

# 相対性理論の解説

藤田 丈久

(よろず物理研究所)

## はじめに

この解説ノートは『力学の上達法』の第14章を抜粋したものである。これまで書いた相対性理論の解説よりも、かなりコンパクトでしかもわかり易く書けたと自分でも思っているため、抜粋している。より多くの若者がこの小ノートにより、相対性理論に関して、正確でしかし重要な基礎理論について学んで欲しいものである。特にどの慣性系でも時間が遅れることはないという証明は極めて簡単な事であり、ここにその抜粋を書いて置こう。

『実際は、運動系の時間刻み  $t'$  が静止系の時間刻み  $t$  (例えば1秒) と同じである事は簡単に証明できる事である。それは時間刻み  $t'$  にしてもミューオンの寿命にしてもこれらは定数である。実際、1秒は地球公転周期  $T$  から決められている。従って、これら定数は Lorentz スカラーであり Lorentz 変換の影響を受けない。つまり運動系の  $t'$  は静止系の  $t$  と全く同じである事が分かる。さらに蛇足となるが、地球公転周期  $T$  は運動方程式の解から求められている。そして運動方程式はどの慣性系でも同じである。よって 周期  $T$  はどの系で観測しても同じであり、従って時間刻み  $t'$  が系によって変わる事はない』

さらに、一般相対性理論関連の小ノートも付け加えている。これは『一般相対性理論が数学的には特に間違っていると言うわけではないが、しかし物理的には無意味な理論である』と言う事を厳密に証明したものである。一般相対性理論は相対性理論と直接、関係している理論ではないが、これにより相対性理論関連の物理をより深く理解できるものと考えている。

また『力学の相対論効果』についての解説も加筆している。この効果は『うるう秒』と関係している物理量であるが、これは力学における相対論的な効果の一つとして学ぶ必要がある問題である事は間違いない。

最後に、一般相対性理論関連で『水星近日点への惑星効果』についても解説している。これはかなり大変な計算ではあるが、物理を学ぶには良い例題であると考えている。

# 目次

第 1 章	相対性理論	7
1.1	慣性系	7
1.1.1	Galilei の相対性理論	8
1.2	特殊相対性理論	9
1.2.1	Minkowski 空間	9
1.2.2	一般相対性理論	10
1.2.3	座標の変換と座標系の変換	11
1.2.4	相対性理論における速度の和	12
1.2.5	運動量の Lorentz 変換	12
1.2.6	速度の和：正確な導出	13
1.3	運動方程式の変換不変性	14
1.4	運動系の時間刻みは遅れるか？	16
1.4.1	地上の系からみた電車の系の時間刻み	16
1.4.2	電車の系からみた地上の系の時間刻み	16
1.4.3	思考実験の何処が間違いか？	17
1.4.4	直感的な理解	17
1.5	相対性理論の応用例	18
1.5.1	光のドップラー効果	18
1.5.2	大気圏で生成されたミュオンの走行距離	19
1.5.3	大型加速器実験における不安定粒子	19
第 2 章	相対論的古典力学	20
2.1	古典力学	20
2.2	相対論的古典力学	21
2.3	速度の定義	21
2.3.1	量子力学における速度	22
2.3.2	Lorentz 変換における速度 $v$	22
2.4	Lorentz Contraction	22

2.5	高エネルギー重イオン反応 . . . . .	23
<b>第3章</b>	<b>何故、一般相対論は無意味か？</b>	<b>24</b>
3.1	相対性理論 . . . . .	24
3.1.1	Lorentz 変換 . . . . .	24
3.1.2	Lorentz 不変量 . . . . .	25
3.1.3	Minkowski 空間 . . . . .	25
3.2	一般化の危険性 . . . . .	26
3.2.1	$(ds)^2$ の不変性 . . . . .	26
3.2.2	$(ds)^2$ の一般化表現の意味 . . . . .	26
3.2.3	$g^{\mu\nu}$ の物理的な意味 . . . . .	26
3.3	一般相対性理論 . . . . .	27
3.4	負の遺産 . . . . .	27
<b>第4章</b>	<b>力学の相対論効果</b>	<b>28</b>
4.1	重力付加ポテンシャル . . . . .	28
4.1.1	非可積分ポテンシャル . . . . .	29
4.1.2	軌道の式がデカルト座標に戻せない！ . . . . .	30
4.1.3	軌道の不連続性 . . . . .	30
4.1.4	軌道の不連続性と水星近日点 . . . . .	31
4.2	非可積分ポテンシャルの摂動計算 . . . . .	32
4.2.1	摂動計算の最低次項 . . . . .	33
4.2.2	摂動計算の高次項 . . . . .	33
4.3	新しい重力理論の予言 . . . . .	34
4.3.1	重力付加ポテンシャルによる周期のズレ . . . . .	34
4.3.2	地球公転周期のズレ（うるう秒） . . . . .	35
4.3.3	うるう秒の起源 . . . . .	35
<b>第5章</b>	<b>水星近日点への惑星効果</b>	<b>36</b>
5.1	水星近日点への惑星の重力効果 . . . . .	36
5.1.1	惑星運動は同一平面 . . . . .	37
5.1.2	水星の運動 . . . . .	37
5.2	惑星効果の近似的評価 . . . . .	38
5.2.1	Legendre 展開 . . . . .	38
5.2.2	逐次近似法 . . . . .	39
5.2.3	特殊解 . . . . .	39

5.3	水星近日点に対する惑星の効果 . . . . .	40
5.3.1	数値計算 . . . . .	40
5.3.2	惑星運動の1周期の平均 . . . . .	41
5.4	数値計算の結果 . . . . .	42
5.4.1	100年間の $\delta$ の値 . . . . .	42
5.4.2	観測値との比較 . . . . .	42

# 第1章 相対性理論

物理学において相対性理論は最も重要な基礎理論である。それは『どの慣性系でも物理学は同じである』と言うものであり、もしこれが成り立たないとしたら、地球上で構築された理論模型が他の星の世界では予言能力を失う事になってしまうのである。幸い、現在までのあらゆる自然現象の検証結果はどの現象もこの相対性理論と矛盾していない事が証明されている。

ここでは相対性理論について基礎的な解説を行う。相対性理論においてはまず『慣性系』と言う概念を導入する。これは例えば地上の系を静止系 (rest frame) としてこれを一つの慣性系であるとする。そしてこの系から速度  $v$  で等速直線運動をしている系を運動系 (moving frame) として、このどちらの系でも物理は同じであると言う事である。

この慣性系同士をつなぐ変換則が Lorentz 変換である。ここで『この Lorentz 変換は座標系の変換であり、座標の変換ではない』と言う事を強調して置こう。この事は非常に重要なポイントであるが、しかしながらこれをしっかり認識する事はそう易しい事ではないと言える。

## 1.1 慣性系

相対性理論においては慣性系の概念が最も重要である。従って、まずはこの慣性系と言う物理用語について解説しよう。今、地上の系を静止系 ( $R$ -系) としよう。地球は自転も公転もしているが、この事は相対性理論の解説に影響するわけではない。この場合、 $R$ -系の座標と時間を  $R(t, x, y, z)$  と表記しよう。

次にこの静止系に対して、速度  $v$  で等速直線運動をしている運動系 ( $S$ -系) を  $S(t', x', y', z')$  と表記しよう。相対性理論とはこの両系で運動方程式の形がすべて同じになっていると言う要請である。

### 1.1.1 Galilei の相対性理論

簡単のためにまずは Galilei の相対性理論を解説しよう．今，電車の系（運動系）が静止系に対して一定速度  $v$  で運動しているとして電車が走る方向を  $x$ -軸としよう．ここで大切な事は，それぞれの座標系には観測者も同時に定義する事ができる事である．但し，電車は光速  $c$  と比べてゆっくり動いているとしている．この時，2つの座標系には次の関係式がある．

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (1.1)$$

これを Galilei 変換という．これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい．今，地上 (R-系) で質量  $m$  の質点がバネに繋がれていてこのバネの振動の実験をしたとする．バネの伸びを  $x$  とすると

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1.2)$$

が運動方程式になる．ここで  $k$  はバネ定数である．電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると，Galilei 変換から明らかのように運動方程式が

$$m\ddot{x}' = -kx' \quad (1.3)$$

となる．ここで  $x'$  はバネの伸びを表す．これは地上で行ったバネの実験と同じであり，その微分方程式の解は  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  として

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (1.4)$$

$$x' = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' \quad (1.5)$$

となる．ただし，初期条件 ( $t = 0$  で  $x = 0, \dot{x} = v_0$ ) をつけている．相対性理論はこれ以上の事は何も言っていない．この例を見てもわかるように，それぞれの系で観測者の存在を仮定しているが，これが相対性理論の本質である．



## 1.2 特殊相対性理論

S-系の速度  $v$  が光速に近い場合の変換則は Lorentz 変換により与えられている。今度の場合, R-系の座標を  $R(t, x, y, z)$  とした時, S-系の座標は  $S(t', x', y', z')$  となり, 時間は別のものになる。それは, どの系でも観測者が定義されているので, これは観測者の時間  $t'$  となっている。この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.6)$$

である。ここで  $\gamma$  は

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.7)$$

と定義されている。この式は Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になるべきであると言う要請を充たす事により導出されている。Lorentz 変換は速度  $v$  が光速と比べて十分小さいと

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.8)$$

となり, Galilei 変換を含んでいる事がわかる。

### 1.2.1 Minkowski 空間

相対性理論において Minkowski 空間が議論されることが良くある。この場合, Minkowski は Lorentz 変換の不変量として 4次元空間の微小距離の 2乗  $(ds)^2$  を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (1.9)$$

と定義したのである。これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.10)$$

に対して不変である事が確かめられる。Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (1.11)$$

としている。

この時,  $dx^\mu, dx_\mu$  を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (1.12)$$

として導入している. また計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている. この拡張は確かに間違っていない. しかしながら  $g^{\mu\nu}$  を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである. この  $g^{\mu\nu}$  は無次元量であるため, 計量にはなっていない.

また  $(ds)^2$  は Lorentz 変換の不変量ではあるが, これは結果であり条件ではない. この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である. 相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり, 変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている. これに対して, 数学的には  $(ds)^2$  の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これは特に重要な問題ではない.

この事より,  $g^{\mu\nu}$  に物理的な意味を見つける事は極めて難しい問題である事がわかる. この  $g^{\mu\nu}$  は数学的な拡張 (遊び) としては良いが, 物理学に取っては特に意味があるわけでもなく, むしろ不要であると言えよう.

### 1.2.2 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  に対する方程式である. 従ってこの方程式について, ここで議論すべき価値を見出す事が非常に難しいものである. 計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない. さらに時空に依存する  $g^{\mu\nu}$  を使った記述を採用した場合, その表現の  $(ds)^2$  が不変性を失ったと言うだけの事である. この場合, 元の  $(ds)^2$  の式 (3.2) を使えば問題ないのである. よって計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  によって計算された  $(ds)^2$  が元々ある不変性を無くしたとしても, それにより物理に対する影響が何処かに現われていると言うことはない.

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている. 恐らく, この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが, しかしそれ以上の事は良く分からない.

### 1.2.3 座標の変換と座標系の変換

これまで慣性系間の座標系変換に関して解説してきたが，ここでは座標の変換について簡単な説明を行おう．この場合，座標の変換と座標系の変換との違いを明確にしておこう．質点 P の座標を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  としよう．ここで，点 P の座標を定数  $\mathbf{a}$  だけ平行移動しよう．この時，点 P は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (1.13)$$

へと移動する．ここで古典力学の Lagrangian がこの平行移動に対して不変であるとしよう．すなわち

$$\delta L = L(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (1.14)$$

である．この式から  $\mathbf{a}$  を微小量とすれば

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (1.15)$$

となる．これは Lagrangian 方程式から

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = 0 \quad (1.16)$$

となる．ここで  $\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)$  は運動量であるため，質点の平行移動が運動量保存則に対応している事がわかる．

#### ● 座標系の変換

一方，座標系の変換の場合，点 P としては一つの点を考えている．これを静止系で P  $(t, x, y, z)$  とすれば，運動系では P  $(t', x', y', z')$  となり，この間の変換が Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.17)$$

となっている．

### 1.2.4 相対性理論における速度の和

相対性理論における速度  $V_1$  と速度  $V_2$  の和を求めよう．まず Lorentz 変換から

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

である，よって変換された系での速度は  $V' = V_1$ ,  $v = V_2$  として

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}} \quad (1.18)$$

となり，これは単なる和ではない．勿論，速度  $V_1$ ,  $V_2$  が光速  $c$  と比べて十分小さい場合，これはよく知られている式  $V = V_1 + V_2$  になっている．

ここで速度  $V_1$  が光速  $c$  の場合，この速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c \quad (1.19)$$

となって光速は不変である．

### 1.2.5 運動量の Lorentz 変換

質点のエネルギーと運動量  $(E, \mathbf{p})$  は Lorentz 変換により

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (1.20)$$

と変換される．この時， $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  を計算すると  $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  となり，一定値となる．この一定値は系の変換によらない量であり，質点を考える場合，その質量しかあり得ない事がわかる．従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (1.21)$$

と書く事ができる．ここで，運動量  $\mathbf{p}$  がその質量と比べて十分小さい場合，

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (1.22)$$

となり，確かに非相対論の「分散関係式」が得られる事がわかる．

### 1.2.6 速度の和：正確な導出

相対性理論においては運動量が基本的な物理量となっていて，速度自体は基本的な物理量ではない．実際，運動量が  $p$  の場合，質量  $m$  の質点の速度  $V$  は

$$V = \frac{pc^2}{E} \quad (1.23)$$

と定義されている．これは  $p$  が質量  $m$  と比べて充分小さい時は

$$V = \frac{pc^2}{E} \simeq \frac{p}{m} \quad (1.24)$$

となり，確かに古典論の場合と一致している．

ここでは運動量における Lorentz 変換の式

$$p_x' = \gamma \left( p_x + \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E + vp_x) \quad (1.25)$$

により，速度の和の公式を導出して見よう．運動する慣性系から速度  $\left( \frac{p_x c^2}{E} \right)$  で放出された質点の速度  $V$  は式 (1.25) から

$$V \equiv \frac{p_x' c^2}{E'} = \frac{\gamma \left( p_x + \frac{vE}{c^2} \right) c^2}{\gamma (E + vp_x)} \quad (1.26)$$

となる．ここでこの式の分母・分子を  $E$  で割り算すると

$$V = \frac{\frac{p_x c^2}{E} + v}{1 + v \left( \frac{p_x}{E} \right)} \quad (1.27)$$

となる．表記を合わせるため  $V_1 = \frac{p_x c^2}{E}$ ,  $V_2 = v$  としよう．よって式 (1.27) は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \quad (1.28)$$

となり，確かに速度の和則が求められている．

### 1.3 運動方程式の変換不変性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしている事が相対性理論の基本原理である．ここでは，Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行こう．

#### ● Newton 方程式と Galilei 変換

Galilei 変換の場合，変換則は

$$x = x' + vt', \quad t = t' \quad (1.29)$$

である．この式で Newton 方程式を変換してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (1.30)$$

となり，Newton 方程式は Galilei 変換に対して不変である事がわかる．

#### ● Newton 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換の場合，

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (1.31)$$

となっている．従って，座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \quad (1.32)$$

さらに2階微分は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dx')} d \left( \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \right) = \frac{\frac{d^2 x'}{dt'^2}}{\gamma^3 \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)^3} \neq \frac{d^2 x'}{dt'^2} \quad (1.33)$$

となり，Newton 方程式は全く別物になっている．すなわち，Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない．

- Maxwell 方程式と Galilei 変換

物質が無い時，Maxwell 方程式は電場  $E$  に対して

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad (1.34)$$

となっている．Galilei 変換の式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (1.35)$$

となるので

$$\left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \nabla'^2 \right] \mathbf{E}' = 0 \quad (1.36)$$

と変換され，Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不変ではない事がわかる．

- Maxwell 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (1.37)$$

であるから，Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変である．

## 1.4 運動系の時間刻みは遅れるか？

光速に近い速度で動いている運動系の時間刻み  $\Delta\tau$  が地上における時間刻み  $\Delta t$  とずれるかどうかを考察しよう．ここでは思考実験における観測量である時間差  $\Delta t$  により系の時間の遅れがあるかどうかを検証しよう．

### 1.4.1 地上の系からみた電車の系の時間刻み

速度  $v$  で等速直線運動をしている電車 (運動する慣性系) を考えよう．この場合，線路は直線である．ここで線路と平行に大きな鏡の壁が距離  $\ell$  だけ離れたところに延々と立っていると仮定しよう．ここで，電車の中の観測者がレーザービームで鏡に向かって光を放つとしよう．そしてこの観測者は鏡に反射した光を検出して光が往復した時間 ( $2\Delta\tau$ ) を正確に測定できたとしよう．この場合

$$\ell = c\Delta\tau \quad (1.38)$$

である．一方，地上にいる観測者からみると電車から発せられた光が三角形の軌跡を取って再び電車の観測者に受け取られる事になる．この場合，その時間を ( $2\Delta t$ ) としよう．従って

$$\sqrt{(c\Delta t)^2 - (c\Delta\tau)^2} = v\Delta t \quad (1.39)$$

となっている．よって

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (1.40)$$

となり，電車の中の時間刻みが少し小さくなるように見えている．

### 1.4.2 電車の系からみた地上の系の時間刻み

同様の思考実験を電車の人から行ってみよう．地上が電車に対して動いているように見える速度は ( $-v$ ) となっている．それは Lorentz 変換を逆に解くと

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.41)$$

となっていて確かに ( $-v$ ) となっている．今度の場合，地上において鏡に向かってレーザービームを放ち，それを計測して時間を測る．この場合，電車の人から見ると



これまでの考察と丁度，真逆になっている．従って

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta \tau \quad (1.42)$$

となる．この結果である式 (1.40) と式 (1.42) はお互いに矛盾している． $\Delta t$  と  $\Delta \tau$  は思考実験における観測量なので，何かが間違っている事は確かである．

### 1.4.3 思考実験の何処が間違いか？

上記の考察の間違いは  $t$  秒後の電車の座標が  $x' = vt$  としてしまった事が原因である．電車が高速になると  $t$  秒後の電車の正しい座標は，Lorentz 変換の式

$$x' = \gamma(x + vt) = \gamma vt \quad (1.43)$$

で与えられる．従って  $v\Delta t \Rightarrow \gamma v\Delta t$ ， $c\Delta t \Rightarrow \gamma c\Delta t$  と書き直す必要がある．すなわち式 (1.40) は

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t = \Delta t$$

となり，時刻刻みの遅れがない事が証明されている．

### 1.4.4 直感的な理解

これまで思考実験を考えて，運動系における時刻刻みが静止系の時刻刻みとどう関係しているのかに関して，様々な考察を行ってきている．しかしながら，実はこの事は極めて単純な事である事が以下に示されている．

実際は，運動系の時刻刻み  $\Delta \tau$  が静止系の時刻刻み  $\Delta t$  (例えば 1 秒) と同じである事は簡単に証明できる事である．それは時刻刻み  $\Delta \tau$  にしてもミュオンの寿命  $\tau$  にしてもこれらは定数である．実際，1 秒は地球公転周期  $T$  から決められている．従って，これら定数は Lorentz スカラーであり Lorentz 変換の影響を受ける事はない．つまり運動系の  $\Delta \tau$  は静止系の  $\Delta t$  と全く同じである事が分かる．

さらに蛇足となるが，地球公転周期  $T$  は運動方程式の解から求められている．そして運動方程式はどの慣性系でも同じである．よって 周期  $T$  はどの系で観測しても同じであり，従って時刻刻み  $\Delta t$  が系によって変わる事はない．

## 1.5 相対性理論の応用例

ここで相対性理論が実際に応用されている場合の具体例を幾つかあげておこう．相対性理論は系の変換をしているだけなので，そこからダイナミックスの情報が得られると言う事はない．

### 1.5.1 光のドップラー効果

星が高速  $v$  で遠ざかっている時，その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける．それは，光のドップラー効果としてよく知られている現象であるし，また観測もされている．この場合，星から発せられた光の運動量を  $p$  とすると地球上で観測される光の運動量  $p'$  は

$$p' = \gamma \left( p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left( p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left( 1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (1.44)$$

となり，光の運動量は減少している．これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (1.45)$$

となるので光の波長は大きくなり，これを赤方偏移 (red shift) という．可視光では赤っぽい光は波長が長く，青っぽい光は波長が短いからである．

また場の理論で赤外 (infra-red) 発散，紫外 (ultra-violet) 発散という言葉が良く出てくるが，この発散は物理量の運動量積分から来ている．運動量がゼロの時に積分が無限大になる時，赤外発散と呼び，運動量が大きい時の発散を紫外発散と呼んでいる．これは単なるネーミングであり，物理的な意味は全く無い．

### 1.5.2 大気圏で生成されたミューオンの走行距離

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突してミューオンを生成する場合がある。ミューオンはその寿命  $\tau_0$  が  $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$  秒程度の不安定な素粒子である。この寿命  $\tau_0$  は崩壊幅  $\Gamma$  により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (1.46)$$

と書かれている。この場合、崩壊幅  $\Gamma$  は Lorentz 不変な物理量である。従って、寿命も Lorentz 変換に対して変化する事はない。

● ミューオンの走行距離  $L$  : ここでミューオンの走行距離を計算しよう。その走行距離  $L$  は Lorentz 変換の式  $x = \gamma(x' + vt')$   $= \gamma vt'$  より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (1.47)$$

である。ここでエネルギーが  $1 \text{ GeV}/c^2$  のミューオンが上空で生成された時、 $v \simeq c$  であり、また  $\gamma \simeq 10.6$  である。従って、このミューオンの走行距離  $L$  は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (1.48)$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

### 1.5.3 大型加速器実験における不安定粒子

大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式 (1.47) によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

## 第2章 相対論的古典力学

ここでは相対論的古典力学と言う，昔，比較的よく議論されていた力学について簡単に解説しよう．結果的に，この理論体系には物理的な意味はないし，また自然界の記述に応用された事もない．従って，これまでの教科書においては，科学史的な観点で議論されてきた方程式と言えよう．

### 2.1 古典力学

Newton 方程式についてはここで説明するまでもないが，しかしこの方程式では座標が時間の関数となっている事に注意する必要がある．これは場の理論的に見ると非常に不思議である．それは場の理論においては時間  $t$ ，空間  $x, y, z$  はパラメータであり，互いに独立である事に依っている．この事は Lorentz 変換をみれば明らかであろう．

それでは古典力学において座標が時間の関数となっているのは何故であろうか？この設問は非常に重要である．古典力学も場の情報をどこかで引きずっているはずであるが，実際，この座標が時間に依ると言う所が場の関数から来ているのである．すなわち， $x(t)$  とした座標の時間依存は状態関数  $\psi(r, t)$  の時間依存が残っているからである．まずはこの点をしっかり認識して欲しいものである．

従って古典力学では質点の座標  $x$  と座標系における空間座標  $x$  を同一視している事に対応している．このため，質点の座標  $x$  が時間の関数となっていると言う仮定の下で Newton 力学は成り立っている．

## 2.2 相対論的古典力学

この Newton 力学をそのキネマティクスだけ相対論化した力学が『相対論的古典力学』と言われる方程式である．ここではその方程式を書かないで置こう．この方程式を書くと，その式が何らかの物理的な意味があるかも知れないと勘違いされる事を恐れるからである．当たり前の事ではあるが，近似された式から元の式を求める事は出来ない．例えば  $x$  が充分，小さい正の実数とした時

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots \quad (2.1)$$

と近似する事ができる．しかしながら，右辺から左辺を求める事は出来ない．従って，近似された Newton 方程式からその前の量子力学の方程式を導くことは，勿論，不可能である．

## 2.3 速度の定義

通常の古典力学において，質点の速度が座標の時間変化率として定義される．すなわち

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (2.2)$$

である．ところが相対論では質点の速度  $\boldsymbol{v}$  は上記のように定義する事はできない．それは Lorentz 変換の式でもそうであるが，時間  $t$  と座標  $\boldsymbol{r}$  は常に独立である事に依っている．相対論において質点の速度の定義は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \quad (2.3)$$

である．非相対論の極限では  $E \simeq mc^2$  なので

$$\boldsymbol{v} \simeq \frac{\boldsymbol{p}}{m} \quad (2.4)$$

となり，元に戻っている．この事は相対論においては質点の速度自体が基本的な物理量ではない事を示している．すなわち，相対論的古典力学はそもそもうまく定義する事が出来なかったはずである．この事をしっかり理解する事が大切である．

### 2.3.1 量子力学における速度

また量子力学においては速度と言う概念が直接、現れることはない。運動量のみが物理量として重要な役割を果たしている。質点の速度を知りたい場合、量子力学においては

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{m} \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}) \hat{\boldsymbol{p}} \psi(\boldsymbol{r}) d^3r \quad (2.5)$$

として運動量の期待値を求める事により速度を定義する事ができるのである。ここで  $\hat{\boldsymbol{p}}$  は  $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$  と書かれている演算子である。

### 2.3.2 Lorentz 変換における速度 $v$

相対論においては質点の速度は直接、物理量としては現れない事を示したが、Lorentz 変換においては、系の速度として  $v$  が現れている。これはキネマティクスであるため、力学変数ではない。しかしながら、この速度が物理的にどのような意味があるのかは、現在の所、あまりよくはわかっていない。

## 2.4 Lorentz Contraction

相対論的古典力学の描像のもとで相対論の変換を議論すると非物理的な事を平気で扱う事になっている。典型的な間違いは Lorentz Contraction (Lorentz 収縮) である。これは運動する慣性系において長さ  $\ell$  の棒を考えると、それは静止系でみると収縮しているように見えると言う主張である。しかしそれでは見えたからどうなるのかと言う問題は議論されていないし、勿論、観測量に結びつくことはない。

さらに、実際問題としては Lorentz 変換で議論できるのは物体の重心がどう変換されるかと言う事だけである。これは Lorentz 変換は質点の変換であることに依っている。Lorentz 変換によって物質の内部構造がどうなるのかに関する情報は、勿論、わかるはずがないのである。従って、Lorentz Contraction は物理的には議論する意味がないものである。

さらに言えば，物質が有限のサイズを持っていると言う事はミクロに見るとそれが原子の束縛状態になっていると言う事である．所が，相対論的量子場の理論では2体問題さえ，厳密に解くことは出来ていない．すなわち，2体の Dirac 方程式の問題は解けないのである．読者は「水素原子は Dirac 方程式で解かれているのではないか？」と疑問に思うかも知れない．しかしながら，水素原子では陽子が電子と比べて十分に重いため，陽子は動かないと言う仮定をして，1体の Dirac 方程式に近似しているのである．

## 2.5 高エネルギー重イオン反応

高速で運動する慣性系が静止系に衝突した場合，その衝突現象を記述する方法は存在するのであろうか？その具体的な物理現象が高エネルギーの重イオン反応である．1980年頃，非常に高いエネルギー（核子あたり 1 GeV 程度）の  ${}^4\text{He}$  をターゲット原子核に衝突させる破碎実験が行われた．その実験データが公表された時，Max-Planck 研究所において，Hüfner 氏と私はそのデータの解析のため，現象論模型の構築に専念していた [6]．しかしその場合，重大な問題に遭遇していた． ${}^4\text{He}$  原子核は相対論的に扱う必要があったのだが，実験室系における入射  ${}^4\text{He}$  原子核の波動関数が分からないのである．Lorentz 変換は座標系の変換であり，波動関数のような分布を持つ状態関数を変換する事は不可能であった．

それで結局，Projectile frame に乗った解析を行ったのである．この手法により，入射原子核である  ${}^4\text{He}$  原子核の破碎実験のデータ解析が可能となり，原子核の高運動量成分に関する重要な情報が得られることがわかったのである．

## 第3章 何故、一般相対論は無意味か？

Einstein 方程式は計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  に対する微分方程式である．この計量テンソルは  $(ds)^2$  という Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って， $g^{\mu\nu}$  自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

### 3.1 相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は4つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

#### 3.1.1 Lorentz 変換

静止系  $R(t, x, y, z)$  における運動方程式が静止系に対して，速度  $v$  で  $x$  軸に等速直線運動をしている運動系 ( $S$ -系)  $S(t', x', y', z')$  においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (3.1)$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．



### 3.1.2 Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして4次元空間の微小距離の2乗  $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

### 3.1.3 Minkowski 空間

この  $(ds)^2$  は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (3.2)$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (3.3)$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (3.4)$$

としている．この時， $dx^\mu$ ， $dx_\mu$  を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (3.5)$$

として導入している．また計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違っていない．しかしながら  $g^{\mu\nu}$  を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この  $g^{\mu\nu}$  は無次元量であるため，計量にはなっていない．

## 3.2 一般化の危険性

$(ds)^2$  は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (3.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において  $(ds)^2$  は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

### 3.2.1 $(ds)^2$ の不変性

この  $(ds)^2$  に関して重要なポイントを解説しておこう． $(ds)^2$  は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが， $(ds)^2$  を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には  $(ds)^2$  の不変性など様々な表現形式が考えられるが，これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

### 3.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間  $(ds)^2$  を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (3.6)$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

### 3.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (3.2) が本質的であり  $g^{\mu\nu}$  に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この  $g^{\mu\nu}$  は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

### 3.3 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  に対する方程式である [7]。従ってこの方程式について、ここで議論すべき価値を見出す事は出来ない。計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない。さらに時空に依存する  $g^{\mu\nu}$  を使った記述を採用した場合、その表現の  $(ds)^2$  が不変性を失ったと言うだけの事である。この場合、元の  $(ds)^2$  の式 (3.2) を使えば問題ないのである。よって計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  によって計算された  $(ds)^2$  が元々ある不変性を無くしたとしても、それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと、そう言う事は全くない。

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている。恐らく、この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが、しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない。

### 3.4 負の遺産

このような簡単なことが何故、30年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない。多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間、振り回されてきた事実は重い。その失われた時間を取り戻すことは出来ない。これは負の遺産どころの話ではない。しかしこの教訓を将来に活かして行く事こそが今となっては重要であろう。

ちなみに、ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて、水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった。これは水星の軌道の式で『空間における飛び(不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである。勿論、これは科学にさえなっていないものであるが、物理学の歴史においても、これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう。

[2023年4月加筆]

## 第4章 力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである．その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果のある程度は内包している．この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である．

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である．この速度  $v$  は約  $v \simeq 10^{-4}c$  である．従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は  $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$  である．よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期 (1年) が約  $\pi \times 10^7$  秒である事から，これまでの Newton 力学における周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくると予想する事ができる．

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう．しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである．

### 4.1 重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている．従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (4.1)$$

と求まっている．右辺の第2項が新しい重力ポテンシャルの補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を

含めた様々な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているので，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

#### 4.1.1 非可積分ポテンシャル

式(4.1)の第2項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている．かつて，カオスの理論が流行していた時があったが，その頃，この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった．この場合，非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた．従って，この取り扱いには十分な注意が必要である．

非可積分ポテンシャル  $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$  がある場合，厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう．ここではこの問題を詳しく見て行こう．まず式(4.1)で与えられるポテンシャル問題を解くと，その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell} \varphi\right)} \quad (4.2)$$

となっている．この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり，何か特別な事を考える必要があると言うわけではない．但し，定数の修正はあり，ここでは  $A_g$  と  $L_g$  がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \quad (4.3)$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2}} \equiv \ell \sqrt{1 + \eta} \simeq \ell \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \quad (4.4)$$

と定義されている．但し， $\eta$  は

$$\eta \equiv \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (4.5)$$

である．

### 4.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない！

軌道を与える式 (4.2) には明らかに問題がある．まず，一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right) \quad (4.6)$$

を見てみよう．この場合，この式はデカルト座標

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (4.7)$$

で表す事が出来ない．実際， $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$  項は

$$\cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right) = \frac{x}{r} \cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r} \sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \quad (4.8)$$

としてみると分かるように，デカルト座標では表現不能である．元々はデカルト座標から出発しているので，これは深刻な問題である．

### 4.1.3 軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある．軌道の解である式 (4.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である．これは軌道  $r$  が  $\varphi = 0$  と  $\varphi = 2\pi$  でどうなっているのかを見れば良くわかるものである．すなわち，

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon}, \quad \varphi = 0 \quad (4.9)$$

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \pi\eta}, \quad \varphi = 2\pi \quad (4.10)$$

となっているため，同じ点で軌道に飛びがある．この差を  $\Delta r$  とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \quad (4.11)$$

となっている．但しこれは水星の場合である．これは勿論，自然界では起こってはならない現象である．

#### 4.1.4 軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが、一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである。しかも、観測値と理論値が3桁近くも一致していたと言う主張であった。これは、一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が、実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう。

さらに言えば、水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には100年間の水星近日点シフト値として求められたものである。この場合、水星近日点シフトの観測値から、木星などの影響を考慮した計算値を差引く必要があったのである。ところが、木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて、またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている。その意味で、これらの計算を自分で実行すれば、この計算値には不透明な部分が相当あり、到底、信頼できる計算ではない事が分かるものである。

物理屋として自然をきちんと理解するためには、どのような些細な事でも自分の手で検証するという姿勢を常に保っている事が必要であろう。そして、その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう。

## 4.2 非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう。この場合、基本的な方針は変数である  $\varphi$  に摂動係数  $\eta$  が関係する場合に注意を要すると言う事である。まず、軌道を決める方程式を書いて置こう。これは

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2 \sqrt{1 + \eta} \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

である。この式は

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}} \quad (4.13)$$

と書き換える事が出来る。ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2 c^2}\right)^2 \quad (4.14)$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \quad (4.15)$$

と非常に小さな量である事に注意しよう。従って、この  $\eta$  を摂動的に扱う必要がある。すなわち

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi \simeq d\varphi \quad (4.16)$$

と近似して見る事である。この場合、近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり、これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある。



## 4.2.1 摂動計算の最低次項

まず，摂動計算における最低次項を見て行こう．この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \quad (4.17)$$

となっている．これは確かに閉じた軌道を与えている．そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (4.18)$$

となっている．ここで  $A_g$  は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1 + \eta) \quad (4.19)$$

である．この場合，離心率  $\varepsilon$  も変更を受けているが運動力学には影響していないので，具体的には書いてない．その意味においては，この付加ポテンシャルによる影響とは，軌道半径  $A_g$  が変更されたと言う事に対応している．

この軌道の式 (4.18) から明らかなように，近日点のシフトはない．これは物理的には当然で，非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても，これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である．

## 4.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう．式 (4.18) の解を  $r^{(0)}$  すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

である．また摂動項を  $r'$  ( $r = r^{(0)} + r'$ ) とすれば  $r'$  に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \quad (4.20)$$

となる．この場合，上式の右辺は  $\varphi$  にのみ依存していて  $r'$  には依っていない．ここで離心率  $\varepsilon$  をゼロとすると右辺はゼロになっている．従って  $r'$  は離心率  $\varepsilon$  に比例している事がわかる．よって  $r'$  は

$$r' \simeq C_0 \eta \varepsilon A_g \quad (4.21)$$

と書く事が出来る．ここで  $C_0$  は定数である．地球公転の場合， $\varepsilon$  は ( $\varepsilon \simeq 0.0167$ ) と非常に小さいので，この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである．

### 4.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため、これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている。この事は歴史的にみても非常に重要である。実際には、これは非常に小さい効果ではあるが、しかし観測に掛かる程度の大きさではある。この影響を定量的に計算して確かめて行こう。

#### 4.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期  $T$  は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \quad (4.22)$$

となる。ここで  $\eta$  は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (4.23)$$

と書かれている。この式で  $R$  は平均軌道半径、 $\omega$  は角速度で Newton 周期  $T$  と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている。この事より、重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として、周期のズレ  $\Delta T$  は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (4.24)$$

である [4, 5]。ここで、式 (4.24) の分母にでている  $T$  は Newton 周期と近似して十分である。この式より、正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっている。この運動は「周期の遅れ」に対応している。

この周期のズレは大雑把に言って  $\sim 10^{-8}$  の大きさであり、これは現在、時間に関する測定精度から見ても十分、観測可能な量である。但し、地球の公転周期を直接、この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる。しかしながら幸いにして、次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている。

### 4.3.2 地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径  $R$ ，太陽の質量  $M$  それと角速度  $\omega$  はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (4.25)$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って1年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion} = 0.621 \text{ s/year} \quad (4.26)$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は1972年6月から始まりこれまで40年間に25秒補正している．従って1年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (4.27)$$

である．これは式(4.26)の理論値と完全に一致している．

### 4.3.3 うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [8]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

## 第5章 水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている．ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により，どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう．そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう．但し，Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが，彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多すぎるものである．このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ，残念ながら実行できてはいない．

しかしながら，この場合においては，水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている．観測値と言っても，その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており，この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである．現在においては，一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため，一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている．このため，水星近日点シフトの観測値を理論値と比較すると言う場合，この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている．

### 5.1 水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\mathbf{r}}_w^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|} \quad (5.1)$$

から計算を始める事になる．ここで  $(m, \mathbf{r})$  と  $(m_w, \mathbf{r}_w)$  は水星と惑星の質量とその座標を表している．式 (5.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している．今の場合，この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる．

## 5.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう．これは実際の観測と比べても十分，良い近似であると言えよう．従って，上記の Lagrangian を 2次元極座標で書いておくと

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r}_w^2 + r_w^2\dot{\varphi}_w^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w)}} \quad (5.2)$$

となっている．従って，水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w \sin(\varphi - \varphi_w)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4)$$

$$m_w\ddot{r}_w = m_w r_w \dot{\varphi}_w^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt}(m_w r_w^2 \dot{\varphi}_w) = -\frac{Gm_w M r r_w \sin(\varphi_w - \varphi)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.6)$$

である．

## 5.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合，これは単純な Kepler 問題である．この場合，運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (5.8)$$

となっている．そしてこの解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (5.9)$$

とである．ここで  $A$  と  $\varepsilon$  は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad \text{但し } (\alpha = GMm) \quad (5.10)$$

である．これが非摂動の運動となっている．

## 5.2 惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう。この場合、水星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.11)$$

である。ここで右辺の最後の項において  $r, r_w$  を平均半径  $R, R_w$  で置き換えると言う近似を行う。従って、方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(R - R_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.12)$$

となる。以下では式 (5.12) の近似解を求めて行こう。

### 5.2.1 Legendre 展開

ここで最後の項 (5.12) を  $F$  として

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{但し, } x = \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (5.13)$$

と定義しよう。そしてこれを

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} x + \dots \quad (5.14)$$

と Legendre 展開しよう。従って、運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (5.15)$$

となる。ここで定数項は影響しないので無視している。

### 5.2.2 逐次近似法

この方程式 (5.15) を逐次近似法によって解いて行こう。まず、この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \quad (5.16)$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \quad (5.17)$$

を代入しよう。この場合、式 (5.15) は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (5.18)$$

となる。ここで  $b, \beta$  は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \quad (5.19)$$

となっている。

### 5.2.3 特殊解

方程式 (5.18) を解くために、まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう。従って、 $r$  は次のような解を持つと仮定しよう。

$$r = r^{(0)} + K \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (5.20)$$

ここで  $r^{(0)}$  は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (5.21)$$

である。この場合、式 (5.20) を式 (5.18) に代入しよう。この時、 $K$  は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \quad (5.22)$$

とすぐに求める事が出来る。よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \quad (5.23)$$

となる。

### 5.3 水星近日点に対する惑星の効果

ここで Kepler 問題の解  $r^{(0)}$  を代入すると軌道の解は

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{R(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} (\omega - \omega_w)^2} \cos(b + \beta t)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

となっている．ここで  $A \simeq R$  であり，また  $\beta = \omega - \omega_w$  である．また  $\varepsilon_w$  を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2 (\omega - \omega_w)^2} \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.25)$$

と定義しよう．ここで  $b + \beta t = \varphi - \varphi_w$  を使うと軌道  $r$  は

$$r \simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)} \quad (5.26)$$

となる．これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる．

#### 5.3.1 数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度，影響するのかと言う問題を具体的な数値を入れて評価して見よう．まず  $\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)$  項を

$$\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\varphi + \delta) \quad (5.27)$$

と書き換えよう．ここで  $c_1$  と  $c_2$  は

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w \quad (5.28)$$

$$c_2 = \varepsilon_w \sin \varphi_w \quad (5.29)$$

であり， $\cos \delta$  は

$$\cos \delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad (5.30)$$

と定義されている．ここで  $\varepsilon_w$  は  $\varepsilon$  よりもはるかに小さいので式 (5.30) は

$$\cos \delta = \frac{\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w)^2 + (\varepsilon_w \sin \varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varphi_w \quad (5.31)$$

と書く事が出来る．



## 5.3.2 惑星運動の1周期の平均

ここで惑星運動の1周期における平均操作を行おう．この場合，

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_w d\varphi_w = \frac{1}{2} \quad (5.32)$$

となり，従って1周期における平均操作を行うと  $\delta$  は

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \frac{GM}{R_w^2} \frac{1}{R(\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &\simeq \frac{R_w \omega_w^2}{\sqrt{2}\varepsilon R (\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる．但し，惑星の軌道は円であると近似している．

## 5.4 数値計算の結果

まず  $\delta$  の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう。但し，表1 においては全て地球を単位として計っている。

表1 惑星の性質

惑星	水星	金星	火星	木星	土星	地球	太陽
軌道半径	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
質量	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
周期	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
$\omega$	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

### 5.4.1 100年間の $\delta$ の値

表2 では100年間における近日点シフト値の  $\delta$  を表にしている。そしてこの計算結果を Newcomb の計算と比較している。

表2 100年間の  $\delta$  値

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
$\delta$ [式(5.33)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
$\delta$ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

その結果， $\delta$  についての我々の計算値は111.1 であるのに対して，Newcomb の計算値は109.3 であり，両者は予想以上に良く一致している。

### 5.4.2 観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は19世紀のものであるが，これはその前の100年間に渡る水星近日点シフトに対応している。この観測値がどの程度，信用できるのかと言う問題にここで答える事は出来ない。これは今後の課題である。

## 関連図書

- [1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)
- [2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (Addison-Wesley,1967)
- [3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)
- [6] Momentum distribution after fragmentation in nucleus nucleus collisions at high energy  
T. Fujita and J. Hüfner, Nucl. Phys. A343 (1980) 493
- [7] “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,”  
A. Einstein, Annalen der Physik vol. 49, pp. 769–822,  
März. 1916.
- [8] Simon Newcomb, ”Tables of the Four Inner Planets”, 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).