ にのみ依存していて r' には依っていない。ここで離心率 ε をゼロとすると右辺はゼロになっている。従って r' は離心率 ε に比例している事がわかる。よって r' は

$$r' \simeq C_0 \eta \varepsilon A_g \quad (10.21)$$

と書く事が出来る。ここで C_0 は定数である。地球公転の場合、 ε は ($\varepsilon \simeq 0.0167$) と非常に小さいので、この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである。

10.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため、これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている。この事は歴史的にみても非常に重要である。実際には、これは非常に小さい効果ではあるが、しかし観測に掛かる程度の大きさではある。この影響を定量的に計算して確かめて行こう。

10.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \quad (10.22)$$

となる。ここで η は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (10.23)$$

と書かれている。この式で R は平均軌道半径、 ω は角速度で Newton 周期 T と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている。この事より、重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として、周期のズレ ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (10.24)$$

である [4, 5]。ここで、式 (10.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である。この式より、正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している。

この周期のズレは大雑把に言って $\sim 10^{-8}$ の大きさであり、これは現在、時間に関する測定精度から見ても十分、観測可能な量である。但し、地球の公転周期を直接、この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる。しかしながら幸いにして、次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている。

10.3.2 地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R ，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (10.25)$$

である。ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である。従って 1 年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{\text{Orbital Motion}} = 0.621 \text{ s/year} \quad (10.26)$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている。従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している。実際，うるう秒の補正は 1972 年 6 月から始まりこれまで 40 年間に 25 秒補正している。従って 1 年間での観測値は

$$\Delta T_{\text{Orbital Motion}}^{\text{Obs}} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (10.27)$$

である。これは式 (10.26) の理論値と完全に一致している。

10.3.3 うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [6]。すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる。

第11章 水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている。ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により、どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう。そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう。但し、Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが、彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多くあるものである。このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ、残念ながら実行できていない。

しかしながら、この場合においては、水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている。観測値と言っても、その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており、この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである。現在においては、一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため、一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている。このため、水星近日点シフトの観測値を理論値と比較すると言う場合、この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている。

11.1 水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\mathbf{r}}_w^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|} \quad (11.1)$$

から計算を始める事になる。ここで (m, \mathbf{r}) と (m_w, \mathbf{r}_w) は水星と惑星の質量とその座標を表している。式 (11.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している。今の場合、この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる。

11.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう。これは実際の観測と比べても十分、良い近似であると言えよう。従って、上記の Lagrangian を 2 次元極座標で書いておくと

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r}_w^2 + r_w^2\dot{\varphi}_w^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} \\ & + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w)}} \end{aligned} \quad (11.2)$$

となっている。従って、水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.3)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w \sin(\varphi - \varphi_w)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.4)$$

$$m_w\ddot{r}_w = m_wr_w\dot{\varphi}^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.5)$$

$$\frac{d}{dt}(m_wr_w^2\dot{\varphi}) = -\frac{Gm_wMrr_w \sin(\varphi_w - \varphi)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.6)$$

である。

11.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合、これは単純な Kepler 問題である。この場合、運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \quad (11.7)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (11.8)$$

となっている。そしてこの解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (11.9)$$

とある。ここで A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad \text{但し } (\alpha = GMm) \quad (11.10)$$

である。これが非摂動の運動となっている。

11.2 惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう。この場合、水星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.11)$$

である。ここで右辺の最後の項において r, r_w を平均半径 R, R_w で置き換えると言う近似を行う。従って、方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(R - R_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (11.12)$$

となる。以下では式 (11.12) の近似解を求めて行こう。

11.2.1 Legendre 展開

ここで最後の項 (11.12) を F として

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{但し, } x = \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (11.13)$$

と定義しよう。そしてこれを

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} x + \dots \quad (11.14)$$

と Legendre 展開しよう。従って、運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (11.15)$$

となる。ここで定数項は影響しないので無視している。

11.2.2 逐次近似法

この方程式 (11.15) を逐次近似法によって解いて行こう。まず、この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \quad (11.16)$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \quad (11.17)$$

を代入しよう。この場合、式 (11.15) は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (11.18)$$

となる。ここで b, β は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \quad (11.19)$$

となっている。

11.2.3 特殊解

方程式 (11.18) を解くために、まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう。従つて、 r は次のような解を持つと仮定しよう。

$$r = r^{(0)} + K \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (11.20)$$

ここで $r^{(0)}$ は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (11.21)$$

である。この場合、式 (11.20) を式 (11.18) に代入しよう。この時、 K は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \quad (11.22)$$

とすぐに求める事が出来る。よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \quad (11.23)$$

となる。

11.3 水星近日点に対する惑星の効果

ここで Kepler 問題の解 $r^{(0)}$ を代入すると軌道の解は

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{R(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} (\omega - \omega_w)^2} \cos(b + \beta t)} \end{aligned} \quad (11.24)$$

となっている。ここで $A \simeq R$ であり、また $\beta = \omega - \omega_w$ である。また ε_w を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2(\omega - \omega_w)^2} \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (11.25)$$

と定義しよう。ここで $b + \beta t = \varphi - \varphi_w$ を使うと軌道 r は

$$r \simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)} \quad (11.26)$$

となる。これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる。

11.3.1 数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度、影響するのかと言う問題を具体的な数値を入れて評価して見よう。まず $\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)$ 項を

$$\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\varphi + \delta) \quad (11.27)$$

と書き換えよう。ここで c_1 と c_2 は

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w \quad (11.28)$$

$$c_2 = \varepsilon_w \sin \varphi_w \quad (11.29)$$

であり、 $\cos \delta$ は

$$\cos \delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad (11.30)$$

と定義されている。ここで ε_w は ε よりもはるかに小さいので式 (11.30) は

$$\cos \delta = \frac{\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w)^2 + (\varepsilon_w \sin \varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon} \right)^2 \sin^2 \varphi_w \quad (11.31)$$

と書く事が出来る。

11.3.2 惑星運動の1周期の平均

ここで惑星運動の1周期における平均操作を行おう。この場合、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_w d\varphi_w = \frac{1}{2} \quad (11.32)$$

となり、従って1周期における平均操作を行うと δ は

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \frac{GM}{R_w^2} \frac{1}{R(\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &\simeq \frac{R_w \omega_w^2}{\sqrt{2}\varepsilon R(\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (11.33)$$

となる。但し、惑星の軌道は円であると近似している。

11.4 数値計算の結果

まず δ の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう。但し、表1においては全て地球を単位として計っている。

表1 惑星の性質

惑星	水星	金星	火星	木星	土星	地球	太陽
軌道半径	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
質量	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
周期	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
ω	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

11.4.1 100年間の δ の値

表2では100年間における近日点シフト値の δ を表にしている。そしてこの計算結果を Newcomb の計算と比較している。

表2 100年間の δ 値

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
δ [式 (11.33)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
δ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

その結果、 δ についての我々の計算値は 111.1 であるのに対して、Newcomb の計算値は 109.3 であり、両者は予想以上に良く一致している。

11.4.2 観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は19世紀のものであるが、これはその前の100年間に渡る水星近日点シフトに対応している。この観測値がどの程度、信用できるのかと言う問題にここで答える事は出来ない。これは今後の課題である。

第12章 初等量子論

古典力学を深く理解するためにはどうしても量子力学における基本的な性質をある程度、理解している事が必要となっている。それは古典力学が量子力学を近似する事によって得られているからである。

しかしながら長い間、古典力学から量子力学の方程式を導出すると言う方法論の解説が教科書では常に行われていたものである。この事は量子力学の方程式が力学や電磁気学の理論が完成されてから随分と時間が経ってから発見された事と関係しているものと考えられる。

しかし近似された方程式からその元の方程式を導出する事は論理的に言って勿論、不可能な事である。従ってここではその試みを捨てて、量子力学の方程式から古典力学の方程式が導出される過程を吟味して、またどのような物理がその近似に関係しているのかと言う視点で量子力学を解説して見よう。

この章においては自然単位系 ($\hbar = 1, c = 1$) を採用している。数値的な計算を必要としている場合、 $\hbar c = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ を使えば簡単に計算する事ができる。これは複雑な計算の間違いを防ぐためのベストの単位系である。但し、必要に応じてこの \hbar, c を適当に戻す場合があるが、それはその方が見やすいと言う事である。

12.1 量子力学の発見

量子力学は20世紀になって発見されたが、その基礎方程式の発見に至るまでには、数えきれないほどの実験データが積み重ねられ、また様々な形での理論的な模型計算が提案されてきたものである。そして1925年にそれらを包括的に説明できる模型が Schrödinger によって発見されたのである。この Schrödinger 方程式は状態関数 $\psi(t, r)$ に対する2階の微分方程式である。

質量 m , ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ に対して, Schrödinger 方程式は

$$i\frac{\partial\psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\psi(t, \mathbf{r}) \quad (12.1)$$

となっている。これは古典力学の Newton 方程式とは似ても似つかない方程式である。実際、古典力学は質点の時間発展やその軌道に興味があるのに対して、この方程式はその軌道と言う概念も存在しないし、また時間発展にもあまり興味がないものとなっている。

12.1.1 Schrödinger 方程式の目的は何か？

それでは、この方程式ではどのような物理量が計算されて、どの自然現象を記述しようとしているのであろうか？実はこの式からではまだ、何も見えては来ていないので、まずは時間 t と空間 \mathbf{r} を変数分離する事から始めよう。このため、

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \xi(t)\phi(\mathbf{r}) \quad (12.2)$$

として式 (12.1) に代入しよう。そして変数分離のテクニックにより

$$\frac{i\frac{d\xi(t)}{dt}}{\xi(t)} = \frac{\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\phi(\mathbf{r})}{\phi(\mathbf{r})} = E \quad (12.3)$$

と計算する事ができる。ここで定数 E を導入した。従って

$$\frac{i\frac{d\xi(t)}{dt}}{\xi(t)} = E \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = e^{-iEt} \quad (12.4)$$

となる。また $\phi(\mathbf{r})$ に対する方程式は

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}) \quad (12.5)$$

となっている。この式から Schrödinger 方程式は質量 m の質点がポテンシャル $U(\mathbf{r})$ に束縛されている時、そのエネルギー固有値 E を求めるための方程式である事が分かるのである。

12.1.2 状態関数 ψ とは？

それでは状態関数

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt} \phi(\mathbf{r}) \quad (12.6)$$

は物理的には何を意味しているのであろうか？この状態関数は

$$\int |\psi(t, \mathbf{r})|^2 d^3r = 1 \quad (12.7)$$

と言う規格化条件を必ず満たしている。従って、この $|\psi(t, \mathbf{r})|^2$ は質点 m がエネルギー E を持っている時、その質点が点 \mathbf{r} における存在確率を意味している事になる。

簡単のために、ここでは1次元系の状態関数で議論しよう。状態関数 $\phi(x)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1 \quad (12.8)$$

と言う規格化条件を満たしていると仮定されている。従って、この $|\phi(x)|^2$ は確率論における分布関数を表している。すなわち、 $|\phi(x_0)|^2$ は点 x_0 においてその質点が存在する存在確率を表している。

12.1.3 期待値

確率論においてはその期待値が実際の観測量となっている。これは量子力学でも同じである。状態関数からの分布関数が $|\phi(x)|^2$ の場合、例えば x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ は

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\phi(x)|^2 dx \quad (12.9)$$

と書く事が出来る。これは確率論と同じである。

ところが、量子力学における期待値には確率論とは重要な違いが一つ存在している。それは状態関数が一般的には複素数であると言う点である。このため、例えば x^2 の期待値においても、厳密には

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^\dagger(x) x^2 \phi(x) dx \quad (12.10)$$

と定義する事になっている。さらに状態関数が量子数 n で指定されるため、一般的な x^2 の期待値は

$$\langle n | x^2 | n' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^\dagger(x) x^2 \phi_{n'}(x) dx \quad (12.11)$$

と定義されている。

12.2 古典力学の方程式の導出

量子力学の方程式から Newton 方程式を導出する方法には様々な近似法が知られている。このうち、古典力学極限 ($\hbar \rightarrow 0$ の極限) を取る方法が良く知られているが、この場合の古典極限により得られる方程式は Hamilton-Jacobi 方程式である。一方、Newton 方程式を直接求める方法は Ehrenfest の定理と知られているものであり、ここではこの計算手法を紹介しよう。

12.2.1 Ehrenfest の定理

Schrödinger 方程式から Newton 方程式を導出したのが Ehrenfest の定理と呼ばれるものである。この方法は演算子（例えば、 r や p ）の期待値を取り、それら期待値の時間発展を求める事により Newton 方程式を導き出す手法である。この事は、Newton 方程式が座標の時間発展を決定する方程式である事から、自然な方法となっている。また古典力学に対応する物理量は演算子の期待値であるが、これは量子力学において、期待値が観測量となっている事から理解できるものである。

● 時間発展の方程式

今、演算子を \hat{F} としてその期待値の時間発展をみて行こう。Schrödinger 方程式は Hamiltonian を \hat{H} とすると

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r},t), \quad -i\frac{\partial\Psi^\dagger(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi^\dagger(\mathbf{r},t) \quad (12.12)$$

である。この場合、演算子 \hat{F} の期待値 $\langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle$ に対する時間微分を行うと

$$i\frac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{F}\hat{H}|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{H}\hat{F}|\Psi\rangle = \langle\Psi|[\hat{F},\hat{H}]|\Psi\rangle \quad (12.13)$$

である事がすぐに確かめられる。但し 交換関係 $[A, B]$ は

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (12.14)$$

と定義している。

● Newton 方程式

ここで最も簡単な場合として, \hat{H} が

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + U(r) \quad (12.15)$$

で与えられる 1 粒子系を考えよう. $\hat{F} = \mathbf{r}$ の時は

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \mathbf{r} | \Psi \rangle = \frac{1}{m} \langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle \quad (12.16)$$

となる. また, $\hat{\mathbf{p}}$ についても同じ計算を実行すると

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = -\langle \Psi | \nabla U | \Psi \rangle \quad (12.17)$$

と求まる. 古典力学との対応を見やすくするために, 古典的な物理量を

$$\mathbf{r} \equiv \langle \Psi | \mathbf{r} | \Psi \rangle, \quad \mathbf{p} \equiv \langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle, \quad \nabla U(r) \equiv \langle \Psi | \nabla U | \Psi \rangle \quad (12.18)$$

と定義しよう. この時, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U(r) \quad (12.19)$$

となり, これは Newton 方程式そのものである. 式 (12.18) から明らかなように古典力学の \mathbf{r} の時間依存性はすべて $\Psi(\mathbf{r}, t)$ の t 依存性から来ている.

● 力とポテンシャル

Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導出された事には物理的に重要な意味がある. それは量子力学ではポテンシャルにより全て記述されていて, 力は基本的な物理量ではないことである. 従って, 古典力学においても力はポテンシャルの微分として捉えるべきである. しかしこの場合, 様々な形の力は何故でてきたのであろうか? これは実は多体系の問題を 1 体問題に無理やり帰着させると, 複雑なポテンシャルが現われる事と関係している.

12.3 量子力学の Virial 定理

ここで量子力学における Virial 定理について解説しよう。出発点となる方程式は演算子 \hat{F} に対する時間発展の方程式である。ここではそれを行列要素の表現で行う。従って、基本の方程式は

$$i \frac{d\hat{F}_{nm}}{dt} = \langle n | [\hat{F}, \hat{H}] | m \rangle \quad (12.20)$$

と書かれている。ここで

$$\hat{F}_{nm} \equiv \langle n | \hat{F} | m \rangle \equiv \langle \Psi_n | \hat{F} | \Psi_m \rangle = \int \Psi_n^\dagger \hat{F} \Psi_m d^3r \quad (12.21)$$

と言う表記を使っている。式 (12.20) において、その対角成分は

$$i \frac{d\hat{F}_{nn}}{dt} = \langle n | [\hat{F}, \hat{H}] | n \rangle = \langle n | \hat{F} \hat{H} - \hat{H} \hat{F} | n \rangle = (E_n - E_n) \langle n | \hat{F} | n \rangle = 0 \quad (12.22)$$

となっている。

12.3.1 Virial 定理の証明

量子力学における Virial 定理とは

$$\langle n | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) | n \rangle \quad (12.23)$$

で与えられる方程式の事である。これは運動エネルギーの期待値がポテンシャルの期待値と関係づける事が出来るため、非常に有用である。

この証明を行おう。まず、式 (12.20) において $n = m$ としよう。さらに

$$\hat{F} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \quad (12.24)$$

とおこう。従ってこの場合

$$i \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})_{nn}}{dt} = \langle n | [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})] | n \rangle \quad (12.25)$$

$$= \langle n | [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m}] | n \rangle + \langle n | [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, U(\mathbf{r})] | n \rangle \quad (12.26)$$

を計算すればよい。ここで左辺はゼロである。

よって右辺の交換関係を計算すると

$$i \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})_{nn}}{dt} = i \langle n | \frac{\mathbf{p}^2}{m} | n \rangle - i \langle n | \mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) | n \rangle = 0 \quad (12.27)$$

となる。これより Virial 定理

$$\langle n | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) | n \rangle \quad (12.28)$$

が証明されている。

12.4 Zeeman 効果と Lorentz 力

量子力学においては Zeeman 効果を生み出す摂動 Hamiltonian が現れている。この場合、磁場を B とする時、

$$H' = -\frac{e}{2m}(\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{B} \quad (12.29)$$

となっている。この項は Dirac の Hamiltonian を非相対論にして行く過程で現われるものである。この式の導出はそれ程、大変ではないのでここで簡単に解説しておこう。

12.4.1 Zeeman 効果の Hamiltonian

電子と電磁場が相互作用している系は量子電磁力学の Lagrangian 密度によって記述されている。この系を非相対論近似をして電子と電磁場が相互作用している Hamiltonian を求める事が出来る。この過程はかなり大変であるが、その結果は比較的簡単な形で表現する事が出来ている。

● 非相対論的電子と電磁場のハミルトニアン

非相対論的量子力学において荷電粒子と電磁場のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})]^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (12.30)$$

となっている。但し、 σ は Pauli 行列と呼ばれている 2 行 2 列のエルミート行列であり、

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.31)$$

と書かれている。また A はベクトルポテンシャルである。式 (12.30) の最後の項はクーロンポテンシャルを表している。

また, \hat{p} が演算子 ($\hat{p} = -i\nabla$) である事に注意して次の数学の恒等式

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})]^2 = (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A}$$

を用いてハミルトニアンを書き直すと

$$H = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2 - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (12.32)$$

となる. この右辺の $\boldsymbol{\sigma}$ に依っている項がスピンの Zeeman 効果に対応する相互作用である. ここで磁場 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12.33)$$

である. 式 (12.32) の右辺第 2 項からも角運動量 $\hat{\mathbf{L}}$ による Zeeman 効果の式が出てくる. 以降の議論では簡単化して一様磁場の場合を仮定しよう. この時,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (12.34)$$

なので, 式 (12.32) は \mathbf{A}^2 項とクーロン項は省略すると

$$H = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{2m}\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \dots \quad (12.35)$$

となる. この右辺第 2 項が $[-\frac{e}{2m}\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}]$ となっている.

12.4.2 Lorentz 力

量子力学の Hamiltonian から Lorentz 力を求めておこう. 但し, スピンの項は古典力学には存在しないので除いておく. また運動量 $\hat{\mathbf{p}}$ は c -数 \mathbf{p} として扱う. この場合, 古典力学における Hamilton 方程式は

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}\mathbf{p} + \frac{e}{2m}\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (12.36)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{2m}\mathbf{p} \times \mathbf{B} \quad (12.37)$$

$$(12.38)$$

である. よって $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ に注意して計算すると

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (12.39)$$

となり, 確かに Lorentz 力が求まっている.

12.4.3 Zeeman 効果

Zeeman 分裂エネルギーについて具体的な評価をして見よう。この議論では磁場の方向を z 軸に取るが、この事で一般性が失われると言う事はない。この場合

$$H' = -\frac{eB}{2m}\sigma_z \quad (12.40)$$

となっている。ここで σ_z の固有値は 1 か -1 なので、この 2 個の状態間の分裂エネルギーは

$$\Delta E = \frac{eB}{m} \quad (12.41)$$

である。これは Zeeman 効果によるエネルギー分裂と呼ばれている。

12.4.4 摂動論

Zeeman 効果によるエネルギー分裂の計算には量子力学における摂動論を利用している。ここでは摂動論について簡単に解説しておこう。系の観測量を近似的に求める方法のうちで最も重要な計算手法が摂動論である。この解説は少し難しいかも知れないが、最終的な計算式のみを覚えておけば量子論の応用には充分である。

- 摂動論の定式化： 摂動論とはすでに解かれている状態関数によって摂動的な弱い相互作用の効果をうまく評価する手法の事である。その場合、状態関数は非摂動項の固有関数（すでに手元にある）を用いることである。これから議論する系のハミルトニアンを $H = H_0 + H'$ としよう。この時、第1項 (H_0) が非摂動ハミルトニアン、第2項 (H') が摂動ハミルトニアンである。
- 非摂動ハミルトニアンとその固有関数： 摂動論においては H_0 の固有関数とその固有値はわかっているものとしている。

$$H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, \dots \infty) \quad (12.42)$$

さらにこの固有関数が次のような諸性質を持っていると仮定している。

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{n,m}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1 \quad (12.43)$$

第1式を直交性、第2式を完全性と呼んでいる。この場合、この固有関数は完全規格直交系であると言われる。

- 1次と2次の摂動エネルギー： ここでは $n = 0$ を基底状態として，この状態に対する摂動補正を考えて行こう．この場合，基底状態の非摂動エネルギーは E_0 である．これに対して，1次の摂動エネルギー $\delta E_0^{(1)}$ は

$$\delta E_0^{(1)} = \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle \quad (12.44)$$

と書かれている．一方，2次の摂動エネルギー $\delta E_0^{(2)}$ を求めると

$$\delta E_0^{(2)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \psi_0 | H' | \psi_k \rangle|^2}{E_k - E_0}$$

となり，2次の摂動エネルギーは常に引力的(負のエネルギー)である．

12.5 スピンの歳差運動

電子のスピンは量子論 (Dirac 方程式) の結果であり, 古典力学にはスピンに対応する物理量は存在していない. それにもかかわらず, スピンの期待値に対する時間発展がどのような物理を与えるのかは興味がある. ここではスピンの期待値に対する時間発展の方程式を求めてその物理を議論しよう.

12.5.1 スピン期待値の時間発展

スピン演算子 s の期待値の時間発展を計算しよう. Hamiltonian は

$$H = -\omega s_z \quad (12.45)$$

である. ここで磁場は z 軸方向に選んでいる. 但し

$$\omega \equiv \frac{eB}{m} \quad (12.46)$$

と定義している. この場合, 演算子 s_x, s_y の期待値 $\langle s_x \rangle, \langle s_y \rangle$ に対する時間発展の方程式は, 式 (12.13) を使って計算すると

$$\frac{d\langle s_x \rangle}{dt} = \omega \langle s_y \rangle \quad (12.47)$$

$$\frac{d\langle s_y \rangle}{dt} = -\omega \langle s_x \rangle \quad (12.48)$$

となる. この連立微分方程式は直ちに解く事が出来て

$$\langle s_x \rangle = A \sin(\omega t + \delta) \quad (12.49)$$

$$\langle s_y \rangle = A \cos(\omega t + \delta) \quad (12.50)$$

と求まる. これはスピン演算子空間における $x-y$ 平面での円運動となっている. この場合の振動数は ω であり, これは式 (12.41) の Zeeman 効果におけるエネルギー分裂 ΔE

$$\omega = \Delta E = \frac{eB}{m} \quad (12.51)$$

と一致している.

12.5.2 Euler 方程式との対応

それでは、この結果は古典力学において、対応する物理（方程式）が存在しているのであろうか？ここでは Euler 方程式との対応関係を調べて見よう。回転角速度 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ に対する Euler 方程式は

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_x}{dt} &= (I_2 - I_3)\Omega_y\Omega_z \\ I_2 \frac{d\Omega_y}{dt} &= (I_3 - I_1)\Omega_z\Omega_x \\ I_3 \frac{d\Omega_z}{dt} &= (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_y \end{aligned} \quad (12.52)$$

であった。ここで $I_1 = I_2$ の場合を考えて行こう。この場合、式 (12.52) から

$$\Omega_z = \text{const.} \equiv C_0 \quad (12.53)$$

と Ω_z が定数である事がわかる。よって、 Ω_x, Ω_y に対する方程式は

$$I_1 \frac{d\Omega_x}{dt} = (I_1 - I_3)C_0\Omega_y \quad (12.54)$$

$$I_1 \frac{d\Omega_y}{dt} = (I_3 - I_1)C_0\Omega_x \quad (12.55)$$

となる。ここで

$$\alpha \equiv \frac{(I_1 - I_3)C_0}{I_1} \quad (12.56)$$

と定義すると式 (12.55) は

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \alpha\Omega_y \quad (12.57)$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} = -\alpha\Omega_x \quad (12.58)$$

となっている。これはスピン期待値に対する方程式と全く同じとなっている。従って、スピン自体は古典力学には存在しない概念であるが、その期待値に対する方程式は古典力学における Euler 方程式に対応している事がわかる。量子論におけるスピンは点に対するものであるが、その古典的な方程式は剛体の自転の方程式に対応している事が分かったのである。

第13章 量子論における散乱理論

量子力学における散乱理論を解説する事は決して易しい事ではない。その説明にはそれだけで1冊の本が必要であると考えられる。さらに散乱理論はかなり難しいとも言える理論体系である。量子論において束縛状態を解く事はそれ程難しいとは言えないのだが、散乱状態を扱う事は波の広がりがマクロスケールになるため、非常に難しくなっているのである。しかし実験と理論を結び付ける場合、基本的には散乱理論を使う事になっている。粒子をターゲットにぶつけてその散乱における反応を見て行く事が実験物理学の基本である事に依っている。この事から考えても、散乱理論の重要性が理解できるであろう。

古典力学における散乱理論を第9章で簡単に紹介しているが、ここでは量子力学における散乱理論（但しポテンシャル散乱に限定）を解説しよう。この章では主にEikonal近似と言われている手法による散乱断面積の計算法を紹介しよう。この方法はGlauber理論ともよばれている理論模型であるが、ある条件下での散乱断面積の記述には非常に有効である事が分かっている。利用価値が高い割には取り扱いが簡単であるため、幅広く応用されている散乱理論である。

13.1 散乱振幅 $f(\mathbf{q})$

散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ について簡単に説明しよう。この散乱振幅は質量 m の粒子が入射エネルギー E_k を持っている場合、その粒子が他の粒子が作るポテンシャル $V(\mathbf{r})$ によるポテンシャル散乱の散乱断面積を記述する時の基本的な物理量である。この場合、Hamiltonian H は

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (13.1)$$

である。

従って Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E_k \psi(\mathbf{r}) \quad (13.2)$$

となっている。但し、これは固有値方程式ではない。実際、 E_k は入射エネルギーであり、与えられている物理量である。この Schrödinger 方程式から Lippmann-Schwinger 方程式を求める事が出来る。これは

$$\psi = \phi + \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V \psi \quad (13.3)$$

と書かれている。ここで ϕ は自由粒子の解であり、 H_0 は自由粒子の Hamiltonian である。よって

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{ikz}, \quad k = \sqrt{2mE_k} \quad (13.4)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \quad (13.5)$$

となっている。この場合、入射粒子は z 方向に入射していると仮定されている。また $+i\varepsilon$ は外向きの波を表すために導入されたものである。

13.1.1 伝搬関数

Lippmann-Schwinger 方程式において

$$\frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} \quad (13.6)$$

は演算子となっているが、これは伝搬関数に対応している。ここで

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} | \mathbf{r}' \rangle \quad (13.7)$$

としよう。この伝搬関数は運動量 \mathbf{p} の完全系を中間状態に挿入すると

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon} e^{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (13.8)$$

となる。この運動量積分ではまず角度積分がすぐに実行できて

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m\pi}{2\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ip|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{p^2 - k^2 - i\varepsilon} \quad (13.9)$$

となる。この p 積分は複素平面における積分計算を実行すればよく、その結果

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13.10)$$

と求まる。さらに今の場合、 $r \gg r'$ なので

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r} + \dots \quad (13.11)$$

は充分良い近似である。よって

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi r} e^{ikr} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (13.12)$$

と求まっている。但し \mathbf{k}' は

$$\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}} \quad (13.13)$$

と定義されている。これより式 (13.3) は

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= e^{ikz} - \frac{m}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= e^{ikz} + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (13.14)$$

となる。この場合、散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.15)$$

と定義されている。但し $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ である。

13.1.2 Lippmann-Schwinger 方程式の導出

ここで Lippmann-Schwinger 方程式を導出しよう。まずは Schrödinger 方程式

$$(E_k - H_0)\psi = V\psi \quad (13.16)$$

に対して左から演算子

$$(E_k - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \quad (13.17)$$

を掛ける。 $+i\varepsilon$ を入れたのは分母がゼロとなる事を防ぐためである。この時、式 (13.16) は

$$\psi = \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V\psi \quad (13.18)$$

となる。一方、自由粒子の方程式は

$$(E_k - H_0)\phi = 0 \quad (13.19)$$

である。従って、式 (13.18) に自由粒子の解 ϕ を足して置く必要がある。よって

$$\psi = \phi + \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V\psi \quad (13.20)$$

となり、これが Lippmann-Schwinger 方程式である。前述したように、分母の $+i\varepsilon$ は散乱波が外向きの波 $[e^{ikr}]$ であると言う境界条件を課した事に対応している。

13.1.3 T 行列

式 (13.20) に左から V を掛けて ϕ で期待値を取ると

$$\langle \phi | V | \psi \rangle = \langle \phi | V | \phi \rangle + \langle \phi | V \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} V | \psi \rangle \quad (13.21)$$

となる。ここで T 行列を

$$T = \langle \phi | V | \psi \rangle \quad (13.22)$$

と定義すると式 (13.21) は

$$T = V + V \frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon} T \quad (13.23)$$

となる。これが T 行列に対する散乱の方程式である。

13.2 微分断面積 $(\frac{d\sigma}{d\Omega})$

微分断面積 $d\sigma$ を定義しよう。これは flux 間の比

$$d\sigma \equiv \frac{\text{散乱波の flux } j_r \text{ at } r^2 d\Omega}{\text{入射波の flux } j_{in}} \quad (13.24)$$

として定義されている。まずは散乱波の flux j_r を計算しよう。この場合、散乱波の波動関数は式 (13.14) の右辺第2項を ψ_r として

$$\psi_r = f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (13.25)$$

となっている。よって

$$j_r = \frac{1}{2mi} \left(\psi_r^* \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\partial \psi_r^*}{\partial r} \psi_r \right) = \frac{k}{mr^2} |f(\mathbf{q})|^2 \quad (13.26)$$

である。一方、入射波の flux j_{in} は

$$j_{in} = \frac{k}{m} \quad (13.27)$$

である。よって微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad (13.28)$$

となっている。ここで $q^2 = 2k^2(1 - \cos \theta)$ である。

13.2.1 散乱振幅の求め方：Born 近似

散乱振幅が分かれれば散乱断面積が計算できる。しかしこの散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.29)$$

なので Schrödinger 方程式を解いて $\psi(\mathbf{r})$ を求める必要がある。これが散乱断面積を計算する時の難しさである。従ってまずは簡単に断面積を求めるために、 $\psi(\mathbf{r})$ を $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ と自由粒子の解で近似する手法が採用されている。この場合

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.30)$$

と書かれる。これは Born 近似と呼ばれている方法であり良く使われている。特に、クーロンポテンシャル $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ の場合は正しい断面積が得られている。

13.3 Born 近似による Rutherford 散乱断面積

クーロンポテンシャル $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ の場合の Rutherford 散乱断面積を具体的に計算してみよう。この場合、散乱振幅 $f_B(\mathbf{q})$ は

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(r) d^3 r \quad (13.31)$$

である。従ってクーロンポテンシャル $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ の場合

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{m\alpha}{2\pi} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{r} d^3 r \quad (13.32)$$

となっている。この式で角度の積分は直ちに実行できて

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{2m\alpha}{q} \text{Im} \int_0^\infty e^{iqr} dr = -\frac{2m\alpha}{q} \text{Im} \int_0^\infty e^{iqr - \varepsilon r} dr \quad (13.33)$$

となる。Im は虚数部を意味している。ここで infra のカットオフ $e^{-\varepsilon r}$ を導入している。この場合、計算した後で $\varepsilon \rightarrow 0$ とする。よって

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{2m\alpha}{q^2} \quad (13.34)$$

となる。これより微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(\mathbf{q})|^2 = \frac{4m^2\alpha^2}{q^4} \quad (13.35)$$

と求まる。また $q^2 = 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ と $v = \frac{k}{m}$ より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (13.36)$$

と求められる。これは確かに Rutherford 散乱の断面積である。

13.4 部分波展開

散乱理論を扱う場合、散乱振幅を部分波に展開してその性質を議論する事が良くある。これはその方が議論しやすい場合が実際にあるからである。ここでは基本的な数式が天下り的になっているが、詳しい解説は散乱理論の教科書を参考にして貰う事にしよう。ここでは散乱振幅の部分波展開に関する解説を行う事により、散乱理論では非常に重要な役割を果たしている Optical Theorem を証明しよう。

散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)(1 - e^{2i\delta_\ell}) P_\ell(\cos \theta) \quad (13.37)$$

と部分波展開する事ができる。ここで δ_ℓ は phase shift と呼ばれる量である。また $P_\ell(\cos \theta)$ は Legendre 関数である。この場合、散乱全断面積 σ_T は

$$\sigma_T = \int |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega \quad (13.38)$$

である。これに式 (13.37) を代入して計算すると

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (13.39)$$

と求まる。一方、散乱振幅の式 (13.37) から

$$\text{Im}f(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (13.40)$$

と求まっている。これら 2 式を比較する事により

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0) \quad (13.41)$$

が示された。これは Optical Theorem (光学定理) として知られている方程式である。この定理は散乱 S 行列の Unitarity と関係しており、非常に重要な式である。

13.5 Eikonal 近似法

半世紀以上前から, Eikonal 近似法を用いた Glauber 理論が良く知られている。これは前方散乱の場合に応用できる理論模型である。またこの模型は多重散乱にも応用されていて、予想以上に実験結果をうまく再現できる模型となっている。この模型はかなり過激な近似をしているにもかかわらず、自然現象の記述には力を発揮すると言う模型である。この理由としては、恐らくは Optical Theorem (光学定理) を満たしていると言う事が一つの要因であろうと考えられる。しかし何故、近似以上にうまく現象を記述できるのかと言う問題の詳しい検証は今後の課題としておこう。

Eikonal 近似の基本は散乱が基本的には直線で起こっていると言う仮定である。この場合、縦方向の運動量 (longitudinal momentum) は散乱前後で不变であるとしている。従って、エネルギー保存がそれに応じて破れている。まずはその近似法を解説しよう。出発点の方程式は勿論、Schrödinger 方程式である。これは

$$\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E_k \psi(\mathbf{r}) \quad (13.42)$$

であるが、ここで直線近似を表現するために

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} \phi(\mathbf{r}) \quad (13.43)$$

としよう。この時、 $\phi(\mathbf{r})$ に対する方程式は

$$-\frac{ik}{m} \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} + V(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \quad (13.44)$$

となる。ところが上式の右辺は k と比べて充分小さい事が示されるので無視する事が出来る。よって、Eikonal 近似をした方程式は

$$\frac{ik}{m} \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} = V(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (13.45)$$

となっている。この微分方程式は直ちに解く事が出来て

$$\phi(\mathbf{r}) = A e^{-\frac{m}{k} i \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.46)$$

となる。但し

$$\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z) \quad (13.47)$$

として \mathbf{b} を導入している。この \mathbf{b} は impact parameter に対応している。

これより ψ は

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz - \frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.48)$$

となる。この場合、規格化定数 A は入射波に合わせて $A = 1$ としている。従って散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は式 (13.15) より

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) e^{ikz - \frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.49)$$

$$= -\frac{m}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\mathbf{b}, z) e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.50)$$

となっている。この場合、 $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - kz = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}$ を使っている。ここで

$$G(\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\mathbf{b}, z) e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \quad (13.51)$$

と置く。これは

$$G(\mathbf{b}) = -\frac{k}{im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{\partial}{\partial z} e^{-\frac{im}{k} \int^z V(\mathbf{b}, w) dw} \right) \quad (13.52)$$

$$= \frac{ik}{m} \left[e^{-\frac{im}{k} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b}, w) dw} - 1 \right] = \frac{ik}{m} [e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1] \quad (13.53)$$

となる。ここで

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{m}{k} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b}, w) dw \quad (13.54)$$

と置いた。また $\Gamma(\mathbf{b})$ を

$$\Gamma(\mathbf{b}) \equiv 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})} \quad (13.55)$$

と定義すると散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \Gamma(\mathbf{b}) \quad (13.56)$$

となっている。この $\Gamma(\mathbf{b})$ は profile function と呼ばれている。

13.5.1 Optical Theorem

散乱理論において Optical Theorem はかなり重要な役割を果たしている場合が多い。これはこの定理が散乱 S 行列の Unitarity と関係している事に依っている。ここでは Eikonal 近似によって求められた散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ が Optical Theorem を満たしている事を証明しよう。散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) \quad (13.57)$$

であった。この場合、全断面積 σ_T は

$$\sigma_T = \int |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega = \frac{1}{k^2} \int |f(\mathbf{q})|^2 d^2 q \quad (13.58)$$

である。この上式に式 (13.57) の $f(\mathbf{q})$ を代入すると

$$\sigma_T = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \int d^2 q \int d^2 b d^2 b' e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}')} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})})(1 - e^{-i\chi(\mathbf{b}')}) \quad (13.59)$$

となる。この式は \mathbf{q} の積分を実行すると $[(2\pi)^2 \delta(\mathbf{b} - \mathbf{b}')] \sigma_T$ が出てくるため、

$$\sigma_T = \int d^2 b |(1 - e^{i\chi(\mathbf{b})})|^2 = 2 \int d^2 b (1 - \cos \chi(\mathbf{b})) \quad (13.60)$$

となっている。一方、 $\text{Im } f(0)$ は式 (13.57) から

$$\text{Im } f(0) = \frac{k}{2\pi} \int d^2 b (1 - \cos \chi(\mathbf{b})) \quad (13.61)$$

となる。これより

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0) \quad (13.62)$$

となる。これは Optical Theorem である。従って Eikonal 近似によって求められた散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は Optical Theorem を満たしている。恐らくこのため、Glauber 理論が予想以上にうまく実験を再現していると考えられるものである。

13.6 多重散乱理論

これまで扱ってきた散乱理論はポテンシャル散乱であり, これは1体問題の散乱理論である. 実際には, 例えば陽子が原子核と散乱する場合, これは多重散乱となっている. 一般的に言って, 多重散乱を理論的にきちんと扱う事は不可能である. しかしながら, 多重散乱理論の記述に関しては Glauber 理論ではある程度の成功は収めていると言えよう. それでここでは Glauber 理論について簡単に解説しよう.

13.6.1 高エネルギー陽子-陽子散乱

まず高エネルギーにおける陽子-陽子散乱の断面積を Eikonal 近似による散乱振幅 $f_{pp}(\mathbf{q})$ によって再現しよう. 陽子-陽子散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{pp}(\mathbf{q})|^2 \quad (13.63)$$

と書けるが, この時, 散乱振幅 $f_{pp}(\mathbf{q})$ は

$$f_{pp}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \Gamma_{pp}(\mathbf{b}) \quad (13.64)$$

となっている. ここで $\Gamma_{pp}(\mathbf{b})$ は

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})} \quad (13.65)$$

である. 高エネルギーにおける陽子-陽子散乱の断面積の実験を再現するために

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = C_0 e^{-\frac{1}{2} p_0^2 \mathbf{b}^2} \quad (13.66)$$

と仮定する場合が良くある. C_0, p_0 は定数である. この場合, 散乱振幅は

$$f_{pp}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2p_0^2} C_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{q^2}{p_0^2}} \equiv f_{pp}(0) e^{-\frac{1}{2} \frac{q^2}{p_0^2}} \quad (13.67)$$

となっている. ここで $f_{pp}(0)$ は定数である. 今の場合, Optical Theorem を満たすようにすると

$$f_{pp}(0) = \frac{(i + a_0) k \sigma_T}{4\pi} \quad (13.68)$$

と書く事が出来る. a_0 は実験値を再現するように決められるパラメータである.

13.6.2 高エネルギー陽子-原子核散乱

多重散乱の最も単純な場合として高エネルギーの陽子-原子核の弾性散乱の微分断面積を計算しよう。この場合、基礎になる散乱振幅は陽子-陽子の散乱振幅 $f_{pp}(\mathbf{q})$ である。原子核は A 個の核子から成り立っていると仮定しよう。そしてその状態関数は最も単純化したものとして

$$\Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \phi_{n_1}(\mathbf{r}_1) \cdots \phi_{n_A}(\mathbf{r}_A) \quad (13.69)$$

としよう。これは反対称性も考慮していないので現実的なものではないが、まずは原子核反応論を優先して計算を進めて行こう。

13.6.3 Glauber 理論

問題は散乱における多体の効果をどのように計算できるかと言う事である。ここでは Glauber が提案した理論を紹介しよう。これは半世紀以上前の論文であるが、しかし前方散乱の実験を良く再現できる理論模型である。

高エネルギーの陽子-原子核の弾性散乱において陽子-原子核の散乱振幅 $f_A(\mathbf{q})$ は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \langle \Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) | 1 - e^{i\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} | \Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \rangle \quad (13.70)$$

と書けると仮定している。ここで $\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)$ は陽子と原子核の散乱における『位相』に対応するものである。この場合、 \mathbf{s}_i は横方向に対応する核子の座標を表している。すなわち $\mathbf{r}_i = (\mathbf{s}_i, z_i)$ である。

ここで多重散乱の効果を具体的に取り入れるため、前方散乱である事を考慮して次のような仮定をしよう。それはこの $\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)$ が陽子-核子散乱の和で書けるとするものである。すなわち

$$\chi_A(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = \sum_{i=1}^A \chi_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_i) \quad (13.71)$$

である。これは直感的に言えば、核子との散乱による位相のズレはそれぞれの核子との散乱によるものを足して行けば良いと言う仮定である。恐らく、前方散乱の場合、この仮定はそれ程、悪くはないものと考えられる。

13.6.4 陽子-原子核の散乱断面積

これらの仮定の下で陽子-原子核の散乱振幅 $f_A(\mathbf{q})$ を計算しよう。今の場合、散乱振幅 $f_A(\mathbf{q})$ は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - \prod_{i=1}^A \left(1 - \int d^3r_i \rho_{n_i}(\mathbf{r}_i) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_i) \right) \right) \quad (13.72)$$

と書く事が出来る。ここで

$$\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i) \equiv |\phi_{n_i}(\mathbf{r}_i)|^2 \quad (13.73)$$

と定義されている。式(13.72)を具体的に計算できる形にするため、さらに近似をして行こう。その近似とは $\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i)$ が状態にはあまり依らないと言うものである。従って $\rho_{n_i}(\mathbf{r}_i)$ を原子核の密度関数 $\rho(\mathbf{r})$ で

$$\rho_{n_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{A} \rho(\mathbf{r}) \quad (13.74)$$

と置き換える。但し、今の場合

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = A \quad (13.75)$$

である。従って式(13.72)は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{A} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) \right)^A \right) \quad (13.76)$$

となる。ここで数学の恒等式

$$\left(1 - \frac{1}{A} \alpha \right)^A \simeq e^{-\alpha} \quad (A \rightarrow \infty \text{ の時}) \quad (13.77)$$

を利用しよう。この場合、式(13.76)は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{- \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s})} \right) \quad (13.78)$$

となる。実際の原子核の A は 10 以上なので近似はかなり良いと言える。例として $A = 20$, $\alpha = 0.3$ として式(13.77)を計算すると(左辺=0.739, 右辺=0.741)となり、充分良い近似である事が分かる。

ここで $\Gamma_{pp}(\mathbf{b})$ を散乱振幅 $f_{pp}(\mathbf{q})$ で書いて見よう。これは Fourier 変換すると

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} f_{pp}(\mathbf{q}) \quad (13.79)$$

と求まる。この式を使って式 (13.78) の右辺の積分を書き換えてみよう。この場合

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Gamma_{pp}(\mathbf{b} - \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{s})} f_{pp}(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{r}) \quad (13.80)$$

$$\simeq \frac{2\pi}{ik} f_{pp}(0) \int dz \rho(\mathbf{b}, z) \quad (13.81)$$

となる。ここで前方散乱なので $\mathbf{q} = 0$ の散乱振幅 $f_{pp}(0)$ が主として効いてくると仮定して、 $f_{pp}(0)$ を積分から外すと言う近似を使っている。また $T(\mathbf{b})$ を

$$T(\mathbf{b}) = \int dz \rho(\mathbf{b}, z) \quad (13.82)$$

として導入すると、陽子-原子核散乱の散乱振幅は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{ik} f_{pp}(0) T(\mathbf{b})} \right) \quad (13.83)$$

となる。一方、散乱振幅 $f_{pp}(0)$ は

$$f_{pp}(0) = \frac{(i + a_0)k\sigma_{pp}^T}{4\pi} \quad (13.84)$$

と与えられているので、式 (13.83) は

$$f_A(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{pp}^T T(\mathbf{b})} \right) \quad (13.85)$$

と書けている。但しここでは a_0 項を省略している。従って陽子-原子核弹性散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_A(\mathbf{q})|^2 = \frac{k^2}{4\pi^2} \left| \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \sigma_{pp}^T T(\mathbf{b})} \right) \right|^2 \quad (13.86)$$

となっている。

第14章 相対性理論

物理学において相対性理論は最も重要な基礎理論である。それは『どの慣性系でも物理学は同じである』と言うものであり、もしこれが成り立たないとしたら、地球上で構築された理論模型が他の星の世界では予言能力を失う事になってしまうのである。幸い、現在までのあらゆる自然現象の検証結果はどの現象もこの相対性理論と矛盾していない事が証明されている。

ここでは相対性理論について基礎的な解説を行う。相対性理論においてはまず『慣性系』と言う概念を導入する。これは例えば地上の系を静止系 (rest frame) としてこれを一つの慣性系であるとする。そしてこの系から速度 v で等速直線運動をしている系を運動系 (moving frame) として、このどちらの系でも物理は同じであると言う事である。

この慣性系同士をつなぐ変換則が Lorentz 変換である。ここで『この Lorentz 変換は座標系の変換であり、座標の変換ではない』と言う事を強調して置こう。この事は非常に重要なポイントであるが、しかしながらこれをしっかり認識する事はそう易しい事ではないと言える。

14.1 慣性系

相対性理論においては慣性系の概念が最も重要である。従って、まずはこの慣性系と言う物理用語について解説しよう。今、地上の系を静止系 (R -系) としよう。地球は自転も公転もしているが、この事は相対性理論の解説に影響するわけではない。この場合、 R -系の座標と時間を $R(t, x, y, z)$ と表記しよう。

次にこの静止系に対して、速度 v で等速直線運動をしている運動系 (S -系) を $S(t', x', y', z')$ と表記しよう。相対性理論とはこの両系で運動方程式の形がすべて同じになっていると言う要請である。

14.1.1 Galilei の相対性理論

簡単のためにまずは Galilei の相対性理論を解説しよう。今、電車の系（運動系）が静止系に対して一定速度 v で運動しているとして電車が走る方向を x -軸としよう。ここで大切な事は、それぞれの座標系には観測者も同時に定義する事ができる事である。但し、電車は光速 c と比べてゆっくり動いているとしている。この時、2つの座標系には次の関係式がある。

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (14.1)$$

これを Galilei 変換という。これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい。今、地上（R-系）で質量 m の質点がバネに繋がっていてこのバネの振動の実験をしたとする。バネの伸びを x とすると

$$m\ddot{x} = -kx \quad (14.2)$$

が運動方程式になる。ここで k はバネ定数である。電車の系（S-系）でも同じバネの実験をすると、Galilei 変換から明らかのように運動方程式が

$$m\ddot{x}' = -kx' \quad (14.3)$$

となる。ここで x' はバネの伸びを表す。これは地上で行ったバネの実験と同じであり、その微分方程式の解は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (14.4)$$

$$x' = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' \quad (14.5)$$

となる。ただし、初期条件（ $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$ ）をつけている。相対性理論はこれ以上の事は何も言っていない。この例を見てもわかるように、それぞれの系で観測者の存在を仮定しているが、これが相対性理論の本質である。

14.2 特殊相対性理論

S-系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz 変換により与えられている。今度の場合、R-系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時、S-系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり、時間は別のものになる。それは、どの系でも観測者が定義されているので、これは観測者の時間 t' となっている。この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (14.6)$$

である。ここで γ は

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14.7)$$

と定義されている。この式は Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になるべきであると言う要請を充たす事により導出されている。Lorentz 変換は速度 v が光速と比べて十分小さいと

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (14.8)$$

となり、Galilei 変換を含んでいる事がわかる。

14.2.1 Minkowski 空間

相対性理論において Minkowski 空間が議論されることが良くある。この場合、Minkowski は Lorentz 変換の不变量として 4 次元空間の微小距離の 2 乗 $(ds)^2$ を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (14.9)$$

と定義したのである。これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (14.10)$$

に対して不变である事が確かめられる。Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \quad (14.11)$$

としている。

この時， dx^μ , dx_μ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (14.12)$$

として導入している。また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている。この拡張は確かに間違ってはいない。しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違っている。この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため、計量にはなっていない。

また $(ds)^2$ は Lorentz 変換の不变量ではあるが、これは結果であり条件ではない。この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である。相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり、変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている。これに対して、数学的には $(ds)^2$ の不变性など様々な表現形式が考えられるが、これは特に重要な問題ではない。

この事より、 $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は極めて難しい問題である事がわかる。この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが、物理学に取っては特に意味があるわけでもなく、むしろ不要であると言えよう。

14.2.2 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である。従ってこの方程式について、ここで議論するべき価値を見出す事が非常に難しいものである。計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない。さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合、その表現の $(ds)^2$ が不变性を失ったと言うだけの事である。この場合、元の $(ds)^2$ の式 (14.9) を使えば問題ないのである。よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不变性を無くしたとしても、それにより物理に対する影響が何処かに現われていると言うことはない。

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている。恐らく、この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが、しかしそれ以上の事は良く分からない。

14.2.3 座標の変換と座標系の変換

これまで慣性系間の座標系変換に関して解説してきたが、ここでは座標の変換について簡単な説明を行おう。この場合、座標の変換と座標系の変換との違いを明確にしておこう。質点 P の座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ としよう。ここで、点 P の座標を定数 a だけ平行移動しよう。この時、点 P は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (14.13)$$

へと移動する。ここで古典力学の Lagrangian がこの平行移動に対して不变であるとしよう。すなわち

$$\delta L = L(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (14.14)$$

である。この式から \mathbf{a} を微小量とすれば

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (14.15)$$

となる。これは Lagrangian 方程式から

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = 0 \quad (14.16)$$

となる。ここで $(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}})$ は運動量であるため、質点の平行移動が運動量保存則に対応している事がわかる。

● 座標系の変換

一方、座標系の変換の場合、点 P としては一つの点を考えている。これを静止系で $P(t, x, y, z)$ とすれば、運動系では $P(t', x', y', z')$ となり、この間の変換が Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2}x' \right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (14.17)$$

となっている。

14.2.4 相対性理論における速度の和

相対性理論における速度 V_1 と速度 V_2 の和を求めよう。まず Lorentz 変換から

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

である、よって変換された系での速度は $V' = V_1$, $v = V_2$ として

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}} \quad (14.18)$$

となり、これは単なる和ではない。勿論、速度 V_1 , V_2 が光速 c と比べて十分小さい場合、これはよく知られている式 $V = V_1 + V_2$ になっている。

ここで速度 V_1 が光速 c の場合、この速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c \quad (14.19)$$

となって光速は不变である。

14.2.5 運動量の Lorentz 変換

質点のエネルギーと運動量 (E, p) は Lorentz 変換により

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (14.20)$$

と変換される。この時、 $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ を計算すると $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ となり、一定値となる。この一定値は系の変換によらない量であり、質点を考える場合、その質量しかあり得ない事がわかる。従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (14.21)$$

と書く事ができる。ここで、運動量 p がその質量と比べて十分小さい場合、

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (14.22)$$

となり、確かに非相対論の「分散関係式」が得られる事がわかる。

14.2.6 速度の和：正確な導出

相対性理論においては運動量が基本的な物理量となっていて、速度自体は基本的な物理量ではない。実際、運動量が p の場合、質量 m の質点の速度 V は

$$V = \frac{pc^2}{E} \quad (14.23)$$

と定義されている。これは p が質量 m と比べて充分小さい時は

$$V = \frac{pc^2}{E} \simeq \frac{p}{m} \quad (14.24)$$

となり、確かに古典論の場合と一致している。

ここでは運動量における Lorentz 変換の式

$$p_x' = \gamma \left(p_x + \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E + vp_x) \quad (14.25)$$

により、速度の和の公式を導出して見よう。運動する慣性系から速度 $\left(\frac{p_x c^2}{E} \right)$ で放出された質点の速度 V は式 (14.25) から

$$V \equiv \frac{p_x' c^2}{E'} = \frac{\gamma \left(p_x + \frac{vE}{c^2} \right) c^2}{\gamma (E + vp_x)} \quad (14.26)$$

となる。ここでこの式の分母・分子を E で割り算すると

$$V = \frac{\frac{p_x c^2}{E} + v}{1 + v \left(\frac{p_x}{E} \right)} \quad (14.27)$$

となる。表記を合わせるため $V_1 = \frac{p_x c^2}{E}$, $V_2 = v$ としよう。よって式 (14.27) は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \quad (14.28)$$

となり、確かに速度の和則が求められている。

14.3 運動方程式の変換不变性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしている事が相対性理論の基本原理である。ここでは、Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行こう。

● Newton 方程式と Galilei 変換

Galilei 変換の場合、変換則は

$$x = x' + vt', \quad t = t' \quad (14.29)$$

である。この式で Newton 方程式を変換してみると

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (14.30)$$

となり、Newton 方程式は Galilei 変換に対して不变である事がわかる。

● Newton 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換の場合、

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (14.31)$$

となっている。従って、座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \quad (14.32)$$

さらに 2 階微分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dx')} d \left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \right) = \frac{\frac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^3 \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)^3} \neq \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (14.33)$$

となり、Newton 方程式は全く別物になっている。すなわち、Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不变ではない。

● Maxwell 方程式と Galilei 変換

物質が無い時, Maxwell 方程式は電場 E に対して

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad (14.34)$$

となっている。Galilei 変換の式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (14.35)$$

となるので

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \nabla'^2 \right] \mathbf{E}' = 0 \quad (14.36)$$

と変換され, Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不变ではない事がわかる。

● Maxwell 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (14.37)$$

であるから, Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不变である。

14.4 運動系の時間刻みは遅れるか？

光速に近い速度で動いている運動系の時間刻み $\Delta\tau$ が地上における時間刻み Δt とずれるかどうかを考察しよう。ここでは思考実験における観測量である時間差 Δt により系の時間の遅れがあるかどうかを検証しよう。

14.4.1 地上の系からみた電車の系の時間刻み

速度 v で等速直線運動をしている電車（運動する慣性系）を考えよう。この場合、線路は直線である。ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離 ℓ だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう。ここで、電車の中の観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう。そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 $(2\Delta\tau)$ を正確に測定できたとしよう。この場合

$$\ell = c\Delta\tau \quad (14.38)$$

である。一方、地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる。この場合、その時間を $(2\Delta t)$ としよう。従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - (c\Delta\tau)^2} = v\Delta t \quad (14.39)$$

となっている。よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (14.40)$$

となり、電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている。

14.4.2 電車の系からみた地上の系の時間刻み

同様の思考実験を電車の人から行ってみよう。地上が電車に対して動いているように見える速度は $(-v)$ となっている。それは Lorentz 変換を逆に解くと

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x \right), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (14.41)$$

となっていて確かに $(-v)$ となっている。今度の場合、地上において鏡に向かってレーザービームを放ち、それを計測して時間を測る。この場合、電車の人から見ると

これまでの考察と丁度、真逆になっている。従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta\tau \quad (14.42)$$

となる。この結果である式(14.40)と式(14.42)はお互いに矛盾している。 Δt と $\Delta\tau$ は思考実験における観測量なので、何かが間違っている事は確かである。

14.4.3 思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の間違いは t 秒後の電車の座標が $x' = vt$ としてしまった事が原因である。電車が高速になると t 秒後の電車の正しい座標は、Lorentz 変換の式

$$x' = \gamma(x + vt) = \gamma vt \quad (14.43)$$

で与えられる。従って $v\Delta t \Rightarrow \gamma v\Delta t$, $c\Delta t \Rightarrow \gamma c\Delta t$ と書き直す必要がある。すなわち式(14.40)は

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t = \Delta t$$

となり、時間刻みの遅れがない事が証明されている。

14.4.4 直感的な理解

これまで思考実験を考えて、運動系における時間刻みが静止系の時間刻みとどう関係しているのかに関して、様々な考察を行ってきてている。しかしながら、実はこの事は極めて単純な事である事が以下に示されている。

実際は、運動系の時間刻み $\Delta\tau$ が静止系の時間刻み Δt (例えば1秒) と同じである事は簡単に証明できる事である。それは時間刻み $\Delta\tau$ にしてもミューオンの寿命 τ にしてもこれらは定数である。実際、1秒は地球公転周期 T から決められている。従って、これら定数は Lorentz スカラーであり Lorentz 変換の影響を受ける事はない。つまり運動系の $\Delta\tau$ は静止系の Δt と全く同じである事が分かる。

さらに蛇足となるが、地球公転周期 T は運動方程式の解から求められている。そして運動方程式はどの慣性系でも同じである。よって周期 T はどの系で観測しても同じであり、従って時間刻み Δt が系によって変わることはない。

14.5 相対性理論の応用例

ここで相対性理論が実際に応用されている場合の具体例を幾つかあげておこう。相対性理論は系の変換をしているだけなので、そこからダイナミックスの情報が得られると言う事はない。

14.5.1 光のドップラー効果

星が高速 v で遠ざかっている時、その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける。それは、光のドップラー効果としてよく知られている現象であるし、また観測もされている。この場合、星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (14.44)$$

となり、光の運動量は減少している。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (14.45)$$

となるので光の波長は大きくなり、これを赤方偏移 (red shift) という。可視光では赤っぽい光は波長が長く、青っぽい光は波長が短いからである。

また場の理論で赤外 (infra-red) 発散、紫外 (ultra-violet) 発散という言葉が良く出てくるが、この発散は物理量の運動量積分から来ている。運動量がゼロの時に積分が無限大になる時、赤外発散と呼び、運動量が大きい時の発散を紫外発散と呼んでいい。これは単なるネーミングであり、物理的な意味は全く無い。

14.5.2 大気圏で生成されたミューオンの走行距離

大気圏に突入した宇宙線(高エネルギー陽子)は大気と衝突してミューオンを生成する場合がある。ミューオンはその寿命 τ_0 が $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度の不安定な素粒子である。この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (14.46)$$

と書かれている。この場合、崩壊幅 Γ は Lorentz 不変な物理量である。従って、寿命も Lorentz 変換に対して変化する事はない。

- ミューオンの走行距離 L : ここでミューオンの走行距離を計算しよう。その走行距離 L は Lorentz 変換の式 $x = \gamma(x' + vt') = \gamma vt'$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (14.47)$$

である。ここでエネルギーが $1 \text{ GeV}/c^2$ のミューオンが上空で生成された時、 $v \simeq c$ であり、また $\gamma \simeq 10.6$ である。従って、このミューオンの走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (14.48)$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

14.5.3 大型加速器実験における不安定粒子

大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式(14.47)によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

14.6 あとがき

最初は学部初年度の学生を主な読者として、この『力学の上達法』を書き始めていた。しかしそれ次第にマニアックな内容の物理を入れる事になってしまったようである。それでも自分としては、これらは物理を深く理解しようとしたら非常に重要なものばかりであると考えている。

物理をしっかり理解するためには演習問題を継続的に解く事が必要条件である事は繰り返し書いている。そしてそれは明らかでもある。しかしこれは必要であって、それで十分と言うわけではない。この場合、物理で良く使う色々な数学の技術習得をする事もかなり重要であると言える。大学で講義をしている時は、まずは学生がその講義内容に興味をもって貰うと言う事が最大のポイントであった。しかしここでの読者はすでにそうした興味をもっているものと仮定している。従って、物理を深く理解する上で技術的な進歩が実は極めて重要であると言う事をここで強調したい。

いざれは『理論物理の職人』になろうと考える若者が増えて来る事を期待してこの稿を書いている。そのためには数学的な技術を向上させる事が非常に重要である。しかし同時に、物理を直感的に理解してその本質を捉えると言う技術も重要である。そしてそれらの技術を少しずつ磨いて行く事が、実は物理を学ぶ上で一番の楽しみでもある。但しこれは誰にとってもかなり時間が掛かる作業である事は間違いない。

今後、大学における相対性理論の講義内容が慣性系の解説と相対性理論に関する運動学を中心にして行われることを期待したい。相対性理論が物理学の基礎理論であることが一層、強調されて欲しいものである。また一般相対性理論と言う言葉は物理学においてはいざれ使用されなくなるであろう。

付 錄A 数学公式集

A.1 基本公式

A.1.1 デルタ関数 $\delta(x)$ とクロネッカーデルタ δ_{ij}

- $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \bullet \delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad \bullet \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{ij} A_j = A_i$

A.1.2 ベクトルの内積と外積

3次元ベクトルの場合，内積と外積が定義できる。

内積 : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$

外積 : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{e}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{e}_3(a_1b_2 - a_2b_1)$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad \text{但し } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (123 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (123 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

- 単位ベクトルの変換 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{array} \right. \quad (A.1)$$

A.1.3 ベクトルの公式

- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = 0$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (但し σ はパウリ行列)

A.1.4 三角関数

三角関数の基本公式をあげておこう .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{array} \right.$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \quad \text{但し} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A.1.5 指数関数と対数関数

物理で良く使う対数関数はほとんどすべて、その底が e である。このため $\ln \equiv \log_e$ と定義してこの対数関数のみが対象となっている。

- 基本的な性質 : $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$, $(e^x)^y = e^{xy}$, $e = 2.7182818$
 $\ln xy = \ln x + \ln y$, $\ln x^y = y \ln x$

- 微分 : $\frac{de^x}{dx} = e^x$, $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

A.1.6 テイラー展開

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$, • $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$
- $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \dots = \cos x + i \sin x$

A.2 物理でよく使う積分公式

A.2.1 Exponential の積分

- $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$, • $\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}$, • $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}$
- $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

A.2.2 ガウス積分

- $\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}$, • $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^6}}$
- $\int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-\beta x^2} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n \beta^{n+\frac{1}{2}}}$
(但し , $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$)

A.2.3 その他の積分公式

- $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a \tan \theta) \cos \theta d\theta \quad (x = a \tan \theta)$
- $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2}$, • $\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$
- $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a+bt}} = \frac{2}{b} \left(\sqrt{|a+b|} - \sqrt{|a-b|} \right)$

A.2.4 n 次元球の体積

半径 R の n 次元球の体積を求めよう。これを I とすると

$$I = \int \cdots \int_{p_1^2 + \cdots + p_n^2 \leq R^2} dp_1 \cdots dp_n = \int_0^R p^{n-1} \Omega_n dp = \Omega_n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\alpha^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{A.2})$$

と書ける。ここで Ω_n は n 次元の角度積分である。この Ω_n は以下のように求めて行く。まず

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dp_n e^{-\alpha(p_1^2 + \cdots + p_n^2)} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha p^2} p^{n-1} \Omega_n dp \quad (\text{A.3})$$

を計算する。このガウス積分は直ちに実行できて

$$G = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\alpha p^2} \right)^n = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}} = \Omega_n \frac{1}{n\alpha^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{A.4})$$

となる。これより Ω_n が求まり I は

$I = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n$

となる。

A.3 微分演算公式と座標系

A.3.1 直交座標系 (x, y, z)

- グラジエント ∇ :
$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$
- ラプラシアン Δ :
$$\Delta\phi \equiv \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$
- 発散 :
$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
- ローテーション :
$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

A.3.2 極座標系 (r, θ, φ)

- グラジエント :
$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$
 - ラプラシアン :
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$
 - 極座標におけるベクトル:
$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$
- $$\begin{cases} A_r = A_x \sin\theta \cos\varphi + A_y \sin\theta \sin\varphi + A_z \cos\theta \\ A_\theta = A_x \cos\theta \cos\varphi + A_y \cos\theta \sin\varphi - A_z \sin\theta \\ A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \end{cases}$$
- 発散 :
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$
 - ローテーション:
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \mathbf{e}_\varphi$$

A.4 行列

2行2列の正方行列 A を考えよう。但し、以下の証明は $n \times n$ 行列で成り立つ。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

ここで a_{11} , a_{12} など (a_{ij} と書く) を行列の成分という。さらに行列 B

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

を考えよう。2つの行列の足し算はそれぞれの成分同士を足せばよい。

A.4.1 行列の積

2個の行列の掛け算を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

と定義しよう。また成分で書いておく。これは $n \times n$ 行列で成り立つ。

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (\text{A.8})$$

A.4.2 エルミート行列

行列 A がエルミート行列であるとは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^\dagger \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

の事である。すなわち、 $a_{ij} = a_{ji}^*$ である。

A.4.3 エルミート行列の固有値は実数

エルミート行列の固有値方程式を書くと

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

であり, λ が固有値である. この λ が実数である事を示そう.

- 複素数ベクトルの内積: ここで複素数ベクトルの内積を

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \sum_{i=1,2} u_i^* v_i \quad (\text{A.11})$$

で定義しよう. この時

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = \sum_{i=1,2} u_i^* \left(\sum_{j=1,2} a_{ij} u_j \right) = \sum_{i=1,2} u_i^* \left(\sum_{j=1,2} a_{ji}^* u_j \right) = \sum_{j=1,2} \left(\sum_{i=1,2} a_{ji} u_i \right)^* u_j$$

とエルミート行列の性質を使って書き直すことができる. これは

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \lambda^*(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

となっている. よって $\lambda = \lambda^*$ であり, エルミート行列の固有値 λ は実数である. この議論は $n \times n$ 行列でも成り立つ.

A.4.4 エルミート行列の固有関数の直交性

エルミート行列 A の固有値と固有ベクトルを $\lambda_1, \mathbf{u}^{(1)}$ と $\lambda_2, \mathbf{u}^{(2)}$ とすると

$$A\mathbf{u}^{(1)} = \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)}, \quad A\mathbf{u}^{(2)} = \lambda_2 \mathbf{u}^{(2)} \quad (\text{A.12})$$

である. ここで $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の時 $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = 0$ の直交性が成り立つ. これは

$$(\mathbf{u}^{(1)}, A\mathbf{u}^{(2)}) = (A\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}), \quad \text{よって} \quad \lambda_2(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \lambda_1(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$$

となっているため, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = 0$ が証明されている.

A.4.5 ユニタリー行列

ユニタリー行列 $U = \{u_{ij}\}$ は

$$U^\dagger U = 1$$

を満たす正方行列の事である。これを成分で書くと

$$(U^\dagger U)_{ij} = \sum_{k=1,n} u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij}$$

となる。今、ベクトル ϕ を $\psi = U\phi$ と変換した時、そのノルム $|\psi|^2$ は

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &\equiv (\psi, \psi) = (U\phi, U\phi) = \sum_{k=1,n} \left(\sum_{i=1,n} u_{ki}^* \phi_i^* \right) \left(\sum_{j=1,n} u_{kj} \phi_j \right) \\ &= \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \left(\sum_{k=1,n} u_{ki}^* u_{kj} \right) \phi_i^* \phi_j = \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \delta_{ij} \phi_i^* \phi_j = |\phi|^2 \end{aligned}$$

となり不变である。

A.4.6 実対称行列の対角化可能性の証明

実対称行列は常に対角化が可能である。実対称行列はエルミート行列であるため、その固有値は実数である。実対称行列を R 、その固有値と規格化された固有ベクトルを $\kappa_1, \mathbf{u}^{(1)}$ および $\kappa_2, \mathbf{u}^{(2)}$ とすると

$$R\mathbf{u}^{(1)} = \kappa_1 \mathbf{u}^{(1)}, \quad R\mathbf{u}^{(2)} = \kappa_2 \mathbf{u}^{(2)} \quad (\text{A.13})$$

となる。ここで $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ から作られた行列 U と 対角行列 K を

$$U = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{(1)} & \mathbf{u}_1^{(2)} \\ \mathbf{u}_2^{(1)} & \mathbf{u}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

と定義しよう。この時、式 (A.13) は

$$RU = UK \quad (\text{A.15})$$

とまとめて書く事ができる。この時、行列 U はユニタリー行列なので、式 (A.15) の左から U^\dagger を掛けると

$$U^\dagger RU = K \quad (\text{A.16})$$

となり、確かに実対称行列 R が適当なユニタリー行列により対角化された。

A.5 オペレータの固有値と固有関数

オペレータを \hat{A} , 状態を Ψ とすると

$$\hat{A}\Psi = \lambda\Psi \quad (\text{A.17})$$

となっている。ここで λ , Ψ の事を固有値, 固有ベクトルと呼んでいる。

A.5.1 固有値問題

オペレータ \hat{A} を 2 行 2 列の行列, 状態 Ψ を 2 列のベクトルとするとこの式は

$$\hat{A}\Psi = \lambda\Psi \implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

と書ける。固有値 λ と固有ベクトル Ψ の求め方としては行列式がゼロ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.19})$$

の方程式をまず解く。これより固有値 λ が求まる。

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] \quad (\text{A.20})$$

A.5.2 同時固有関数

オペレータ \hat{A} , \hat{B} が交換するとき, すなわち

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \quad (\text{A.21})$$

のとき, オペレータ \hat{A} と \hat{B} は同時固有関数を持っている。この証明を簡潔にしておこう。まずオペレータ \hat{A} の固有値を a , 固有関数を Ψ とすると

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \quad (\text{A.22})$$

が固有値方程式である。この時,

$$\hat{A}(\hat{B}\Psi) = \hat{B}\hat{A}\Psi = a(\hat{B}\Psi) \quad (\text{A.23})$$

が示される。従って, $(\hat{B}\Psi)$ も \hat{A} の固有関数である。よって

$$\hat{B}\Psi = b\Psi, \quad (b \text{ は定数}) \quad (\text{A.24})$$

であり, これは Ψ が \hat{A} と \hat{B} の同時固有関数であることを示している。

A.6 行列式

A.6.1 行列式の定義

$$\det(A) \equiv \sum_P \epsilon_{(m_1 \dots m_n)} A_{1m_1} \cdots A_{nm_n} \quad (\text{A.25})$$

where $\epsilon_{(m_1 \dots m_n)}$ is +1 for even permutation and
-1 for odd permutation.

- 公式

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (\text{A.26})$$

この証明は

$$\det(A) = \exp(\text{Tr} \ln A) \quad (\text{A.27})$$

を使うとすぐできる。

A.6.2 トレースの定義 : Tr

$$\text{Tr}A \equiv \sum_{i=1}^n A_{ii} \quad (\text{A.28})$$

- 公式 : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

A.6.3 $\det(A) = \exp(\text{Tr} \ln A)$ の証明

行列式の定義式から行列 A の行列式は Δ_{ij} を小行列式として

$$\det\{A\} = \sum_{i=1}^N A_{ij} \Delta_{ij} \quad (\text{A.29})$$

となっている。行列 A は x の関数であるとして式 (A.29) を x で微分すると

$$\frac{d \det\{A\}}{dx} = \sum_{i,j=1}^N \frac{dA_{ij}}{dx} \Delta_{ij} \quad (\text{A.30})$$

となる。逆行列 A^{-1} は

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det\{A\}} \quad (\text{A.31})$$

と書かれているので、式 (A.30) は

$$\frac{d \det\{A\}}{dx} = \sum_{i,j=1}^N \frac{dA_{ij}}{dx} (A^{-1})_{ji} \det\{A\} = \text{Tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dx} \right) \det\{A\} \quad (\text{A.32})$$

となる。ここで

$$A = e^{xB} \quad (\text{A.33})$$

としよう。但し、 B は定数行列である。この時、

$$\frac{dA}{dx} = B e^{xB}, \quad A^{-1} = e^{-xB} \quad (\text{A.34})$$

である。よって式 (A.32) は

$$\frac{d \det\{e^{xB}\}}{dx} = (\text{Tr} B) \det\{e^{xB}\} \quad (\text{A.35})$$

と求まる。この微分方程式は直ちに解けて

$$\ln \det\{e^{xB}\} = (\text{Tr} B)x + C \quad (\text{A.36})$$

となる。 $x = 0$ から $C = 0$ が求まる。これより $x = 1$ と置くと式 (A.36) は

$$\det\{A\} = e^{\text{Tr} \ln A} \quad (\text{A.37})$$

となり、証明された。

A.7 複素数と複素積分

A.7.1 複素数 z の定義

- $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$
- $z^* = x - iy = re^{-i\theta}$

- Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

A.7.2 解析関数

複素関数 $f(z)$ が $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ と展開出来る時, この関数は解析関数と呼ばれる. 但し, n は整数である. 従って $f(z) = \sqrt{z}$ は解析関数ではない. この時, 原点を中心とした半径 R の円を複素平面で考えて $\theta = 0$ から一周まわる積分路を C と呼ぼう. 今, 関数 $f(z)$ をこの積分路 C で積分しよう.

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C z^n dz \quad (\text{A.40})$$

ここで $z = Re^{i\theta}$ と変数変換すると $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ となる. よって

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i c_{-1} & (n = -1) \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

となる. $f(z)$ で $n = -1$ の部分を $z = 0$ のポール, c_{-1} をその留数と言う.

例題 : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx$: ($p > 0, a > 0$) の計算 :

解答 : $\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz$ の複素積分を上半面の半径 R の半円 (経路 C) で積分する .

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iRe^{i\theta} d\theta \quad (\text{A.42})$$

ここで右辺第1項は $R \rightarrow \infty$ で問題の積分そのものである . 第2項は θ の範囲が $0 < \theta < \pi$ なので $\sin \theta$ は常に正である . よって, $e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}$ は $R \rightarrow \infty$ でゼロになる . 一方, 複素積分の公式から

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-pa}}{2ai} = \frac{\pi e^{-pa}}{a} \quad \text{と求まる.}$$

よって積分の答えは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-pa}}{a} \quad \text{となる.}$$

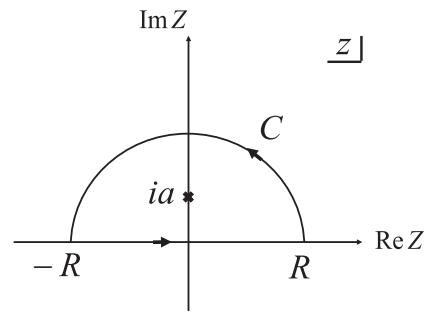


図 A.1: 複素平面の積分路

A.8 線積分と面積分

線積分と面積分の定義を書いておこう .

- 線積分 : $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$
 C : 積分路 (線に沿って積分: 実際の積分は 直線 か 円 が可能)
- 面積分 : $\int \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int \int_S A_n dS$ $d\mathbf{S}$: ベクトルの向きは面に垂直
 A_n : 法線方向の成分 (球の場合は e_r 方向外向き)
 S : 積分の面積 (実際の積分は 直方体 か 球 か 円筒 が可能)

関連図書

- [1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company, 1964)
- [2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley, 1967)
- [3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)
- [6] Simon Newcomb, ”Tables of the Four Inner Planets”, 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).