1.6 何故，繰り込み理論は間違えたのか？

長い間，繰り込み理論が一世を風靡してきた．人々は『繰り込み可能ではない理論は正しい理論体系ではない』とさえ思っていたような気配があったのである．しかしそれにしても何故，このような事が起こってしまったのであろうか？その理由をはっきりさせるのは長年の懸案事項でもあり，ここで簡単にしかし正確に繰り込み理論の体系の不備が何処にあったのかを解説して行こう．

1.6.1 電子のバーテックス補正

繰り込み理論は電子のバーテックス補正に Log の無限大が出てしまった事から理論的な枠組みが考案されたものである．実際，物理的な観測量に発散が出たらこれは困るので，何とか処理しようと大半の人々は考えたのは当然である．それでこの発散の形が電子の自己エネルギーの発散と全く同じであったので，この発散を波動関数を再定義する事により繰り込んでしまおう (Renormalizsation Scheme) としたのが繰り込み理論である．

しかし一部の物理学者，特に Dirac はこの繰り込みの手法に反対していた．彼は『この発散は理論スキームのどこかに欠陥があるからであろう』と主張していた．[Dirac, AIP Conference Proceedings 74, 129 (1981)] 参照．

1.6.2 Log 発散の原因

観測量に発散が出た時，人々は何故，理論の枠組みにおける問題点を探そうとはしなかったのであろうか？しかしながら電子のバーテックス補正を計算してみるとわかる事であるが，場の理論における摂動計算の手法に問題があるとは到底，考えられない事である．基本的には時間依存の摂動論に従って計算するだけであり，その形式のどこかに問題があるとは思われないのである．

1.6.3 伝搬関数の計算

この場合，バーテックス補正の計算の中でフォトンの伝搬関数を求めるところが出てきている．これは $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ の計算であり，これ自体はそれ程，大変な計算ではない．しかしそこで２個の偏極ベクトルの掛け算の計算が現れるが，これに多少，任意性が出てきてしまうのである．

1.6.4 Feynman の伝搬関数の問題点

当時から最もよく使われていて，ポピュラーな伝搬関数が Feynman の伝搬関数であった．これが標準的になっていた最も大きな理由はそれが単純で取り扱いやすいものであった事に依っていると考えられる．しかしながら，この Feynman の伝搬関数はある重要な条件を満たしていない事が場の理論の教科書 [1, 2] でも指摘されていて，良く知られていた事実でもあったのである．

ここで $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ の結果をもう一度，書いて置こう．これは

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-i\varepsilon} \times \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda} \tag{1.48}$$

となっている．従って，伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ は

$$D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda} \tag{1.49}$$

と２個の偏極ベクトルの積に比例している．一方， Feynman の伝搬関数は

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon} \tag{1.50}$$

と書かれている．この場合，

$$k_\mu D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu}{k^2-i\varepsilon} \neq 0 \tag{1.51}$$

となっている．ところが一般の伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ [式 (1.49)] は Lorentz 条件から

$$k_\mu D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^{2} k_\mu \epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0 \tag{1.52}$$

を満たす必要がある．従って，Feynman の伝搬関数は重要な条件 (フォトンの運動方程式からの条件式) を満たさないと言う深刻な状況となっている事がわかる．

1.6.5 繰り込み理論では Feynman の伝搬関数を使用!

ところが実際問題として，繰り込み理論で採用されていた伝搬関数は Feynman の伝搬関数なのである．そして，この Feynman の伝搬関数がバーテックス補正の計算における Log 発散の原因である事は計算を自分でチェックして見ればすぐにわかる事である．この事に関しては，一部の物理学者は気が付いていたものと思われる．しかしながら，この問題をきちんと取り上げて，繰り込み理論の問題点を指摘する物理屋はこれまでほとんどいなかったのである．何故であろうか？

1.6.6 電子ー電子散乱の T ー行列

Feynman の伝搬関数が標準的なものとして長い間使われてきたが，これには物理的な理由がある．実は Feynman の伝搬関数により，電子ー電子散乱の T ー行列が正しく求められていたのである．すなわち，電子ー電子散乱の実験結果はこの Feynman の伝搬関数を使用した計算により正しく再現されていたのである．

この事は Feynman の伝搬関数を採用する事に関して，相当強い影響力があったものと思われる．電子ー電子散乱の実験をうまく再現しているのだから，これは正しい伝搬関数として利用して良いのであろうと言う楽観的で論理的な飛躍が一般的になってしまったものと思われる．

しかしながら，付録 G で詳しい計算を解説しているように，Feynman の伝搬関数が電子ー電子散乱の T ー行列を正しく再現していたのは accidental (偶然) である．実際，散乱過程の電子が on-shell (自由粒子の分散関係式を満たす) であった事が実験を再現できた理由である．これは正しい伝搬関数による電子ー電子散乱の T ー行列計算と比較して見ればすぐにわかる事である．すなわち，散乱電子が on-shell つまりは自由電子であると言う事実を利用して Feynman の伝搬関数による散乱 T ー行列を書き直してみると，正しい伝搬関数による電子ー電子散乱の T ー行列計算と一致するのである．

1.6.7 レプトンのバーテックス補正

これは非常に重要な問題を示唆している． Feynman の伝搬関数はループが入っているようなダイアグラムには使ってはいけないと言う事である．従って，電子のバーテックス補正のような計算に使うと間違った結果を得てしまうと言う事である．

これで何故，QED の (g-2) 計算には Log 発散が出てしまい，繰り込みが必要となってしまったのかと言う事が明白になったのである．一方，Z^0 ボソンによるレプトンのバーテックス補正には発散が出ていない．これはその計算において，弱ベクトルボソンの伝搬関数として，Lorentz 条件 (弱ベクトルボソンの運動方程式からの条件式) を満たしている正しい伝搬関数を採用していたからである事が分かっている．これはバーテックス補正の計算過程でその計算を注意深く辿って行けば，発散が消えた理由がわかるものである．いずれにしても，ベクトルボソンの運動方程式を解いた後，そこから出てくる条件式を伝搬関数が満たすべきであると言う事は，物理では最も基本的な事項である．

2.2　弱い相互作用の繰り込み理論

Weinberg-Salam 理論は SU(2)⊗U(1) の非可換ゲージ理論から出発して，対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である．この模型は現在ではその理論的な取扱いが間違いだらけであるため，量子場の理論として受け入れる事は出来ない．しかしながら，Weinberg-Salam 模型の最終的な Hamiltonian は CVC 理論を再現しているため，弱い相互作用の実験事実と矛盾はしていない．その意味では，Higgs 粒子を除いたり，またいくつかの修正を加えれば，利用可能な模型になりうると考えられる．

2.2.1　Lorentz 条件 $(k_\mu \epsilon^\mu = 0)$ の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 W^μ の伝播関数を求める事が必要である．この場合，まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [5]．ベクトル場 W^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M^2 W_\mu W^\mu \tag{2.8}$$

で与えられる．ここで

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \tag{2.9}$$

である．　この場合，運動方程式は

$$\partial_\mu (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M^2 W^\nu = 0 \tag{2.10}$$

となる．ここで，自由粒子の解

$$W^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[a_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{2.11}$$

を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式をを求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{2.12}$$

となる．この場合，ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロとなることである．すなわち

$$\det\{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{2.13}$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \tag{2.14}$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0, \qquad \text{(Lorentz 条件)} \tag{2.15}$$

が求められる．これは QED では Lorentz ゲージ固定として良く知られている式である．しかし，前章で見たように QED でもゲージ固定とは無関係に同じ式が求められているが，これがゲージ理論とは関係のない弱い相互作用においても運動方程式から導かれたと言う事実は非常に重要である．

これまで何故，この運動方程式 (2.10) を解くと言う作業がなされなかったのであろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが，この場合も同じように行列式がゼロ

$$\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{k} + m\beta - E\} = 0$$

という条件によりエネルギーの分散関係式が求められている．

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

それをもとの Dirac 方程式に代入して Dirac の波動関数が求まっている．

2.2.2 ベクトル場 W^μ の自由度の数

ベクトル場 W^μ は元々４個の自由度を持っている．しかしベクトルボソンは粒子として振る舞う場合，その自由度は３個である．実際，これは W ボソンとして観測されている．自由度が１個減ったのは勿論，式 (2.15) の Lorentz 条件があるからである．QED の場合は，これにゲージ自由度があるため，もう１個減って，フォトンの自由度は２個であった．

2.3 有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定しよう．出発点となるのは S **行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場の** T-**積が問題となる．ここで，２個のボソン場の** T-**積は**

$$< 0|T\{W^\mu(x_1)W^\nu(x_2)\}|0 >= i\sum_{\lambda=1}^{3}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{2.16}$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)$ **の形は** Lorentz **条件を考慮する事により**

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)=-\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \tag{2.17}$$

と決定される．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k)=-\frac{g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \tag{2.18}$$

と一義的に決定される事がわかる．

2.3.1 Green 関数による伝播関数

残念ながら，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 **の項が** M^2 **と置き換えられたものであり，これは** Lorentz **条件を満たしていない．何故，このような基本的なところで間違えていたであろうか？この点に関して，詳しい解説はここでは行わない．恐らくその理由としては，これまでの教科書では** Green **関数の手法により伝搬関数を決めていたからであろう．しかしながら，複数の変数がある場合においては** Green **関数の手法が正しい答えを与えるとは限らない事が示されている．**

2.4 弱ベクトルボソンによるバーテックス補正

レプトンに対するバーテックス補正に関しては弱ベクトルボソンの効果も考慮する必要がある．事実，Z^0 ボソンはこの補正に効いてくる事は明らかである．

2.4.1 Z^0 ボソンによる電子の $g-2$

まず電子の $g-2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算するとこれは

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_e}{M_z}\right)^2 \sim 10^{-13}$$

となっている．ここで M_z は Z^0 ボソンの質量である．また α_z は Z^0 ボソンとレプトンとの弱い相互作用の結合定数である．この場合，補正は非常に小さい事が分かり，観測値と矛盾してはいない．

2.4.2 Z^0 ボソンによるミューオンの $g-2$

一方，ミューオンの $g-2$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算すると

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_\mu}{M_z}\right)^2 \simeq 8.6\times 10^{-10}$$

と求まっている．この値は最近の Fermilab によるミューオンの $g-2$ の実験値と比較する事が出来る．驚いたことに，この理論値は実験値と大きさでは一致している事が分かっている．非常に小さな物理量でもあり，今後，さらなる高精度の実験が行われることを期待したい．

付 録G Photon Propagator and Electron-Electron Scattering

Here, we discuss the photon propagator and its consequence on the electron-electron scattering process. Even though the Feynman propagator is not a correct one, it can reproduce the right scattering T-matrix of electron-electron scattering. We here clarify the reason why it can accidentally agree with the calculated T-matrix of the correct propagator.

G.1 Photon Propagator

When we calculate the S-matrix elements in the process of the electromagnetic interaction $H' = e\int j_\mu A^\mu d^3x$ in the second order perturbation theory, then we have to evaluate the propagator of photon. This is written as

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle \tag{G.1}$$

where $A^\mu(x)$ is given as

$$A^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\left[c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]. \tag{G.2}$$

This should be a solution of the following equation of motion for the gauge field

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0. \tag{G.3}$$

In this case, a question may arise as to how we can calculate the propagator of photon since the photon field $\boldsymbol{A}$ has one redundant degree of freedom. As we discuss below, there is some problem for determining the propagator of photon.

G.1.1 Feynman Propagator of Photon

Before going to the evaluation of the photon propagator in detail, we should make a comment on the Feynman propagator of photon. The propagator of photon which is known as the Feynman propagator can be written as

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}. \tag{G.4}$$

This is a standard photon propagator which can be found in most of the field theory textbooks. However, it is also well-known that this propagator cannot satisfy the condition of the polarization summation in a correct way. This is clear since it cannot satisfy the following equation

$$k_\mu D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu}{k^2 - i\varepsilon} \neq 0 \tag{G.5}$$

where the left hand side should be zero due to the Lorentz condition. Further, it cannot satisfy the Coulomb gauge condition, and therefore whatever they invent, there is no way to claim that the Feynman propagator is a right one. However, as will be seen below, Feynman propagator can reproduce the same T-matrix of electron-electron scattering as the one calculated from the correct propagator as long as the scattering particles are on the mass shell. Since the agreement of the T-matrices evaluated from the two propagators is entirely based on the free Dirac equation of electrons involved in the scattering process, the Feynman propagator cannot be applied for physical processes involving electrons which are not free or off the mass shell.

G.1.2 Calculation of $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$

Here, we should evaluate the denominator of the propagator $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ explicitly in order to avoid any confusions. First, we insert the vector potential with field quantization, and find

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}',\lambda'} \frac{1}{\sqrt{4V^2\omega_k\omega_{k'}}}\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k}',\lambda'} \times$$
$$\langle 0|T\left\{\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-ikx_1}+c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{ikx_1}\right)\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}e^{-ik'x_2}+c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}e^{ik'x_2}\right)\right\}|0\rangle \tag{G.6}$$

which can be calculated to be

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = \sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda}\left(e^{ikx}\theta(t)+e^{-ikx}\theta(-t)\right) \tag{G.7}$$

where we define

$$x = x_1 - x_2, \qquad \theta(t)=1 \quad \text{for} \quad t>0, \qquad \theta(t)=0 \quad \text{for} \quad t<0. \tag{G.8}$$

By noting the following complex plane integrations

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)}\frac{e^{ik_0t}}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-i\varepsilon} = \begin{cases} \frac{ie^{i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for} \quad t>0 \\ \frac{ie^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} & \text{for} \quad t<0 \end{cases} \tag{G.9}$$

we can rewrite $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ as

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-i\varepsilon}\times\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{G.10}$$

This is just the propagator of photon. Now, the problem comes up when we evaluate the summation of the polarization vector.

G.1.3 Summation of Polarization States

Up to now, we have presented the expression of the propagator evaluation of photon without making any comments on the field quantization, Now, we should quantize only the vector field $\boldsymbol{A}$ which depends on time. The Coulomb field A^0 is already solved from the constraint equation, and thus it cannot appear in the S-matrix expansion. Therefore, we have the condition that $\epsilon_0 = 0$. In addition, we should respect the Coulomb gauge condition

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0. \tag{G.11}$$

Now, we are ready to construct the numerator of the propagator of photon, and we find

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^a_{\boldsymbol{k},\lambda} \epsilon^b_{\boldsymbol{k},\lambda} = \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2} \right) \tag{G.12}$$

which is the only possible solution for the summation of the polarization vector. Note that this can satisfy the condition of $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0$, because the left hand side of eq.(G.12) multiplied by k^a becomes

$$k^a \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^a_{\boldsymbol{k},\lambda} \epsilon^b_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0 \tag{G.13}$$

while the right hand side can be calculated as

$$k^a \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2} \right) = k^b - \frac{\boldsymbol{k}^2 k^b}{\boldsymbol{k}^2} = 0 \tag{G.14}$$

and thus eq.(G.12) can satisfy all the conditions we have for the polarization vectors. Therefore, the propagator of photon D^{ab} becomes

$$D^{ab}(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2} \right). \tag{G.15}$$

G.1.4 Coulomb Propagator

The Coulomb part is solved exactly since it does not depend on time. Namely the equation of motion for the Coulomb part is a constraint equation which has nothing to do with the quantization of field. Note that the field quantization should always involve the time dependence of fields. Now, the equation of motion for the A^0 part can be written as

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A^0 = -e\bar{\psi}\gamma^0\psi \equiv -ej^0(x) \tag{G.16}$$

which is a constraint equation. However, the right hand side is made of electron fields, and the quantization of the electron fields is already done. It should be noted that the Coulomb case is calculated from the first order perturbation theory since it arises from

$$H_C = e\int j^0(t,\boldsymbol{r})A^0(\boldsymbol{r})d^3r - \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\nabla}A^0)^2 d^3r. \tag{G.17}$$

In this case, the interaction Hamiltonian between two Dirac fields j_1^0 and j_2^0 becomes

$$H_C = \frac{e^2}{8\pi}\int \frac{j_1^0(x_1)j_2^0(x_2)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}d^3r_1 d^3r_2 \tag{G.18}$$

which can be rewritten in terms of the momentum representation as

$$H_C = e^2\int \frac{\tilde{j}_1^0(q)\tilde{j}_2^0(-q)}{\boldsymbol{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{G.19}$$

On the other hand, the propagator of photon should be calculated from the S-matrix expansion in the second order perturbation theory. Therefore, the Coulomb propagator is completely different from the photon propagator which is calculated from the S-matrix expansion. However, the Coulomb field interaction should be always considered for the scattering process since electrons are already quantized.

G.1.5 Correct Propagator of Photon

The correct propagator of photon is given in eq.(G.12), but if we consider the scattering process such as electron-electron scattering in which the scattering particles are all on the mass shell, then we should add the Coulomb scattering in which the Coulomb propagator is employed. Therefore, the total propagators of photon together with the Coulomb scattering become

$$\begin{cases} D^{Coul}(k) = \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} & A^0 - \text{part} \\ \\ D^{ab}(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon}\left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2}\right) & \boldsymbol{A} - \text{part.} \end{cases} \tag{G.20}$$

G.2 Feynman Propagator vs. Correct Propagator

Here, we discuss the equivalence and/or difference between the T-matrices which are calculated from Feynman and correct propagators, The discussion of the equivalence between them is usually found in old field theory textbooks [1, 2]. However, this equivalence proof is valid only if the propagators appear in the scattering processes with free electrons. Therefore, if there is a loop involved such as the fermion self-energy, then the expected equivalence cannot be valid any more. Later in this section, we discuss some physical effects which may arise from the T-matrix difference between the Feynman and the correct propagators.

G.2.1 Electron-Electron Scattering

As an example, we present the scattering T-matrices between two electrons in which one electron with its four momentum p_1 scatters with another electron with its four momentum p_2, and after the scattering, we find two electrons with their momenta of ${p'}_1$ and ${p'}_2$. The four momentum transfer is defined as $q = p_1 - {p'}_1 = {p'}_2 - p_2$.

(a) Feynman Propagator

In the case of Feynman propagator as given in eq.(G.4), the T-matrix can be written in a straight forward way as

$$T^{(F)} = -\frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}({p'}_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}({p'}_2)\gamma^0 u(p_2) - \bar{u}({p'}_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\cdot\bar{u}({p'}_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2)\right]. \quad \text{(G.21)}$$

This is accidentally consistent with experiments.

(b) Correct Propagator

Now, we evaluate the T-matrix with the correct propagator of photon which is given by eq.(G.20). First, the T-matrix from the Coulomb part can be written as

$$T^{(C)} = \frac{e^2}{\boldsymbol{q}^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2). \tag{G.22}$$

On the other hand, the T-matrix from the vector field $\boldsymbol{A}$ becomes

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q} u(p_1)\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q} u(p_2)\right]. \tag{G.23}$$

Now, we make use of the free Dirac equations for two electrons at the initial and final states

$$\begin{aligned} (\not{p}_1 - m_1)u(p_1) &= 0, \ \bar{u}(p'_1)(\not{p}'_1 - m_1) = 0, \\ (\not{p}_2 - m_2)u(p_2) &= 0, \ \bar{u}(p'_2)(\not{p}'_2 - m_2) = 0 \end{aligned} \tag{G.24}$$

and thus we can rewrite

$$\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q} u(p_1) = \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1) q_1^0, \quad \bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q} u(p_2) = -\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) q_2^0 \tag{G.25}$$

where $q_1^0 = E_1 - E_1{}'$ and $q_2^0 = E_2 - E_2{}'$. Therefore, $T^{(A)}$ becomes

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\cdot\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2) + \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\frac{q_1^0 q_2^0}{\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)\right]. \tag{G.26}$$

Note that one may be tempted to assume that $q_1^0 = -q_2^0 = q^0$ at this point. However, the energy conservation can be used only at the final stage of the calculation, and therefore, the evaluation of the T-matrix should be done without using the energy conservation. It should be noted that the on-shell scattering processes like the electron-electron scattering must conserve the energy, and therefore one can employ the equation $q_1^0 = -q_2^0$ when one calculates the cross section. Now, it is easy to check that the sum of $T^{(C)}$ and $T^{(A)}$ becomes

$$\begin{aligned} T^{(C)} + T^{(A)} = &-\frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\cdot\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2)\right] \\ &+\frac{e^2(q^0 q^0 + q_1^0 q_2^0)}{q^2\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2). \end{aligned} \tag{G.27}$$

As can be seen, the T-matrix calculated from the correct propagator has an extra-term which is not found in the T-matrix evaluated from the Feynman propagator. Therefore, there exists a clear difference between the two T-matrices in the electron-electron scattering case.

G.2.2 Right T-matrix from Feynman Propagator

Now, if one uses the energy conservation of $q_1^0 = -q_2^0 = q^0$, then the Feynman propagator can reproduce the right T-matrix for the electron-electron scattering cross section as one can find the equivalence proof in old textbooks [1, 2]. Indeed, the on-shell scattering case is justified because the energy conservation is taken into account for the whole system. This should be one of the strong reasons why people accepted the Feynman propagator. But it should be noted that the agreement of the Feynman propagator calculation with experiments should be accidental.

G.2.3 Loop Diagrams (Fermion Self-energy)

As one sees from the comparison between the Feynman and correct propagators, the use of free Dirac equations play a very important role. Therefore, it is most likely that the two propagators should give the very big difference for the fermion self-energy type diagrams in which intermediate fermions do not satisfy the free Dirac equations.

(a) Feynman Propagator

Using the Feynman propagator, the self-energy of fermion can be easily written as

$$\begin{aligned}\Sigma^{(F)}(p) &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma_\mu \, \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon}\, \gamma^\mu \, \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)(-\not{p} + 4m) + \cdots \end{aligned} \tag{G.28}$$

which is just the self-energy contribution normally found in the textbooks.

(b) Correct Propagator

The self-energy of fermion with the correct propagator has never been calculated up to now, but we should evaluate it since it is very important to examine whether this self-energy contribution can agree with the normal self-energy contribution with the Feynman propagator. First, the Coulomb part does not contribute to the fermion self-energy because of the equal time operations, and thus we should only calculate the contribution from the vector potential part which can be written as

$$\Sigma^{(A)}(p) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^a \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^b \frac{\left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2}\right)}{k^2 - i\varepsilon}. \tag{G.29}$$

What we have to calculate is whether the $\Sigma^{(A)}(p)$ should be the same as $\Sigma^{(F)}(p)$ or not. From the calculations, we see that it does not agree with the one calculated from the Feynman propagator. In this respect, there is no reason any more that we can employ the Feynman propagator for the calculation that involves the photon propagation unless all fermions are on the mass shell.