理論物理の間違い連鎖

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

長い間，物理学は間違い連鎖を続けてきたのだが，それを解説することは決して面白い事ではないし，気が進む話でもない．それで，これまではその関連テーマごとに簡単なコメントをした解説はして来ているが，しかしそれらを系統的に解説することは行ってはいない．

しかし近未来の物理学を考えると，間違っている物理学をきちんと整理して，何処で何故，間違えたのかをはっきりさせる事は我々の責任でもあると思われる．さらに，その間違えた物理がこれまで人々に一定期間にせよ，何故，受け入れられたのかと言う基本的な設問を明らかにする必要がある．そして，それは非常に重要な課題となっている．

ここでは思い付くままに『間違いの物理』を解説して行こう．但し，この場合，何らかの意味で重要なポイントがあると言う理論的な間違いを主に解説しよう．まずは Adler のアノマリーから始めよう．そして Einstein の一般相対論を議論しよう．次には，Feynman の伝搬関数の話を解説しよう．さらに，'t Hooft 達の次元正則化について解説しよう．また Weinberg-Salam の間違いについて解説して行こう．

それから間違いとは言えなくても人々の思い込みにより，結果的には長い間，間違った解釈をしてきた理論模型がある．それは『クォークの閉じ込め』として知られている問題であり，これも不特定多数の間違いともいえるので少し解説しておこう．

これらはすべてこれまでに何らかの形で教科書などで解説している内容ではある．しかし統一的に見た時，その間違いを何故，犯してしまったのかと言うことが少しでも明らかになってくる可能性があると思われる．その場合，これは何時の日か若手にとってプラスになってくれるものと確信している．

ここで議論している論文の多くは教科書 “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013) の参考文献に載せてあるので、参照して頂きたい。

目 次

第 1 章 Adler のアノマリー **9**

1.1 三角形ダイアグラム 9

1.1.1 線形発散項の消滅 10

1.1.2 Landau-Yang の定理 10

1.2 数学的誤解 11

1.2.1 Adler の間違い 11

1.3 アノマリー方程式 12

1.3.1 軸性ベクトルカレントの保存則 12

1.4 負の遺産 13

第 2 章 Einstein の一般相対論 **14**

2.1 相対性理論 14

2.1.1 Lorentz 変換 14

2.1.2 Lorentz 不変量 15

2.1.3 Minkowski 空間 15

2.2 一般化の危険性 16

2.2.1 $(ds)^2$ の不変性 16

2.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味 16

2.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味 16

2.3 一般相対性理論 17

2.4 負の遺産 17

第 3 章 Feynman の伝搬関数 **18**

3.1 電子のバーテックス補正 18

3.2 伝搬関数と偏極ベクトル 19

3.2.1 フォトンの運動方程式と偏極ベクトル 19

3.2.2 Feynman の伝搬関数 20

3.3 弱ベクトルボソンによるバーテックス補正 20

3.4 弱ベクトルボソンによるレプトンの $(g-2)$ 21
3.4.1 ミューオンの $(g-2)$ 21
3.5 電子ー電子散乱 22
3.5.1 散乱 T-行列 22
3.5.2 ループを含むダイアグラム 23
3.6 負の遺産 24

第 4 章 't Hooft 達の次元正則化 **25**
4.1 真空偏極 25
4.1.1 ゲージ条件と無限大の消失 26
4.2 次元正則化 27
4.2.1 次元正則化における数学の間違い 27
4.3 複素平面での積分 28
4.3.1 $n=2$ の場合 28
4.4 正則化の数学と物理 29
4.4.1 和の正則化 29
4.4.2 正則化の数学的な意味 29
4.5 負の遺産 30

第 5 章 Weinberg-Salam の標準模型 **31**
5.1 非可換ゲージ理論 31
5.1.1 ゲージ粒子の質量 32
5.2 Higgs 機構 32
5.2.1 Higgs ポテンシャル 32
5.3 保存カレントと非保存カレント 33
5.3.1 保存カレント 33
5.3.2 複素スカラーボソンのカレント 33
5.4 ユニタリーゲージ 34
5.4.1 2 次発散項 34
5.5 自発的対称性の破れ 35
5.5.1 自発的対称性の破れの模型 35
5.5.2 Bogoliubov 変換 35
5.6 カイラル対称性の自発的破れ? 36
5.6.1 カイラル対称性模型の厳密解 36
5.6.2 Thirring 模型の真空の厳密解 37

5.6.3 厳密解による Thirring 模型の真空の性質 37
5.7 負の遺産 38

第 6 章 クォーク閉じ込めの誤解 **39**
6.1 量子色力学 (QCD) 39
6.1.1 量子色力学の Lagrangian 密度 40
6.2 グローバルゲージ対称性 41
6.3 クォークのカラー電荷 41
6.3.1 クォークの閉じ込め 42
6.4 自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性 42
6.4.1 摂動論が定義できない！ 42
6.5 負の遺産 43

付 録 A Regularization **44**
A.1 Cutoff Momentum Regularization 44
A.2 Pauli-Villars Regularization 45
A.3 $\zeta-$Function Regularization 45
A.4 Dimensional Regularization 46

付 録 B Gauge Conditions **47**
B.1 Vacuum Polarization Tensor 47
B.2 Vacuum Polarization Tensor for Axial Vector Coupling . . . 48
B.3 Compton Scattering 49
B.4 Decay of $\pi^0 \to 2\gamma$ 50
B.5 Decay of Vector Boson Z^0 into 2γ 51
B.6 Decay of Scalar Field Φ into 2γ 51
B.7 Photon-Photon Scattering 52
B.8 Gauge Condition and Current Conservation 53
B.9 Summary of Gauge Conditions 54

付 録 C Lorentz Conditions **55**
C.1 Gauge Field of Photon 55
C.2 Massive Vector Fields 57

付 録 D Basic Notations in Field Theory **58**

D.1 Natural Units and Constants 58

D.2 Hermite Conjugate and Complex Conjugate 59

D.3 Scalar and Vector Products (Three Dimensions) : 60

D.4 Scalar Product (Four Dimensions) 61

D.5 Four Dimensional Derivatives ∂_μ 62

D.5.1 $\hat{p}^\mu$ and Differential Operator 62

D.5.2 Laplacian and d'Alembertian Operators 63

D.6 γ-Matrix 63

D.6.1 Pauli Matrix 63

D.6.2 Representation of γ-matrix 64

D.6.3 Useful Relations of γ-Matrix 64

D.7 Transformation of State and Operator 65

D.8 Fermion Current 66

D.9 Trace in Physics 67

D.9.1 Definition 67

D.9.2 Trace in Quantum Mechanics 67

D.9.3 Trace in $SU(N)$ 67

D.9.4 Trace of γ-Matrices and $\not{p}$ 68

D.10 Lagrange Equation 69

D.10.1 Lagrange Equation in Classical Mechanics 69

D.10.2 Lagrange Equation for Fields 70

D.11 Noether Current 71

D.11.1 Global Gauge Symmetry 71

D.11.2 Chiral Symmetry 73

D.12 Hamiltonian Density 73

D.12.1 Hamiltonian Density from Energy Momentum Tensor 73

D.12.2 Hamiltonian Density for Free Dirac Fields 74

D.12.3 Role of Hamiltonian 75

D.13 Variational Principle in Hamiltonian 76

D.13.1 Schrödinger Field 76

D.13.2 Dirac Field 78

付 録 E Wave Propagations in medium and vacuum **79**

E.1 What is wave ? 79

E.1.1 A real wave function: Classical wave 80
E.1.2 A complex wave function: Quantum wave 80
E.2 Classical wave 81
E.2.1 Classical waves carry their energy ? 81
E.2.2 Longitudinal and transverse waves 81
E.3 Quantum wave 82
E.3.1 Quantum wave (electron motion) 82
E.3.2 Photon 83
E.4 Polarization vector of photon 84
E.4.1 Equation of motion for polarization vector 84
E.4.2 Condition from equation of motion 85
E.4.3 Photon is a transverse wave ? 86
E.5 Poynting vector and radiation 87
E.5.1 Field energy and radiation of photon 87
E.5.2 Poynting vector 88
E.5.3 Emission of photon 90
E.6 Gravitational wave 90
E.6.1 General relativity 91

第1章　Adler のアノマリー

Adler は $\pi^0 \to 2\gamma$ や $Z^0 \to 2\gamma$ などの物理過程を説明するために，三角形ダイアグラムと言われている T 行列計算を実行している．ところが，彼は $Z^0 \to 2\gamma$ を計算する過程で基本的でしかも重要な計算ミスをしている．このためこの物理過程には線形発散が存在するとして，その線形発散を正則化すると言う手法を開発して，アノマリー方程式を発見してしまったのである．一方，彼の論文より少し前に，西島先生が $\pi^0 \to 2\gamma$ の計算をされている [1]．これは場の理論の応用計算としては最も重要で見事な計算であり，π^0 崩壊の寿命の実験値を正確に再現している．当時，この計算に使われたパイオンと核子の結合定数 $g_{\pi NN}$ は核子・核子散乱実験を記述する $g_{\pi NN}$ より小さい値であった．しかし核子・核子ポテンシャルでは形状因子を導入したため，結合定数が大きめに決められていたのである．

1.1　三角形ダイアグラム

ここではアノマリーと関連している三角形ダイアグラムの計算において [2]，Adler が何処でどのように間違えたのかと言う事を解説しよう．まず，Feynman ダイアグラムとして Z^0 ボソンが 2 個のフォトンに崩壊する三角形図を考えよう．この場合，フォトンの運動量はそれぞれ $k_1,\ k_2$ としている．この場合の散乱 T 行列は

$$\begin{aligned} T_{AVC} \simeq\ & e^2 g_z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[(\gamma\epsilon_1)\frac{1}{\not p - M + i\varepsilon}(\gamma\epsilon_2)\right. \\ & \left. \times \frac{1}{\not p - \not k_2 - M + i\varepsilon}\gamma_5(\gamma\epsilon_v)\frac{1}{\not p + \not k_1 - M + i\varepsilon}\right] + (1 \leftrightarrow 2) \qquad (1.1) \end{aligned}$$

となっている [3]．M はフェルミオンの質量であり，また ϵ_1, ϵ_2 はフォトンの偏極ベクトルである．一方，ϵ_v^μ は Z^0 ボソンの偏極ベクトルである．

散乱行列の式 (1.1) はそのまま見る限り，線形発散しているように見える．しかし実際には $(1 \leftrightarrow 2)$ を入れ替えたものを足した場合，この 2 項で線形発散の項だけでなく，散乱 T 行列全体が積分する前に打ち消しあってゼロとなることが厳密に証明されている [4]．

1.1.1　線形発散項の消滅

２個の Feynman 図を足し算することは，確かにそう簡単な計算とは言えない．しかし少なくとも，線形発散の項が存在するかどうかと言う検証はそれほど，大変な計算とは言えないであろう．実際，この場合は p の主要項を見て行けばよいので $1/p$ で展開して見ることも可能である．そして，この計算を実行すると線形発散項は積分をする前にゼロになっていることがわかるのである．この事は T-行列が

$$\mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\rho\gamma_5]\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu\epsilon_v^\rho + \mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\rho\gamma_5]\epsilon_2^\mu\epsilon_1^\nu\epsilon_v^\rho = 0 \tag{1.2}$$

となる事から簡単に証明されている．ここで

$$\mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\rho\gamma_5] = -\mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho\gamma_5]. \tag{1.3}$$

と言う恒等式を利用している．

1.1.2　Landau-Yang の定理

２個の Fyenman 図の足し算が積分以前にゼロになると言う事実は Landau-Yang の定理として知られている問題と関係している [5, 6]．この定理とは『スピン１の有限質量をもつ粒子が２個のフォトンに崩壊することは群論の選択率により禁止されている』と言うものである．この証明は以下のように見ることができる．

フォトンは 1^- の粒子であるが，この２個のフォトンで作られる角運動量の状態は群論の言葉で書くと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}^1(\Omega_1)\otimes\boldsymbol{Y}^1(\Omega_2) \;=\; & (\boldsymbol{Y}^1(\Omega_1)\cdot\boldsymbol{Y}^1(\Omega_2))\oplus[\boldsymbol{Y}^1(\Omega_1)\otimes\boldsymbol{Y}^1(\Omega_2)]^{(1)}\oplus \\ & [\boldsymbol{Y}^1(\Omega_1)\otimes\boldsymbol{Y}^1(\Omega_2)]^{(2)} \end{aligned}$$

となっている．ここで右辺の第１項と第３項は 0^+ と 2^+ なのでこの議論の対象外である．問題は第２項であるが，これは確かにスピンが 1 である．しかしこの項は１と２の入れ替えに対して反対称となっている．しかしフォトンは対称でなければばならばならないのでこの状態を２個のフォトンで作ることはできない．従って，Landau-Yang の定理とはスピン１を持つ粒子が２個のフォトンに崩壊することはないと言う事を群論的に証明した定理となっているのである．

1.2　数学的誤解

それでは Adler は何故，この二つの項の打ち消し合いを見落としてしまったのであろうか？これは単純な数学の計算ミスであるが，ここでこの計算ミスの原因について解説しておこう．この場合，散乱 T_{AVC} 行列で線形発散が起こっている積分の部分を単純化した形で書くと

$$T_{AVC} \simeq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{p_\mu(a_1^\mu - a_2^\mu)}{(p^2+(b_1-b_2)^2)^2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \tag{1.4}$$

の形になっている．従ってこれは積分の前にすでにゼロになっている．

1.2.1　Adler の間違い

ここで Adler は積分公式を誤解して使っている．以下は簡単のために線形発散の積分を１次元にして分かりやすく解説しよう．問題の積分は以下の形に書くことができる．それは

$$I = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp \frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \tag{1.5}$$

の積分である．これは $p \to -p$ の変換を行うと

$$I = -\int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp \frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \tag{1.6}$$

となる．このマイナス符号がついたのはもともとの積分がゼロであることに依っている．しかしながら，例えば

$$J = \int_{0}^{\Lambda} dp \frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \tag{1.7}$$

の積分を考えるとこれは $p \to -p$ の変換を行うと

$$J = \int_{-\Lambda}^{0} dp \frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \tag{1.8}$$

となり，別の積分の形になっている．これは積分変数を置き換えただけで式 (1.6) が成り立つわけではないことを意味している．

1.3　アノマリー方程式

Adler はその論文で式 (1.1) においては第２項を第１項と同じであるとして 2 倍してしまっている．このためもともと積分する前に線形発散の項はゼロになっているのに，これを無視して線形発散の項を正則化してしまったのである．この正則化の手法が数学的に正当化されるのかどうか疑問ではあるが，しかし問題はそれ以前の計算間違いに依っていたのである．

このようにして，彼はアノマリー方程式を『発見』してしまったのである．しかしこれが当時，ある意味で新鮮な方程式であったため，このアノマリーの方程式が常識となってしまったのであろうが，しかし科学史的に正確なところはよくわからない．

1.3.1　軸性ベクトルカレントの保存則

ここで軸性ベクトルカレントの保存について簡単に解説しておこう．これは質量のないフェルミオン模型に対して成り立つものである．例えば QED の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu \gamma^\mu \psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.9}$$

を考えよう．ここでさらにフェルミオンの質量 m がゼロの場合を考えてみよう．この時，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ は次のカイラル変換

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{1.10}$$

に対して不変である．一方，質量項は式 (5.18) の変換に対して

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma_0 e^{i\alpha\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi \tag{1.11}$$

となり，不変ではない．従ってフェルミオンの質量 m がゼロの場合，それに関連した Noether カレント

$$j_5^\mu = -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{1.12}$$

が保存している．すなわち

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0 \tag{1.13}$$

である．ここからわかるように，軸性ベクトルカレントの保存則はその系が持っている対称性から導出された保存則である．従ってこの保存則は外力が働かない限り破れることはない．ましてや，発散を有限化しようとするような数学的な手法 (正則化など) により，保存則が破れたりすることはない．

1.4　負の遺産

当然ではあるが，物理学における基本法則がこのような数学の手段に過ぎない正則化によって破られるなどと言うことはあってはならないことである．その意味においてもアノマリー方程式は物理学に取ってはかなり深刻な負の遺産となって来たことは間違いない事である．

実際には，$Z^0 \to 2\gamma$ の散乱 T 行列をきちんと計算するとこれは積分の前にゼロとなる事が証明されている．これは勿論，Landau-Yang の定理と矛盾することはないので，当然の結果でもある．

第2章　Einstein の一般相対論

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

2.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は4つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

2.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{2.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

2.1.2　Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

2.1.3　Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{2.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{2.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{2.4}$$

としている．この時，dx^μ, dx_μ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{2.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

2.2 一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (2.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

2.2.1 $(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが， $(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

2.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{2.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

2.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (2.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

2.3 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [7]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論におけるLorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (2.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

2.4 負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

第3章 Feynman の伝搬関数

長い間，ゲージ理論と繰りこみ理論が現代物理学における基本的で正しい理論的な枠組みであると人々は信じてきたと思われる．極端な場合として，ゲージ理論でないと繰りこみ可能ではないから理論模型としては受け入れることができないとまで言われていた時代があった．そしてある時期，著者もその真っただ中にいたものである．

しかしながら観測量に無限大が出てきたら，これは理論スキームの何処かに欠陥があるはずであると言う事が Dirac により主張されていた [8]．従って何故，この指摘が無視されてしまったのかをきちんと明らかにする必要があると思われる．

実際には電子のバーテックス補正の計算で採用された Feynman の伝搬関数に問題の根源があったわけであるが，どういうわけか長い間，その問題が見過ごされてきたのである

3.1 電子のバーテックス補正

量子電磁力学 (QED) における電子のバーテックス補正 $\Gamma^\rho(p,q)$ は QED における 3 次の摂動計算により求めることができる．これは

$$\Gamma^\rho(p,q) = -ie^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}\right) \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} - \not{k} - m_e} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_e} \gamma_\nu \tag{3.1}$$

と書かれている．この式に現れている物理量に関しては，説明を避けるが必要な場合，参考文献 [3] を参照して頂きたい．ここで Feynman の伝搬関数 [9]

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} \tag{3.2}$$

を用いている．この式 (3.1) を見れば，計算しなくても Log 発散が出て来ることは明らかである．

この事から Log の発散は明らかに伝搬関数の形状に強く依存していることがわかるのである．これは Feynman の伝搬関数が重要な拘束条件を満たしてはいないと言う事と関係している．この問題を以下に簡単に見て行こう．

3.2 伝搬関数と偏極ベクトル

Feynman の伝搬関数について簡単に検証しよう．伝搬関数は $\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle$ の結果と密接に関係している．これは簡単に計算されて

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-i\varepsilon}\times\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}\epsilon^\nu_{\boldsymbol{k},\lambda} \tag{3.3}$$

となっている．この場合，偏極ベクトルに対する条件がどうなっているかが非常に重要な問題である．従って，どうしてもフォトンに対する運動方程式を解く必要がある．

3.2.1 フォトンの運動方程式と偏極ベクトル

自由電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0, \qquad \text{但し，} \ F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \tag{3.4}$$

である．この運動方程式はゲージを固定する前の方程式であり，偏極ベクトルに対する最も重要な方程式となっている．この式は

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu\partial_\mu A^\mu=0 \tag{3.5}$$

と書き直すことが出来る．ここで

$$A^\mu(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\left[c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-ikx}+c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{ikx}\right] \tag{3.6}$$

を (3.5) 式に代入すると

$$k^2\epsilon^\mu-(k_\nu\epsilon^\nu)k^\mu=0 \tag{3.7}$$

が求められる．この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)$ の解が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロと言う条件

$$\det\{k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu\}=0 \tag{3.8}$$

である．これより

$$k^2=0 \tag{3.9}$$

が解である事が簡単に証明できる．この $k^2=0$ を (3.7) 式に代入すると

$$k_\mu\epsilon^\mu=0, \qquad \text{(Lorentz 条件)} \tag{3.10}$$

の式が得られる．

3.2.2 Feynman の伝搬関数

伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ は式 (3.3) から分かるように

$$D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^{\mu}_{\boldsymbol{k},\lambda} \epsilon^{\nu}_{\boldsymbol{k},\lambda} \tag{3.11}$$

と２個の偏極ベクトルの積に比例している．このため伝搬関数は Lorentz 条件から

$$k_\mu D^{\mu\nu}(k) = A(k) \times \sum_{\lambda=1}^{2} k_\mu \epsilon^{\mu}_{\boldsymbol{k},\lambda} \epsilon^{\nu}_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0 \tag{3.12}$$

を満たす必要がある．一方， Feynman の伝搬関数 $D_F^{\mu\nu}(k)$ は

$$k_\mu D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu}{k^2 - i\varepsilon} \neq 0 \tag{3.13}$$

となっているので重要な条件 (フォトンの運動方程式の条件式) を満たしていない．

3.3 弱ベクトルボソンによるバーテックス補正

電子のバーテックス補正に関しては Z^0 ボソンも効いてくることがわかる．この計算はフォトンの場合と全く同じように計算できる．フォトンとの違いは弱ベクトルボソンの伝搬関数の形である．この場合，Z^0 ボソンの伝搬関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 - i\varepsilon} \tag{3.14}$$

と求められている．そしてこれは弱ベクトルボソンに対する運動方程式を解くことによって求められた拘束条件 (Lorentz 条件 $k_\mu \epsilon^\mu = 0$)

$$k_\mu D^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^\nu - \frac{k^2 k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 - i\varepsilon} = 0 \tag{3.15}$$

を満たしている．この場合，Z^0 ボソンによるバーテックス補正 $\Lambda^\rho(p,q)$ は

$$\Lambda^\rho(p,q) = -ig_z^2 e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 - i\varepsilon} \right) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{q} - \not{k} - m_e} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_e} \gamma_\nu \gamma^5$$

と書かれている．この計算では無限大が現れない事が直感的にも理解できるものである．それは伝搬関数の形に依っている．実際，

$$\Lambda^\rho(p,p) = -ieg_z^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 2xdx \frac{\left(\gamma_\mu \not{k} \gamma^\rho \not{k} \gamma^\mu - \frac{\not{k}\not{k}\gamma^\rho \not{k}\not{k}}{k^2}\right)}{(k^2 - s - i\varepsilon)^3} = 0 \tag{3.16}$$

として簡単に検証できる．但し，ここで $s = M^2(1-x) + m_e^2 x^2$ である．

3.4　弱ベクトルボソンによるレプトンの $(g-2)$

レプトンに対するバーテックス補正に関して，まずは電子の $(g-2)$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正の計算結果を書いておこう．これは

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_e}{M_z}\right)^2 \sim 10^{-13}$$

となっている．ここで M_z は Z^0 ボソンの質量である．また α_z は Z^0 ボソンとレプトンとの弱い相互作用の結合定数である．この場合，補正は非常に小さい事が分かり，観測値と矛盾してはいない．

3.4.1　ミューオンの $(g-2)$

一方，ミューオンの $(g-2)$ に対する Z^0 ボソンのバーテックス補正を計算すると

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_\mu}{M_z}\right)^2 \simeq 8.6 \times 10^{-10}$$

と求まっている．この値は最近の Fermilab によるミューオンの $(g-2)$ の実験値と比較する事が出来る．驚いたことに，この理論値は実験値と大きさでは一致している事が分かっている．非常に小さな物理量でもあり，今後，さらなる高精度の実験が行われることを期待したい．

このバーテックス補正の計算を共同研究者の神田直大氏と行っている [3]．そしてミューオンの $(g-2)$ の理論値が求められた時，その大きさが電子の $(g-2)$ より 4 桁程大きい事に驚いたものである．しかしまさか実験にかかるものとは当時，あまり考える事はしなかったものである．そのため，α_z の値の決定には多少，任意性がまだ残っている．今後はこの値をきちんと決める作業も重要であると思われる．

3.5 電子ー電子散乱

Feynman の伝搬関数がフォトンの標準的な伝搬関数として使われてきた事にはそれなりの理由がある．それは Feynman の伝搬関数が電子ー電子散乱の実験結果を正しく記述出来ていたからである．すなわち，電子ー電子散乱の散乱 T-行列は Feynman の伝搬関数により求められたものが正しい伝搬関数から得られた散乱 T-行列と一致するのである．

何故，両者が一致したのであろうか？実はこれには理由がある．電子ー電子散乱の場合，散乱する電子は on-shell 粒子，つまり自由粒子である．この場合，Feynman の伝搬関数から計算された散乱 T-行列を Dirac 方程式を使って書き直すと確かに正しい伝搬関数から得られた散乱 T-行列と一致するのである．それだけ自然は複雑であると言うことであろうか？

3.5.1 散乱 T-行列

ここではそれぞれの伝搬関数から計算された散乱 T-行列を書いておこう．

- **(a) Feynman の伝搬関数**

この場合，散乱 T-行列は

$$T^{(F)} = -\frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\cdot\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2)\right] \tag{3.17}$$

となっている．

- **(b) 正しい伝搬関数**

この場合，クーロンの伝搬関数のところか出てくる散乱 T-行列は

$$T^{(C)} = \frac{e^2}{\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) \tag{3.18}$$

である．一方，ベクトル場 A から出てくる散乱 T-行列は

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} u(p_1)\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q}u(p_1)\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q}u(p_2)\right] \tag{3.19}$$

である．但し，Dirac 方程式

$$\begin{aligned}(\not{p}_1 - m_1)u(p_1) &= 0,\ \bar{u}(p'_1)(\not{p}'_1 - m_1) = 0,\\ (\not{p}_2 - m_2)u(p_2) &= 0,\ \bar{u}(p'_2)(\not{p}'_2 - m_2) = 0\end{aligned}$$

は成り立っている．これより $T^{(A)}$ は

$$T^{(A)} = \frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}u(p_1)\cdot\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}u(p_2) + \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\frac{q_1^0 q_2^0}{\boldsymbol{q}^2}\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)\right]$$

となる．従って $T^{(C)}$ と $T^{(A)}$ の和は

$$T^{(C)} + T^{(A)} = -\frac{e^2}{q^2}\left[\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) - \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma}u(p_1)\cdot\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma}u(p_2)\right]$$

となり，Feynman の伝搬関数から得られた散乱 T-行列と一致している．しかしこの一致は電子が on-shell であったことが本質的である．

3.5.2　ループを含むダイアグラム

ここでループを含む場合のダイアグラムの計算を書いておこう．これは参考のためである．

(a) Feynman 伝搬関数

この場合，フェルミオンの自己エネルギーは

$$\Sigma^{(F)}(p) = -ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma_\mu\,\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\,\gamma^\mu\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \tag{3.20}$$

である．

(b) 正しい伝搬関数

この場合．フェルミオンの自己エネルギーは

$$\Sigma^{(A)}(p) = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^a\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma^b\frac{\left(\delta^{ab}-\frac{k^a k^b}{\boldsymbol{k}^2}\right)}{k^2-i\varepsilon} \tag{3.21}$$

となっている．

3.6 負の遺産

Feynman の伝搬関数がループのある物理過程に応用されてしまい，その結果，無限大が出てしまったと言う事自体はそれ程，深刻な間違いとは言えないかも知れない．ところが，これが繰りこみ理論として発展を遂げ，さらにゲージ理論のみが繰りこみ可能で，理論スキームとしては正しいものであると言う強い思い込みが大方の物理屋に浸透してしまったのである．このためゲージ理論信奉者が増大してしまい，これが物理の発展を阻害してしまった事は確かなことである．その意味では，Feynman の伝搬関数が結果的に大きな負の遺産を残してしまった事になっており，これは本当に残念なことである．

しかしながら，場の理論としての量子電磁力学は伝搬関数をきちんと正しいものにして行けば，理論体系としては非常に信頼できるものである．従って，まずは運動方程式をきちんと解くと言う作業を電磁場に対しても常に行うと言う姿勢を保って行く事が大切であろう．

第4章　't Hooft達の次元正則化

フォトンの自己エネルギーは2次発散している．自己エネルギーは観測量ではないので発散しても物理上の影響はない．しかしこれだと繰りこみが出来ないと言うことで，これを何とかうまく処理したいとして工夫されたのが 't Hooft 達の次元正則化と言う手法である．これは4次元積分をユーリッド化して，さらに積分の次元を $4-\varepsilon$ にすると言うものである．この手法を採用すると一見，2次発散が消えたように見えたのであるが，これは数学公式の使い方が間違っていたと言う極めて単純な事であった．

4.1　真空偏極

まずはフォトンの真空偏極について解説しよう．現在，真空偏極に関してこれまで重大な見過ごしがあった事がわかっている．このフォトンの真空偏極は元々２次発散が存在しているが，これは一方的に捨てられていたのである．その場合，捨てる条件として人々は「ゲージ条件」と言う奇妙な条件をつけたが，これは単純な間違いであることが証明されている．

この「ゲージ条件」とは，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対して

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \tag{4.1}$$

が成り立つべきであるという要請である．これはもともとはＴ行列にあらわれている偏極ベクトル ϵ^μ に対して $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$ という変換に対して不変であるべきであるという要請をおく事に対応している．このことに対応して， 真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対する式が得られているのである．ところがどのように計算しても，この式を満たす事は出来ない事が，実際に $\Pi^{\mu\nu}(k)$ を積分により求めてみればすぐにわかる事である．

4.1.1 ゲージ条件と無限大の消失

どうしてこのような間違いが起こったのであろうか？それは，無限大になる積分において不用意に変数変換を行うと全く間違った答えを得てしまうと言う事に依っている．簡単な実例を挙げる前に，どうして上式が「証明」されたのかを示そう．まず，$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)$ を

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right)\gamma^\nu\right] \tag{4.2}$$

と書き直す事が出来る．この時，右辺の第１項において $q = p - k$ の置き換えをする．この時，確かに

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{q}-m+i\varepsilon}\gamma^\nu\right] - ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\gamma^\nu\right] = 0$$

が「証明」されたと言うものである．この証明を現代の物理屋も含めてずっと長い間人々は信じて来たが，上式のどこが間違いなのか実例を示しながら解説しよう．

まず，次の積分量

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x-a)^2 - x^2\right) dx \tag{4.3}$$

を計算しよう．ここで $x' = x - a$ と置き換えると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x'^2 dx' - x^2 dx\right) = 0 \tag{4.4}$$

となり，積分値はゼロであるように見える．ところが，これをきちんと積分すると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x-a)^2 - x^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 - 2ax\right) dx = 2a^2 \times \infty \tag{4.5}$$

となり，無限大である．どこで間違えたのかは簡単にわかる問題であり，実際，正しく計算するには

$$Q = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left((x-a)^2 - x^2\right) dx = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[\int_{-\Lambda-a}^{\Lambda-a} x'^2 dx' - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} x^2 dx\right] = \lim_{\Lambda\to\infty} 2a^2\Lambda$$

とするべきであった．この事は無限大になる積分で変数変換を不用意にしてはいけないという当然の事が原因であったのである．

4.2 次元正則化

’t Hooft 達がその論文で次元正則化という一種奇抜なアイデアを提唱した [10]．それは運動量空間での積分の次元を 4 から $4-\varepsilon$ にしたと言うことである．但し，ε は無限小量である．しかしながら，2次発散が消えたのは，単純に数学の公式を間違えて使用したためである事がわかっている．実際，数学では運動量積分 d^4p を d^Dp (但し，$D=4-\varepsilon$) とした時，積分値は ε がゼロの極限で元の積分値に戻る事が当然の事として必要である．しかしながら，次元正則化では ε をゼロに持って行く極限を取っても元に戻ってくれないのである．このように，現在ではこの次元正則化は全く役には立たない事がわかっている (加藤洋志氏，日大理工修士論文 2010 年)．

4.2.1 次元正則化における数学の間違い

次元正則化における積分を検証して見よう．例えば

$$I=\int d^Dp\frac{1}{(p^2+a^2)^n}, \qquad D=4-\varepsilon \tag{4.6}$$

の積分を考えよう．ここで n は整数である．真空偏極の場合は $n=1$ なのでここでは $n=1$ を考えよう．従って，この積分は 2 次発散となっている．この積分における角度積分の結果を Ω_D と置くと I は

$$I=\Omega_D\int_0^\infty dp\,\frac{p^{D-1}}{p^2+a^2} \tag{4.7}$$

となる．これはどのように頑張てみても2次発散であることには変わりない．それでは次元正則化を応用して有限値を得たと主張した人達は何処で間違えたのであろうか？

4.3 複素平面での積分

人々は式 (4.7) において複素平面での積分に直すとその結果がポールの寄与だけになっているとして計算している．この場合，無限遠方で収束するという重要な条件の下で初めて成り立つものである事は自明なことである．ところが，式 (4.7) においてはこの条件が満たされていない．従って，ポールの寄与だけを持ってくるとあたかも有限値が求まったと言う錯覚に陥ってしまったのであろう．

4.3.1 $n=2$ の場合

積分 I で $n=2$ の場合を考えて見よう．この場合

$$I = \Omega_D \int_0^\infty p^{D-1} dp \frac{1}{(p^2+a^2)^2} \tag{4.8}$$

となる．この場合は，複素積分においては無限遠方では確かに

$$R^{-\varepsilon} \to 0 \quad \text{with} \quad R \to \infty \tag{4.9}$$

となっていて収束している．従って $n=2$ の場合は次元正則化により正しい答えが求められていると考えられる．

4.4　正則化の数学と物理

この節で議論する内容は 't Hooft 達の次元正則化とは直接の関係はない．しかし正則化の数学的そして物理的な意味を理解するためには有益であろうと思っている．

ある数列の和が発散したり，また不定であったりする時，その和を有限の一定値にしようとする試みがある．これは正則化と言われている手法であるが，このうちの一例を取り上げて，その数学的な意味と物理学との関連に関して解説してみよう．

4.4.1　和の正則化

ここでは次の様な和 N_0 を考えよう．

$$N_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \tag{4.10}$$

これは決まらない量である．ここでこの和を

$$N_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n e^{-n\lambda} \tag{4.11}$$

と定義しよう．但し λ は無限小の正の定数である．この式 (4.11) は直ちに計算されて

$$N_0 = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{1+e^{-\lambda}} = \frac{1}{2} \tag{4.12}$$

となり，有限値が求められている．

4.4.2　正則化の数学的な意味

しかし，式 (4.11) は最初の定義式 (4.10) とは別の量である．一見，$\lambda \to 0$ とすると同じように見えるのであるが，この場合 λ は無限小であるが，しかしゼロではない．一方，式 (4.10) の場合，この値は不定である．明らかに１であるか０であるか和をどこで止めるかに依っている．そして無限まで足し算すると言う数学的な操作が不明なのである．これに対して，正則化を行った式 (4.11) では１と０の間の値を取っている．ある意味で確率的になっているのである．

物理学にこの手法を応用することはかなりの危険性を伴うであろう．量子論の場合，確かに現象は確率的ではあるが，これは状態関数が分布関数になっているため確率的な振る舞いが見られている．これは正則化における確率的な概念とは本質的に異なっている．

4.5 負の遺産

昔，ほとんどの場の理論の教科書が次元正則化を用いた解説を行っている状態になった事があった．これは繰りこみ理論が場の理論の基礎であると言う思い込みと関係していたものであろう．この場合，次元正則化の問題点を指摘する教科書が全く見かけられなかったのは不思議と言えば不思議でもある．

この次元正則化は無限大をうまく処理できるのだと言う奇術の代表のように扱われたのであろう．物理学に奇術はない．しかし Higgs 模型もほとんど奇術的であることを考えると次元正則化の手品も何となく，分からないでもないと言えよう．その意味では負の遺産としてはそれ程，深刻ではないのかも知れない．実際，これは数学の手法であり，物理とは直接の関係はないものである．

第5章　Weinberg-Salam の標準模型

弱い相互作用に関する実験結果は基本的に CVC 理論によって非常にうまく記述されていた [11]．しかしながらこの理論には重大な理論的な欠陥があることが知られていた．それは相互作用 Hamiltonian がカレント・カレント形式であるため，これは４点相互作用となっていると言う点である．そしてこれだと２次の摂動論で計算すると２次発散が出てしまうと言う問題があり，この点を克服することは理論上の重要問題であった．弱い相互作用の結合定数は非常に小さいので，ほとんどの実験結果は１次の摂動論によって記述されていた．しかしながら，理論スキームとしては欠陥があることは明らかであった．このため，何らかの修正が必要であったが，１９６０年代後半に Weinberg-Salam が非可換ゲージ理論による弱い相互作用の模型を提案したのである [12, 13]．ところが非可換ゲージ理論では構成粒子が観測量ではなく，さらにゲージ粒子は質量ゼロであるため，出発点が間違っていたのは明らかであった．その上，Higgs 機構と言うさらに意味不明の模型を採用したため，理論体系としてはあまりにも稚拙な間違いだらけの理論模型となっていたのである．しかしながらこの模型は最終的には CVC 理論を再現するように手直ししているため，パラメータをうまく選べば実験を再現できる理論模型となっている．

5.1　非可換ゲージ理論

量子電磁力学において，繰りこみ理論がうまく機能したと人々は考えたため，これは QED がゲージ理論であることに依っていると言うほとんど根拠のない話が一般的に浸透してしまった．このため弱い相互作用もゲージ理論で構築しようと言う事が１９６０年代には主流になっていた．この場合，弱い相互作用では SU(2) を考える必要があったため，非可換ゲージ理論が採用されることになったのである．

当時，非可換ゲージ理論はこれまでの U(1) ゲージ理論と大きな違いはないと人々は考えたものと思われる．しかしながら実際には，非可換ゲージ理論における構成粒子の電荷がゲージに依ってしまうため，そのままではこれらの粒子が観測量にはならないことが証明されている．

5.1.1 ゲージ粒子の質量

ゲージ不変性がある理論体系の場合，そのゲージ粒子の質量はゼロである．一方，弱い相互作用で必要とされていた弱ベクトルボソンの質量は当時から核子の質量よりはるかに重いものであると言うことは実験的にも知られていた事実である．実際に弱ベクトルボソンが発見され，その質量が実験的に決められたのは１９８０年代に入ってからではある．しかしながら弱い相互作用の理論体系を作る際，ゲージ理論から出発することは明らかに無謀な試みであったのである．

5.2 Higgs 機構

ゲージボソンに質量を与えると言うほとんど奇術的な手法を用いざるを得なかったのは勿論，出発点が間違えているからである．この奇術が Higgs 機構である．この模型はあまりにも稚拙な理論ではあるが，ここでは簡単に解説しておこう．

5.2.1 Higgs ポテンシャル

Higgs 機構の Lagrangian 密度は [14]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - U(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.1}$$

である．ここで $U(\phi),\ D^\mu,\ F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} U(\phi) &= -\frac{1}{4}u_0\left(|\phi|^2 - \lambda^2\right)^2 && (5.2)\\ D^\mu &= \partial^\mu + igA^\mu && (5.3)\\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. && (5.4) \end{aligned}$$

と定義されている．ここで $u_0,\ \lambda$ は定数．この Lagrangian 密度はゲージ変換

$$\begin{aligned} A^\mu &\to A^\mu + \partial^\mu\chi && (5.5)\\ \phi &\to e^{-ig\chi}\phi && (5.6) \end{aligned}$$

に対して不変となっている．また，場のポテンシャル $U(\phi)$ は Higgs ポテンシャルと呼ばれているが，この出どころは不明であり，基本的な物理量ではない．

5.3 保存カレントと非保存カレント

ここでは U(1) の場合のみ考えよう．この場合，スカラー場 ϕ に対する方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu + igA^\mu)\phi = -u_0\phi\left(|\phi|^2 - \lambda^2\right) - igA_\mu(\partial^\mu + igA^\mu)\phi \tag{5.7}$$

となる．一方，ゲージ場 A_μ に対する方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gJ^\nu \tag{5.8}$$

となる．

5.3.1 保存カレント

ここで式 (5.8) の右辺の J^μ は

$$J^\mu = \frac{i}{2}\left\{\phi^\dagger(\partial^\mu + igA^\mu)\phi - \phi(\partial^\mu - igA^\mu)\phi^\dagger\right\}. \tag{5.9}$$

と定義されている．この場合，

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{5.10}$$

が成り立っている．従って，J^μ はこの系全体の保存カレントとなっている．しかしこのカレントにはベクトルポテンシャル A^μ が含まれている事に注意する必要がある．

5.3.2 複素スカラーボソンのカレント

一方，複素スカラーボソンのカレント J^μ_{CSB} は

$$J^\mu_{CSB} = \frac{i}{2}\left\{\phi^\dagger(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^\dagger)\right\} \tag{5.11}$$

であり，このカレントはゲージ変換

$$\phi \to e^{-ig\chi}\phi \tag{5.12}$$

に対して不変ではない．すなわち，複素スカラーボソンのカレント J^μ_{CSB} はゲージ依存となっている [15]．さらに，このカレントは

$$\partial_\mu J^\mu_{CSB} \neq 0 \tag{5.13}$$

であり，これは保存していない．従ってこの複素スカラーボソンは物理的な観測量とはなっていない．

5.4 ユニタリーゲージ

一方，Higgs 機構の模型計算において人々は Lagrangian 密度の段階でユニタリーゲージ固定をしている．これは

$$\phi = \phi^\dagger \tag{5.14}$$

とする事に対応している．こうすると最終的な Lagrangian 密度が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \frac{1}{4}u_0\left(|\lambda + \eta(x)|^2 - \lambda^2\right)^2 + \frac{1}{2}g^2(\lambda + \eta(x))^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

となる．ここで Higgs 場を

$$\phi = \phi^\dagger = \lambda + \eta(x) \tag{5.15}$$

と仮定している．

5.4.1 2 次発散項

Higgs 模型の Lagrangian 密度において，第３項を

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2}g^2(\lambda + \eta(x))^2 A_\mu A^\mu \tag{5.16}$$

と置こう．これは，ベクトル場 A_μ を量子化すると，物理的な観測量に対して，２次の摂動計算では２次発散を与える項である．従って，この項が存在する事はこの理論形式が本質的な欠陥を持っていることに対応している．

5.5 自発的対称性の破れ

Higgs 模型の基礎になっている模型は自発的対称性の破れの理論模型である．しかしながら，この理論模型はさらに稚拙な模型計算であり，詳細な解説は必要とは言えないものである．それでここでは簡単にその問題点を解説しておこう．この問題に興味がある読者は参考文献 [3, 16] を参照して貰うことにしよう．

5.5.1 自発的対称性の破れの模型

南部達は対称性を議論するにあたり，次のような模型の Lagrangian 密度から議論を進めている [17]．それは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \frac{1}{2}G\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\right] \tag{5.17}$$

である．ここでフェルミオンの質量はゼロとしている．従ってこの式 (5.17) は次のカイラル変換

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{5.18}$$

に対して不変である．従って，この系はカイラル対称性を持っている．しかしながらフェルミオンの質量がゼロの場合、その系を測るものが存在していないため、フェルミオン模型としては物理的な意味はない。

5.5.2 Bogoliubov 変換

ここで南部達は Bogoliubov 変換 [18]

$$c_n = e^{\mathcal{A}}a_n e^{-\mathcal{A}} = \cos\theta_n\, a_n - \sin\theta_n\, b_n, \tag{5.19}$$

$$d^\dagger_{-n} = e^{\mathcal{A}}b_n e^{-\mathcal{A}} = \cos\theta_n\, b_n + \sin\theta_n\, a_n \tag{5.20}$$

を使ってフェルミオン演算子 a_n, b_n から新しいフェルミオン演算子 c_n, d_n に変換している．ここで

$$\mathcal{A} = \sum_n \theta_n(a^\dagger_n b_n - b^\dagger_n a_n) \tag{5.21}$$

であり，θ_n は Bogoliubov 角である．

5.6 カイラル対称性の自発的破れ？

この方法により，南部達は Hamiltonian 密度を書き直している．この場合，Hamiltonian 密度の中に見かけ上，質量項に対応する項が現れている．彼らはこの項が現われた事により，カイラル対称性が破れたと誤解してしまったのである．Bogoliubov 変換はユニタリー変換なので，厳密に行えば正しい変換となっている．しかし彼らは高次項を考慮しないで議論を進めてしまったため，対称性が破れたと思い込んでしまったのであろう．系が持っている対称性が自然に破れるとしたら，その原因をきちんと調べる必要があるが，しかし検証された形跡はない．このため彼らはこの状況を『自発的破れ』としてしまったのであろう．物理学においては基本的な対称性が外力なしに破れると言う事はない．その意味において，これは相当，お粗末な計算である事は間違いない．さらに言えば，彼らは自発的対称性の破れに対応して『massless boson』が現れると主張しているが，これは S-行列のポールから『massless boson』が存在するはずであると言う主張であった．ところが，これには理論的な根拠は全くない事がわかっている．

5.6.1 カイラル対称性模型の厳密解

２次元の Thirring 模型はフェルミオンの質量がゼロの場合 [19]，Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - \frac{1}{2}\, g j^\mu j_\mu \tag{5.22}$$

と書かれている．ここで j_μ はフェルミオンカレントである．この Lagrangian 密度はカイラル変換

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{5.23}$$

に対して不変であり，カイラル対称性がある模型となっている．そしてこの Hamiltonian は

$$\hat{H} = \int dx \left\{ -i \left(\psi_a^\dagger \frac{\partial}{\partial x}\, \psi_a - \psi_b^\dagger \frac{\partial}{\partial x}\, \psi_b \right) + 2g\psi_a^\dagger \psi_b^\dagger \psi_b \psi_a \right\} \tag{5.24}$$

と書かれていて，これは Bethe 仮設により厳密に解かれている．

5.6.2 Thirring 模型の真空の厳密解

Thirring 模型の厳密解により作られた真空状態のエネルギーが解析的に解かれている．このため，カイラル対称性に関して極めて重要な性質を知ることができている．この仕事は平本誠，本間崇司，高橋秀典３氏との共同研究により，幸運にも真空状態のエネルギーの解析解が見つかったものである [20]．これは自発的対称性の破れに関する反証の論文として決定的な役割を果たしたことは確かである．これらの結果の詳細は参考文献 [16] に解説されているので詳細はこの文献を参照して貰うことにしよう．

5.6.3 厳密解による Thirring 模型の真空の性質

ここでは厳密解による Thirring 模型の真空の諸性質について簡単な説明だけをしておこう [16]．

• Thirring 模型の真空のエネルギー

Thirring 模型の真空は勿論，カイラル対称性を破ることはない．この場合，自由場の真空と比べて厳密解の真空はより低いエネルギー状態になっていることが示されている．2 次元模型なので実際の自然界との接点はないが，しかしこの真空が実現されていることは確かである．

• 真空におけるカイラル電荷の固有値

真空状態を記述する固有値にカイラル電荷がある．これは

$$Q_5 = \int j_5^0(x)\, d^3r, \qquad (j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) \tag{5.25}$$

と定義されている．この場合，自由場の真空は左右の対称性があるため，この真空のカイラル電荷はゼロである．一方，厳密解の真空のカイラル電荷の固有値は ± 1 であることがわかっている．

• 『注意書き』

系のカイラル対称性により，カイラル電荷が保存量となっている．そして，カイラル電荷の固有値がゼロでなく有限値である場合，これは勿論，カイラル対称の破れとは無関係である．昔，ある時期に誤解があったので，コメントしている．

5.7　負の遺産

現在まで標準理論として評価されてきた Weinberg-Salam の模型は CVC 理論を再現するように手を加えられていたので，最終的には弱い相互作用の実験を再現できる模型ではあった．その意味では，現代物理に残した負の遺産としてはそれ程，大きいとは言えないかも知れない．しかしながら Higgs 機構にせよ自発的対称性の破れにせよ，理論物理としては極めて稚拙な理論模型であり，これらが理論物理に与えた負の遺産は到底，小さいとは言えないであろう．

そして，さらに現在においてさえもまだ，CERN では Higgs 粒子探索実験を継続している．これは実験物理学に対して甚大な負の遺産を残したことは間違いない事である．この傷跡を回復するためにはかなり長い時間が必要となっているものと考えられるが，どうしたら良いのかこればかりは良く分からない．

第6章　クォーク閉じ込めの誤解

量子色力学 (QCD) を解説することは相当，難しいものである．観測量の計算がほとんど不可能である事が主な原因である．場の理論においては，すべて摂動論を基礎にして計算を行っている．この理由は勿論，自由粒子の場のみが厳密に解けているため，これをベースにして摂動論を展開すればよい事が分かっているからである．電磁場の相互作用，弱い相互作用そして重力とすべて摂動計算が可能である．ところが，量子色力学 (QCD) はこれらとは基本的に異なっている．結合定数が大きいから展開が収束しないと言うレベルの困難ではないのである．QCD においては，自由場が存在しないのである．これは自由場の Lagrangian 密度がゲージ不変ではない事が主な原因である．そして構成粒子であるクォークが自由粒子としては存在していないと言う事が実験的にも確認されている．

この現象をクォークの閉じ込めとして理解されていた時代が長く続いた．そしてこの場合，クォークはダイナミックスの結果として閉じ込められていると言う描像を人々は採用していた．このため，クォークの閉じ込めのポテンシャルは線形ポテンシャルなのかそれとも MIT バッグ模型のような無限の壁による閉じ込めなのかと言う問題がよく議論されて来たことは確かなことである．

しかしながら実際にはこのクォークの閉じ込め問題はクォークカレントがゲージに依るため観測量とはなっていないと言う事である．これはキネマティカルな閉じ込めであることに対応していて，この事は簡単に証明されることである．

6.1　量子色力学 (QCD)

ここではまず，QCD の Lagrangian 密度を書いてそれに関する幾つかの性質について解説して行こう．多少，群論の知識が必要とされているが，このノートの理解のためには知識で十分であろう．この群論を実際に使いこなすと言うレベルに到達することは難しいが，ここではそれは必要とされてはいない．

6.1.1 量子色力学のLagrangian 密度

量子色力学 (QCD) はクォークとグルオンの相互作用を基礎としている SU(3) カラーの非可換ゲージ理論である．６種類のクォークが存在し，それぞれが３つのカラー自由度を持っていて，８つのカラー自由度を持つグルオンにより相互作用している系である．バリオンは３つのクォークから出来ていて，メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である．この模型は基本的には正しいと考えられている．まずはLagrangian 密度を書いて，その性質を簡単に見て行こう．QCD のLagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \tag{6.1}$$

と書ける．ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \tag{6.2}$$

で与えられている．またグルオン場 A_μ は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \tag{6.3}$$

である．この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \tag{6.4}$$

を満たしている．また， C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている．このLagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である．

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with} \quad \chi = T^a\chi^a \tag{6.5}$$

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a \tag{6.6}$$

ただし， χ は，$\chi = \chi(t, \boldsymbol{r})$ の任意の関数であるが，無限小であるとする．

6.2 グローバルゲージ対称性

この QCD の Lagrangian 密度は QED や重力理論と異なり，グローバルゲージ変換に対する対称性を持っていない．ここで QED におけるグローバルゲージ変換とは

$$\psi' = e^{-i\alpha}\psi \qquad (\alpha \text{ は定数}) \tag{6.7}$$

と言う変換の事である．このグローバルゲージ変換に対する不変性は非常に重要である．それはそのフェルミオンのカレント保存則を保証しているからである．

一方，今の場合はカラー自由度があるため，クォークに対するグローバルゲージ変換は

$$\psi' = e^{-i\alpha_b T_b}\psi \tag{6.8}$$

となっている．ここでクォークとグルーオンの相互作用項を $\mathcal{L}_I$ としよう．これは

$$\mathcal{L}_I = -g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi \tag{6.9}$$

となっている．この場合，クォークに対するグローバルゲージ変換を行うと

$$\mathcal{L}_I' = -g\bar{\psi}e^{i\alpha_b T_b}\gamma^\mu A_\mu^a T^a e^{-i\alpha_c T_c}\psi \neq \mathcal{L}_I \tag{6.10}$$

となり，グローバルゲージ変換に対する不変性はない事がわかる．

6.3 クォークのカラー電荷

Lagrangian 密度 [式 (6.1)] はゲージ変換に対して不変である．しかし，クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ のカラー電荷はゲージ不変ではない．ここでクォークのカラーカレント j_μ^b は

$$j_\mu^b = \bar{\psi}\gamma^\mu T^b \psi \tag{6.11}$$

である．このクォークのカラーカレント j_μ^b に対してゲージ変換

$$\psi' = (1 - igT^a\chi^a)\psi \tag{6.12}$$

を行うと

$$j'^b_\mu = \bar{\psi}'\gamma^\mu T^b \psi' = \bar{\psi}(1 + igT^a\chi^a)\gamma^\mu T^b (1 - igT^a\chi^a)\psi \tag{6.13}$$

$$\neq \bar{\psi}\gamma^\mu T^b \psi \tag{6.14}$$

となり，これはゲージ変換に対して不変ではない事がわかる．すなわち，クォークのカラー電荷がゲージに依ってしまうため，これは観測量にはならないという事である．従って，これらのカラー電荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないと言う事実である．実際，クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが，これは保存量にはなっていない．

6.3.1 クォークの閉じ込め

つまり，クォークのカラー電荷は時間によってしまい，物理的な観測量にはならない事を意味している．そして，それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものである．実際，クォークは動力学的に閉じ込められているわけではなく，運動学的に閉じ込められているので，その閉じ込めは絶対的なものであると言える．

6.4 自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性

クォークとグルオンのカラー電荷がゲージに依ってしまう事，およびクォークとグルオンのそれぞれの自由 Lagrangian 密度がゲージ依存である事の証明はそれ程難しくはない．しかしこれは明らかに非常に重要な事である．ところが，この事を指摘している教科書はあまり知られていない．実際，印牧誠司氏の修士論文 (2007 年) がこの自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性を最初に明らかにした論文のように見える．これが本当だとしたら事態はかなり深刻である事を意味している．

6.4.1 摂動論が定義できない！

クォークとグルオンの自由場が存在しないという事実は非常に重大である．この模型では摂動計算ができないため，全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に，解く方法がないのである．

QED もそうであったように，４次元量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている．それ以外には解けない事が最も大きな理由である．この摂動論の場合，例えば QED では自由電子の状態と自由フォトンの状態の言葉で全ての観測量を表現している．ところが，QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため，物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である．

6.5 負の遺産

クォークはダイナミカルに閉じ込められているとして，それは線形ポテンシャルによって閉じ込められているとした描像は長い間，理論物理においては常識となっていたようである．実際はカラー電荷がゲージ依存で観測量ではないと言うキネマティカルな閉じ込めであった．このため，クォークの閉じ込めは絶対的なものである．

しかしこの閉じ込めに関する誤解が残した負の遺産はそれ程，甚大とは言えないかも知れない．どちらにしても，結局，QCD においては観測量を計算する方法は存在していないので理論物理としてはお手上げの状態である事に変わりはない．その意味で QCD における理論的な進展は今後もあまり期待することはできないかも知れない．昔、比較的多くの理論屋はクォークが閉じ込められている限り、この分野の研究には進展が望めないと考えていた事は確かである。

ここでクォーク模型の重要性について簡単にコメントしておこう。この模型は信頼され、一般に受け入れられているが、これには勿論、理論と実験の両面から十分な証拠が示されている。その内、最も重要な理由としては、クォークには電磁的な電荷があり、クォークの電磁的なカレントは保存していると言う事実がある。その際、陽子は u,u,d クォークで構成されていて u クォークは $\frac{2}{3}e$ と言う電荷を持っている。実際、SU(6) のクォーク模型による陽子と中性子の磁気能率比 $R = \frac{\mu_p}{\mu_n}$ は理論値が $R_{\rm theo} = -1.5$ に対して実験値は $R_{\rm exp} = -1.46$ であり、良く一致している。

付 録A　Regularization

It should be worthwhile clarifying what the regularization means in physics. Mathematically, most of the regularizations are clear, except the dimensional regularization which has made crucial mistakes in making use of mathematical formula.

A.1 Cutoff Momentum Regularization

The simplest and most reliable regularization method is known in terms of the cutoff Λ in which the integral of the momentum p can be set to

$$\int_0^\infty F(p)dp \to \lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^\Lambda F(p)dp \qquad (A.1)$$

where Λ is called the cutoff momentum. This has a good physical meaning since the integral over the momentum corresponds to the summation of all the possible states in the Fock space of the field theory one considers. Therefore, the introduction of the cutoff momentum means that the maximum number of the states in the field theory model is now fixed to $N = \frac{2\pi}{L}\Lambda$ with L the box length. In this sense, if the cutoff momentum Λ is much larger than any scales in the model field theory, then one can reliably obtain the calculated results under the condition that the physical observables should not depend on the Λ.

A.2 Pauli-Villars Regularization

Now, another popular regularization must be the Pauli-Villars regularization [29]. This is rather simple and it makes the divergent integral to the convergent integral in the following way

$$\int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \Longrightarrow \int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\Lambda^2}{p^2 + \Lambda^2} \simeq \Lambda^2 \log(\Lambda/m) \qquad (A.2)$$

which is indeed convergent. However, if we make the Λ to infinity, then we can get back to the infinity as the original integral (l.h.s. of eq.(A.2)) indicates. Therefore, there is no point to employ the Pauli-Villars regularization.

A.3 $\zeta-$Function Regularization

The third example can be the $\zeta-$function regularization [46], and in this case, the summation can be replaced in the following way

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \quad \to \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \qquad (A.3)$$

where the original infinity is certainly kept in terms of λ. In this respect, the apparent infinity can be expressed in terms of some finite numbers and the original infinity can be recovered when the parameter is set to zero or infinity depending on the regularization. Mathematically, the regularizations we discuss here can satisfy the important condition that the original divergence can be recovered by setting the parameters to zero or infinity.

A.4 Dimensional Regularization

Finally, we discuss the dimensional regularization which is, however, quite different from other examples [10, 27]. It cannot satisfy this most important mathematical condition that the original infinity should be recovered when we set the parameter to zero or infinity. In the dimensional regularization, the parameter is ε since they replace the integral dimension from 4 to $D = 4 - \varepsilon$. In this case, one uses the following integral formula

$$\int d^D p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-\frac{1}{2}D-1}} \qquad (\text{for } n \geq 4). \qquad (A.4)$$

The important point is that eq.(A.4) is only valid for $n \geq 4$, and this is the very strict condition. In fact, if one applies eq.(A.4) to the calculation of the photon self-energy diagram ($n = 2$), then one cannot recover the quadratic divergence in the dimensional regularization even when one sets the value of the parameter ε to infinitesimally small. What does this means ? It indicates that the dimensional regularization must be mathematically incorrect for the quadratic and higher divergent evaluations. For the case of the logarithmic divergence, the dimensional regularization can give a correct result, though the divergence level is somewhat different from the normal regularizations. In this respect, the dimensional regularization is a useless regularization method.

付録B Gauge Conditions

In connection with the chiral anomaly problem, the gauge condition is closely related to the derivation of the chiral anomaly equation. Therefore, we should clarify the situation of the gauge invariance in QED since there is a serious misunderstanding among some of the educated physicists concerning the gauge invariance of the calculated amplitudes which involve the external photon lines. Their argument is as follows. The polarization vector ϵ^μ is gauge dependent and therefore the calculated results must be kept invariant under the transformation of $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$. However, this condition is unphysical since we already fixed a gauge (for example, Coulomb gauge fixing of $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$) before the field quantization. The gauge invariance of the S-matrix evaluation is guaranteed as far as the fermion current is conserved, which is always satisfied in the perturbation calculation. Here, we present several examples of the gauge conditions whether the calculated Feynman amplitudes can satisfy the gauge conditions or not.

B.1 Vacuum Polarization Tensor

The best example can be found in the vacuum polarization tensor $\Pi^{\mu\nu}$. People believe that the following gauge condition should be satisfied [21]

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \tag{B.1}$$

However, this is a wrong equation, and in fact, we can easily calculate $\Pi^{\mu\nu}$ as [22, 38]

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon}\right] = \frac{\alpha}{2\pi}\left(\Lambda^2 + m^2 - \frac{k^2}{6}\right) g^{\mu\nu}$$

$$+\frac{\alpha}{3\pi}(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 e}\right) - 6\int_0^1 dz z(1-z)\ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2}z(1-z)\right)\right] \quad (B.2)$$

where Λ denotes the cutoff momentum. There is no way that the first term of the right hand side can satisfy the gauge condition of eq.(B.1). Namely we find

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0 \quad (B.3)$$

and therefore, eq.(B.1) cannot be satisfied by the vacuum polarization tensor. People believed eq.(B.1) should hold true, basically because of the mathematical mistake due to the wrong replacement of the integration variables in the infinite integrals [16, 38]. Since then, the gauge conditions are imposed by hand on the amplitudes which have some external photon lines. However, it should be noted that the same type of the calculations of the vacuum polarization was done a long time ago by Heisenberg and Euler [35, 36] and they obtained the similar results as above including the quadratic divergence and logarithmic divergence as well. Even though their argument of the polarization process is not in the right direction in terms of the renormalization scheme [25, 26], their calculations themselves are indeed correct.

B.2 Vacuum Polarization Tensor for Axial Vector Coupling

Here, we should check whether the gauge condition can be satisfied for other reaction processes or not. First, we should present an example of the vacuum polarization tensor which is induced by the axial vector current which couples to fermions as

$$\mathcal{L}' = g'\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi A_P^\mu.$$

In this case, the vacuum polarization tensor for the axial vector current can be written as

$$\Pi^{\mu\nu}_{AV}(k) = g'^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^5 \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\gamma^5 \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon}\right]$$
$$= \frac{g'^2}{8\pi^2}\left(\Lambda^2 - m^2 - \frac{k^2}{6}\right) g^{\mu\nu} + \frac{g'^2}{12\pi^2}(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 e}\right)\right.$$
$$\left. -6\int_0^1 dz z(1-z)\ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2}z(1-z)\right)\right]. \quad (B.4)$$

This clearly shows that the axial vector current conservation is not related to the gauge condition since we have

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}_{AV}(k) \neq 0. \quad (B.5)$$

On the other hand, the Compton scattering case is different and it can satisfy the gauge condition since there is no fermion loop in this calculation.

B.3 Compton Scattering

The Feynman amplitude of the Compton scattering can be written as

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = -ie^2\bar{u}(p')\left[\gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\varepsilon}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\right] u(p). \quad (B.6)$$

Therefore, we can check

$$k_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu} = -ie^2\bar{u}(p')\left[\gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\varepsilon}\not{k} + \not{k} \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\right] u(p). \quad (B.7)$$

Now, using some identities

$$\not{k} = \not{p} + \not{k} - m - (\not{p} - m), \qquad \not{k} = -(\not{p}' - \not{k} - m) + (\not{p}' - m)$$

and the free Dirac equations of

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \qquad \bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0 \quad (B.8)$$

we can easily prove

$$k_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0. \quad (B.9)$$

This is, of course, clear since the Compton scattering does not contain a loop diagram, and therefore the gauge condition, $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$ just corresponds to the conservation of the fermion current. This can be easily seen since the initial and final fermion in the Compton scattering can satisfy the free Dirac equation. On the other hand, if the Feynman diagrams involve fermion loops, then the gauge condition does not correspond to the fermion current conservation since the free Dirac equation cannot be used.

B.4 Decay of $\pi^0 \to 2\gamma$

Among the Feynman diagrams that contain the fermion loop, the decay of the $\pi^0 \to 2\gamma$ can satisfy the gauge condition. Now, the T-matrix of $\pi^0 \to 2\gamma$ can be evaluated to be

$$T_{\pi^0\to 2\gamma} \simeq g_\pi e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[(\gamma\epsilon_1)\frac{1}{\not{p} - M + i\varepsilon}(\gamma\epsilon_2)\frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - M + i\varepsilon}\gamma^5 \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - M + i\varepsilon}\right]$$

$$\simeq \frac{e^2 g_\pi}{4\pi^2 M}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu. \qquad (B.10)$$

Defining the amplitude $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ as $T_{\pi^0\to 2\gamma} = \mathcal{M}_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu$, we can prove

$$k_1^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{e^2 g_\pi}{4\pi^2 M}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_1^\rho k_2^\sigma = 0 \qquad (B.11)$$

which is due to the anti-symmetric character of the $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tensor. This property is basically due to the γ^5 interaction which generates the anti-symmetric nature of the invariant amplitude. In this respect, it is very special that the $\pi^0 \to 2\gamma$ decay process satisfies the gauge condition, and it is not due to the nature of the electromagnetic interactions. This pion and nucleon interaction is, in fact, beyond QED, and it indeed involves the strong interaction. Since the strong interaction satisfies the parity invariance, the Feynman diagram of the decay process keeps the anti-symmetric nature, and thus the amplitude satisfies eq.(B.11), and this is, of course, accidental from the point of view of the gauge condition. This point can be clearly seen if we examine the reaction process of the scalar meson decay into two photons since the scalar interaction has the symmetric nature.

B.5 Decay of Vector Boson Z^0 into 2γ

The T-matrix for the $Z^0 \to 2\gamma$ decay process is given as [43]

$$T_{Z^0 \to 2\gamma} = -\frac{g_z}{6\pi^2}\left(\frac{2e}{3}\right)^2 (k_1^\alpha - k_2^\alpha)\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \epsilon_v^\rho. \qquad (B.12)$$

Therefore we can define the amplitude $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho}$ as $T_{Z^0\to 2\gamma} = \mathcal{M}_{\mu\nu\rho}\epsilon_1^\mu \epsilon_1^\nu \epsilon_V^\rho$, we can now prove

$$k_1^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu\rho} = \frac{g_z}{6\pi^2}\left(\frac{2e}{3}\right)^2 k_1^\mu k_2^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \neq 0. \qquad (B.13)$$

Therefore, the gauge condition is not satisfied in the case of of $Z^0 \to 2\gamma$ decay process. This is, of course, clear since the $\gamma^\mu\gamma^5$ interaction has a symmetric nature and therefore it is just opposite to the γ^5 interaction.

B.6 Decay of Scalar Field Φ into 2γ

Now, we consider the interaction Lagrangian density where the scalar field Φ couples to fermions as

$$\mathcal{L}' = g_0 \bar{\psi}\psi\Phi$$

where g_0 is the coupling constant. In this case, the T-matrix of $\Phi \to 2\gamma$ can be evaluated as

$$T_{\Phi\to 2\gamma} \simeq e^2 g_0 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot\epsilon_1)\frac{1}{\not{p} - M + i\varepsilon}(\gamma\cdot\epsilon_2)\frac{1}{\not{p}+\not{k}_1 - M + i\varepsilon}\frac{1}{\not{p}-\not{k}_2 - M + i\varepsilon}\right]$$
$$\simeq e^2 g_0 M \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \qquad (B.14)$$

where M denotes the nucleon mass. Defining the amplitude $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ as $T_{\Phi\to 2\gamma} = \mathcal{M}_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu {\epsilon_2}^\nu$, we can now prove

$$k_1^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} = e^2 g_0 M k_1^\mu g_{\mu\nu} \neq 0. \qquad (B.15)$$

Therefore, the gauge condition is not satisfied in the case of of $\Phi \to 2\gamma$ decay process. This is, again, easy to understand since the scalar interaction has a symmetric nature and therefore it is opposite to the γ^5 interaction.

It should be noted that there is no scalar meson in nature which decays into two photons. However, the similar type of the Feynman diagram becomes important when we consider the photon-gravity interaction. In fact, photon can interact with the gravitational field via loop diagrams which are essentially the same as the T-matrix given in eq.(B.14) [16]. In this respect, the T-matrix of eq.(B.14) can be considered to be a physical process.

B.7 Photon-Photon Scattering

The T-matrix of the box diagrams in the photon-photon scattering can be written as

$$T_{\gamma-\gamma} \simeq e^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot\epsilon_1)\frac{1}{\not p - m}(\gamma\cdot\epsilon_3)\frac{1}{\not p - \not k_3 - m} \right.$$
$$\left. \times(\gamma\cdot\epsilon_4)\frac{1}{\not p - \not k_1 - m}(\gamma\cdot\epsilon_2)\frac{1}{\not p - \not k_1 - \not k_2 - m}\right] \qquad (B.16)$$

where the energy of photon can be written as $\omega = |\boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2| = |\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_4|$ at the center of mass system of two photons. The leading behavior of the finite terms in this T-matrix can be easily evaluated under the condition of $m \gg \omega$ and we write it in terms of $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ which is defined $T_{\gamma-\gamma} = \epsilon_\mu\epsilon_\nu\epsilon_\lambda\epsilon_\sigma\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ as

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\sigma} \simeq e^4\left[1 + c_1\left(\frac{\omega}{m}\right)^2 + c_2\left(\frac{\omega}{m}\right)^4\right](g^{\mu\sigma}g^{\lambda\nu} + g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu}) \qquad (B.17)$$

where c_1 and c_2 denote some numerical constants. Therefore, it is clear that the gauge conditions do not hold

$$k_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\sigma} \neq 0. \qquad (B.18)$$

As we explain in detail in chapter 3, the apparent divergences can be completely cancelled out due to the kinematical cancellation by adding up three independent Feynman diagrams together, and the disappearance of the divergences is not due to the regularization [31].

B.8 Gauge Condition and Current Conservation

As we saw above, the serious mistake must be concerned with the confusion between the gauge conditions and the current conservation. Somehow, people believed that the gauge condition should be directly connected to the current conservation [42]. Or in other words, the gauge condition of the Feynman amplitude (we denote it as $T = \epsilon_\mu \epsilon_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu}$) for some reaction process

$$k_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 \tag{B.19}$$

should be identical to the current conservation of

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{B.20}$$

This is, of course, a wrong statement, and the current conservation must hold true for any occasions while the gauge condition of eq.(B.19) is in some cases satisfied and in other cases not, depending on the reaction processes as we saw above. Basically, the current conservation cannot manifestly be traced in the Feynman amplitude of $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ unless there are only external fermion lines which can satisfy the free Dirac equation, and consequently can be related to the current conservation.

In this sense, the condition of the reaction amplitude $T = \epsilon_v^\alpha \epsilon^\mu \epsilon^\nu \mathcal{M}_{\alpha\mu\nu}$ involving the axial vector vertex of $\gamma^\mu \gamma^5$ with its polarization vector ϵ_v^α

$$q^\alpha \mathcal{M}_{\alpha\mu\nu} \neq 0 \tag{B.21}$$

does not mean that the axial current conservation is violated. We have shown that the gauge condition of $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$ does not have any physical meaning, but the replacement of $\epsilon_v^\mu \to \epsilon_v^\mu + c'k^\mu$ is even worse than the gauge condition since the axial vector coupling has nothing to do with the gauge theory. In this respect, the whole business of the chiral anomaly equation is just the castle in the air.

B.9 Summary of Gauge Conditions

To summarize, we see that the Compton scattering and $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ decay process can satisfy the gauge condition, while other examples of the photon self-energy, the vacuum polarization for the axial vector current, the $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ decay process, photon-photon scattering diagrams and $\Phi \rightarrow 2\gamma$ decay process do not satisfy the gauge condition, and this is mainly because they have a fermion loop.

It is by now clear that the gauge condition of $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + ck^\mu$ is physically a meaningless procedure. This is basically due to the fact that the Lorentz condition of $\epsilon_\mu k^\mu = 0$ is obtained from the equation of motion as explained in Appendix C. Therefore, this constraint equation has nothing to do with the gauge fixing condition, and thus the requirement of $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + ck^\mu$ is physically a wrong procedure.

付 録C　Lorentz Conditions

Here, we clarify that the Lorentz condition of $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ should be obtained from the equation of motion, and therefore it is more fundamental than the requirement of the gauge fixing condition in QED. For the massive vector bosons, the Lorentz condition plays a fundamental role for determining the polarization sum of the vector boson.

C.1 Gauge Field of Photon

We write the Lagrangian density for the free gauge field as

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{C.1}$$

with $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. In this case, the equation of motion becomes

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0. \tag{C.2}$$

Since the free photon field should have the following solution

$$A^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{\epsilon^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left[c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{C.3}$$

we can insert this solution into eq.(C.2) and obtain the following equation for $\epsilon^\mu(k,\lambda)$

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0. \tag{C.4}$$

This equation can be written in terms of the matrix equation for the polarization vector ϵ^μ

$$\sum_{\nu=0}^{3} \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0 \tag{C.5}$$

where we write the summation explicitly. In order that the ϵ^μ should have a non-zero solution, the determinant of the matrix should vanish to zero

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0. \qquad (C.6)$$

Now it is easy to prove that $k^2 = 0$ is the only physical solution of eq.(C.6) since one finds

$$\det\{-k^\mu k^\nu\} = 0.$$

Therefore, putting the solution of $k^2 = 0$ into eq.(C.4), we obtain

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \qquad (C.7)$$

which becomes the solution for the polarization vector. Here, we should note that this process of determining the condition on the wave function of ϵ^μ is just the same as solving the free Dirac equation. Obviously this is the most important process of determining the wave functions in quantum mechanics, and surprisingly, this has been missing in the treatment of determining not only the massive vector boson propagator but also the photon propagator as well.

This constraint equation of eq.(C.7) is obtained from the equation of motion, even though it is just the same equation as Lorentz gauge fixing condition. As can be seen by now, the gauge fixing condition is still left for use. In fact, if we take the Coulomb gauge fixing of $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$, then we find $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ which leads to the condition of $\epsilon_0 = 0$. Therefore, we now see that the photon field has only two degrees of freedom which can be naturally obtained from the equation of motion and the gauge fixing condition.

In addition, one realizes that the Lorentz gauge fixing is not allowed in the free field gauge theory since the same equation of the Lorentz gauge fixing is already obtained from the equation of motion. Namely, it cannot give a further constraint on the polarization vector. In this respect, one sees that the Coulomb gauge fixing gives a proper condition on the polarization vector.

C.2 Massive Vector Fields

The massive vector field can be treated just in the same manner as above. We first write the free Lagrangian density for the vector boson field Z^μ with its mass M

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 Z_\mu Z^\mu \qquad (C.8)$$

with $G^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$. In this case, the equation of motion becomes

$$\partial_\mu (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + M^2 Z^\nu = 0. \qquad (C.9)$$

Since the free massive boson field should have the following shape of the solution

$$Z^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\epsilon^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} \right] \qquad (C.10)$$

we can insert this solution into eq.(C.9) and obtain the following equation for the polarization vector ϵ^μ

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0. \qquad (C.11)$$

In the same way as above, we can prove that

$$k^2 - M^2 = 0$$

should hold, and this is the only physical solution of eq.(C.11). Therefore we obtain the following equation for the polarization vector ϵ^μ

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \qquad (C.12)$$

which should always hold. This is just the same equation as Lorentz gauge fixing condition in QED. However, there is no gauge freedom for the massive vector boson, and therefore the degrees of freedom of the polarization vector ϵ^μ for the massive vector boson is three, in contrast to the gauge field. Now, we understand that the massive vector field should have a spin of $s = 1$ which has indeed three components as we saw above. In this sense, the photon field is special in that it has a spin of $s = 1$ with only two degrees of freedom. This should be directly related to the massless nature of photon which is required from the gauge invariance of the Lagrangian density of the vector field.

付録D Basic Notations in Field Theory

In field theory, one often employs special notations which are by now commonly used. In this Appendix, we explain some of the notations which are particularly useful in field theory calculations.

D.1 Natural Units and Constants

Here, we employ the natural units because of its simplicity

$$c = 1, \quad \hbar = 1. \tag{D.1.1}$$

If one wishes to get the right dimensions out, one should use

$$\hbar c = 197.33 \ \text{MeV} \cdot \text{fm}. \tag{D.1.2}$$

For example, pion mass is $m_\pi \simeq 140$ **MeV/c²**. Its Compton wave length is

$$\frac{1}{m_\pi} = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} = \frac{197 \ \text{MeV} \cdot \ \text{fm}}{140 \ \text{MeV}} \simeq 1.4 \ \text{fm}.$$

Fine structure constant: $\alpha = e^2 = \dfrac{e^2}{\hbar c} = \dfrac{e^2}{4\pi} = \dfrac{e^2}{4\pi\hbar c} = \dfrac{1}{137.036}$.

Some constants:

$$\left(\begin{array}{ll} \textbf{Electron mass}: & m_e = 0.511 \ \ \text{MeV}/c^2 \\[2ex] \textbf{Muon mass}: & m_\mu = 105.66 \ \ \text{MeV}/c^2 \\[2ex] \textbf{Proton mass}: & M_p = 938.28 \ \ \text{MeV}/c^2 \\[2ex] \textbf{Bohr radius}: & a_0 = \dfrac{1}{m_e e^2} = 0.529 \times \ \ 10^{-8} \ \ \text{cm} \end{array} \right.$$

Gravitational constant: $G = 5.906 \times 10^{-39} \ \ \frac{1}{M_p^2}$

Weak coupling Constant: $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \ \ (\mathrm{GeV})^{-2}$

Magnetic moments :
$$\left(\begin{array}{lll} \textbf{Electron}: & \mu_e = 1.00115965219 & \dfrac{e\hbar}{2m_e c} \\ \textbf{Muon}: & \mu_\mu = 1.001165920 & \dfrac{e\hbar}{2m_\mu c} \end{array} \right.$$

Weak bosons :
$$\left\{ \begin{array}{l} W^{\pm} - \textbf{boson}: M_W = 80.4 \ \ \mathrm{GeV}/c^2, \quad \alpha_W \simeq 4.3 \times 10^{-3} \\ Z^0 - \textbf{boson} \ : \ M_z = 91.2 \ \ \mathrm{GeV}/c^2, \quad \alpha_Z \simeq 2.73 \times 10^{-3} \end{array} \right.$$

D.2 Hermite Conjugate and Complex Conjugate

For a complex c-number A

$$A = a + bi \ \ (a, b: \ \text{real}). \tag{D.2.1}$$

Its complex conjugate A^* **is defined as**

$$A^* = a - bi. \tag{D.2.2}$$

Matrix A

If A **is a matrix, one defines the hermite conjugate** $A^\dagger$

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}. \tag{D.2.3}$$

Differential Operator $\hat{A}$

If $\hat{A}$ **is a differential operator, then the hermite conjugate can be defined only when the Hilbert space and its scalar product are defined. For example, suppose** $\hat{A}$ **is written as**

$$\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{D.2.4}$$

In this case, its hermite conjugate $\hat{A}^\dagger$ becomes

$$\hat{A}^\dagger = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T = i\,\frac{\partial}{\partial x} = \hat{A} \qquad (D.2.5)$$

which means $\hat{A}$ is Hermitian. This can be easily seen in a concrete fashion since

$$\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(x) i\,\frac{\partial}{\partial x}\,\psi(x)\,dx = -i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\psi^\dagger(x)\right)\psi(x)\,dx = \langle\hat{A}\psi|\psi\rangle, \quad (D.2.6)$$

where $\psi(\pm\infty) = 0$ is assumed. The complex conjugate of $\hat{A}$ is simply

$$\hat{A}^* = -i\,\frac{\partial}{\partial x} \neq \hat{A}. \qquad (D.2.7)$$

Field ψ

If the $\psi(x)$ is a c-number field, then the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$ is just the same as the complex conjugate $\psi^*(x)$. However, when the field $\psi(x)$ is quantized, then one should always take the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$. When one takes the complex conjugate of the field as $\psi^*(x)$, one may examine the time reversal invariance.

D.3 Scalar and Vector Products (Three Dimensions) :

Scalar Product

For two vectors in three dimensions

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3) \qquad (D.3.1)$$

the scalar product is defined

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k \equiv x_k p_k, \qquad (D.3.2)$$

where, in the last step, we omit the summation notation if the index k is repeated twice.

Vector Product

The vector product is defined as

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv (x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1). \tag{D.3.3}$$

This can be rewritten in terms of components,

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k, \tag{D.3.4}$$

where ϵ_{ijk} denotes anti-symmetric symbol with

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, \quad \text{otherwise} = 0.$$

D.4 Scalar Product (Four Dimensions)

For two vectors in four dimensions,

$$x^\mu \equiv (t, x, y, z) = (x_0, \boldsymbol{r}), \quad p^\mu \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = (p_0, \boldsymbol{p}) \tag{D.4.1}$$

the scalar product is defined

$$x \cdot p \equiv Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} = x_0p_0 - x_kp_k. \tag{D.4.2}$$

This can be also written as

$$x_\mu p^\mu \equiv x_0p^0 + x_1p^1 + x_2p^2 + x_3p^3 = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} = x \cdot p, \tag{D.4.3}$$

where x_μ and p_μ are defined as

$$x_\mu \equiv (x_0, -\boldsymbol{r}), \quad p_\mu \equiv (p_0, -\boldsymbol{p}). \tag{D.4.4}$$

Here, the repeated indices of the Greek letters mean the four dimensional summation $\mu = 0, 1, 2, 3$. The repeated indices of the roman letters always denote the three dimensional summation throughout the text.

Metric Tensor

It is sometimes convenient to introduce the metric tensor $g^{\mu\nu}$ which has the following properties

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (D.4.5)$$

In this case, the scalar product can be rewritten as

$$x \cdot p = x^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}. \qquad (D.4.6)$$

D.5 Four Dimensional Derivatives ∂_μ

The derivative ∂_μ is introduced for convenience

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right), \qquad (D.5.1)$$

where the lower index has the positive space part. Therefore, the derivative ∂^μ becomes

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla} \right). \qquad (D.5.2)$$

D.5.1 $\hat{p}^\mu$ and Differential Operator

Since the operator $\hat{p}^\mu$ becomes a differential operator as

$$\hat{p}^\mu = (\hat{E}, \hat{\boldsymbol{p}}) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, \ -i\boldsymbol{\nabla} \right) = i\partial^\mu$$

the negative sign, therefore, appears in the space part. For example, if one defines the current j^μ in four dimension as

$$j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j}),$$

then the current conservation is written as

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{1}{i} \hat{p}_\mu j^\mu = 0. \qquad (D.5.3)$$

D.5.2 Laplacian and d'Alembertian Operators

The Laplacian and d'Alembertian operators, Δ and $\Box$ are defined as

$$\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

D.6 γ-Matrix

Here, we present explicit expressions of the γ-matrices in two and four dimensions. Before presenting the representation of the γ-matrices, we first give the explicit representation of Pauli matrices.

D.6.1 Pauli Matrix

Pauli matrices are given as

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (D.6.1)$$

Below we write some properties of the Pauli matrices.

Hermiticity

$$\sigma_1^\dagger = \sigma_1, \quad \sigma_2^\dagger = \sigma_2, \quad \sigma_3^\dagger = \sigma_3.$$

Complex Conjugate

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \sigma_2^* = -\sigma_2, \quad \sigma_3^* = \sigma_3.$$

Transposed

$$\sigma_1^T = \sigma_1, \quad \sigma_2^T = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \sigma_3 \quad (\sigma_k^T = \sigma_k^*).$$

Useful Relations

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{D.6.2}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{D.6.3}$$

D.6.2 Representation of γ-matrix

(a) Two dimensional representations of γ-matrices

Dirac : $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

Chiral : $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(b) Four dimensional representations of gamma matrices

Dirac : $\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Chiral : $\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

where $\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

D.6.3 Useful Relations of γ-Matrix

Here, we summarize some useful relations of the γ-matrices.

Anti-commutation relations

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0. \tag{D.6.4}$$

Hermiticity

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 \;\; (\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \;\; \gamma_k^\dagger = -\gamma_k), \qquad\qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \tag{D.6.5}$$

Complex Conjugate

$$\gamma_0^* = \gamma^0, \quad \gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2, \quad \gamma_3^* = \gamma_3, \qquad \gamma_5^* = \gamma_5. \tag{D.6.6}$$

Transposed

$$\gamma_\mu^T = \gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0, \quad \gamma_5^T = \gamma_5. \tag{D.6.7}$$

D.7 Transformation of State and Operator

When one transforms a quantum state $|\psi\rangle$ by a unitary transformation U which satisfies

$$U^\dagger U = 1$$

one writes the transformed state as

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \tag{D.7.1}$$

The unitarity is important since the norm must be conserved, that is,

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1.$$

In this case, an arbitrary operator $\mathcal{O}$ is transformed as

$$\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}. \tag{D.7.2}$$

This can be obtained since the expectation value of the operator $\mathcal{O}$ must be the same between two systems, that is,

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle. \tag{D.7.3}$$

Since

$$\langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger\mathcal{O}'U|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$$

one finds

$$U^\dagger\mathcal{O}'U = \mathcal{O}$$

which is just eq.(D.7.2).

D.8 Fermion Current

We summarize the fermion currents and their properties of the Lorentz transformation. We also give their nonrelativistic expressions since the basic behaviors must be kept in the nonrelativistic expressions. Here, the approximate expressions are obtained by making use of the plane wave solutions for the Dirac wave function.

$$\text{Fermion currents :} \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Scalar :} & \bar\psi\psi \simeq 1 \\ \text{Pseudoscalar :} & \bar\psi\gamma^5\psi \simeq \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m} \\ \text{Vector :} & \bar\psi\gamma^\mu\psi \simeq \left(1, \dfrac{\boldsymbol{p}}{m}\right) \\ \text{Axialvector :} & \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi \simeq \left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m}, \boldsymbol{\sigma}\right) \end{array} \right. \tag{D.8.1}$$

Therefore, under the parity $\hat P$ and time reversal $\hat T$ transformation, the currents behave

$$\text{Parity } \hat P \quad : \quad \left(\begin{array}{l} \bar\psi'\psi' = \bar\psi\hat P^{-1}\hat P\psi = \bar\psi\psi \\ \bar\psi'\gamma_5\psi' = \bar\psi\hat P^{-1}\gamma_5\hat P\psi = -\bar\psi\gamma_5\psi \\ \bar\psi'\gamma_k\psi' = \bar\psi\hat P^{-1}\gamma_k\hat P\psi = -\bar\psi\gamma_k\psi \\ \bar\psi'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar\psi\hat P^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat P\psi = \bar\psi\gamma_k\gamma_5\psi \end{array} \right. \tag{D.8.2}$$

$$\text{Time Reversal } \hat{T}: \begin{cases} \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\hat{T}\psi = \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_5\hat{T}\psi = \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi \end{cases} \qquad (D.8.3)$$

D.9 Trace in Physics

D.9.1 Definition

The trace of $N \times N$ matrix A is defined as

$$\text{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{N} A_{ii}. \qquad (D.9.1)$$

It is easy to prove

$$\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]. \qquad (D.9.2)$$

D.9.2 Trace in Quantum Mechanics

The trace of the Hamiltonian H becomes

$$\text{Tr}[H] = \text{Tr}[UHU^{-1}] = \sum_{n=1} E_n, \qquad (D.9.3)$$

where U is a unitary operator, and E_n denotes the energy eigenvalue of the Hamiltonian.

D.9.3 Trace in $SU(N)$

In $SU(N)$, the element U^a can be described in terms of the generator T^a

$$U^a = e^{i\alpha T^a} \qquad (D.9.4)$$

where the generator must be hermitian and traceless since

$$\det U^a = \exp\big(\text{Tr}\,[\ln U^a]\big) = \exp\big(i\alpha\,\text{Tr}\,[T^a]\big) = 1 \qquad (D.9.5a)$$

$$\mathrm{Tr}\,[T^a] = 0. \tag{$D.9.5b$}$$

The generators of $SU(N)$ group satisfy the following commutation relations

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c, \tag{$D.9.6$}$$

where C^{abc} denotes a structure constant. The generators are normalized such that

$$\mathrm{Tr}\,[T^aT^b] = \frac{1}{2}\,\delta^{ab}. \tag{$D.9.7$}$$

D.9.4 Trace of γ-Matrices and $\not{p}$

Trace of γ-matrices :

$$\mathrm{Tr}\,[1] = 4, \quad \mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu] = 0, \quad \mathrm{Tr}\,[\gamma_5] = 0. \tag{$D.9.8$}$$

Symbol $\not{p}$: $\quad \not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$

Useful Relations:

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \tag{$D.9.9$}$$

$$\not{p}\not{q} = p\cdot q - i\sigma_{\mu\nu}p^\mu q^\nu \tag{$D.9.10$}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not{p}\not{q}] = 4p\cdot q \tag{$D.9.11$}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5\not{p}\not{q}] = 0 \tag{$D.9.12$}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = 4\Big\{(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\Big\} \tag{$D.9.13$}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma^5\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = -4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\; p_1^\alpha\; p_2^\beta\; p_3^\gamma\; p_4^\delta \tag{$D.9.14$}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\gamma^5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5}\gamma_{\mu_6}] &= -4i\,[g_{\mu_1\mu_2}\varepsilon_{\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6} - g_{\mu_1\mu_3}\varepsilon_{\mu_2\mu_4\mu_5\mu_6} \\ &+ g_{\mu_2\mu_3}\varepsilon_{\mu_1\mu_4\mu_5\mu_6} + g_{\mu_4\mu_5}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_6} - g_{\mu_4\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_5\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}]\end{aligned} \tag{$D.9.15$}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_{\mu'} & \delta^\mu{}_{\nu'} & \delta^\mu{}_{\alpha'} & \delta^\mu{}_{\beta'} \\ \delta^\nu{}_{\mu'} & \delta^\nu{}_{\nu'} & \delta^\nu{}_{\alpha'} & \delta^\nu{}_{\beta'} \\ \delta^\alpha{}_{\mu'} & \delta^\alpha{}_{\nu'} & \delta^\alpha{}_{\alpha'} & \delta^\alpha{}_{\beta'} \\ \delta^\beta{}_{\mu'} & \delta^\beta{}_{\nu'} & \delta^\beta{}_{\alpha'} & \delta^\beta{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{$D.9.16$}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu'\alpha'\beta'} = -\begin{vmatrix} \delta^{\nu}{}_{\nu'} & \delta^{\nu}{}_{\alpha'} & \delta^{\nu}{}_{\beta'} \\ \delta^{\alpha}{}_{\nu'} & \delta^{\alpha}{}_{\alpha'} & \delta^{\alpha}{}_{\beta'} \\ \delta^{\beta}{}_{\nu'} & \delta^{\beta}{}_{\alpha'} & \delta^{\beta}{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{D.9.17}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = -2\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}{}_{\alpha'} & \delta^{\alpha}{}_{\beta'} \\ \delta^{\beta}{}_{\alpha'} & \delta^{\beta}{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{D.9.18}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta'} = -6\delta^{\beta}{}_{\beta'} \tag{D.9.19}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -24 \tag{D.9.20}$$

D.10 Lagrange Equation

In classical field theory, the equation of motion is most important, and it is derived from the Lagrange equation. Therefore, we review briefly how we can obtain the equation of motion from the Lagrangian density.

D.10.1 Lagrange Equation in Classical Mechanics

Before going to the field theory treatment, we first discuss the Lagrange equation (Newton equation) in classical mechanics. In order to obtain the Lagrange equation by the variational principle in classical mechanics, one starts from the action S as defined

$$S = \int L(q,\dot{q})\,dt, \tag{D.10.1}$$

where the Lagrangian $L(q,\dot{q})$ depends on the general coordinate q and its velocity $\dot{q}$. At the time of deriving equation of motion by the variational principle, q and $\dot{q}$ are independent as the function of t. This is clear since, in the action S, the functional dependence of $q(t)$ is unknown and therefore one cannot make any derivative of $q(t)$ with respect to time t. Once the equation of motion is established, then one can obtain $\dot{q}$ by time differentiation of $q(t)$ which is a solution of the equation of motion. The Lagrange equation can be obtained by requiring that the action S should be a minimum with respect to the variation of q and $\dot{q}$.

$$\delta S = \int \delta L(q,\dot{q})\,dt = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right) dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt = 0, \qquad (D.10.2)$$

where the surface terms should vanish. Thus one obtains the Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \qquad (D.10.3)$$

Hamiltonian in Classical Mechanics

The Lagrangian must be invariant under the infinitesimal time displacement ϵ of $q(t)$ as

$$q(t+\epsilon) \to q(t) + \dot{q}\epsilon, \quad \dot{q}(t+\epsilon) \to \dot{q}(t) + \ddot{q}\epsilon + \dot{q} \frac{d\epsilon}{dt}. \qquad (D.10.4)$$

Therefore, one finds

$$\delta L(q, \dot{q}) = L(q(t+\epsilon), \dot{q}(t+\epsilon)) - L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \frac{d\epsilon}{dt} = 0. \quad (D.10.5)$$

Since the surface term vanishes, one obtains

$$\delta L(q, \dot{q}) = \left[\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \right] \epsilon = \left[\frac{d}{dt} \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \right] \epsilon = 0 \qquad (D.10.6)$$

where the term in bracket is a conserved quantity, and thus the Hamiltonian H is defined as

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L. \qquad (D.10.7)$$

D.10.2 Lagrange Equation for Fields

The Lagrange equation for fields can be obtained almost in the same way as the particle case. For fields, we should start from the Lagrangian density $\mathcal{L}$ and the action is written as

$$S = \int \mathcal{L} \left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d^3 r \, dt, \qquad (D.10.8)$$

where $\psi(x)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ and $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$ are independent functional variables. Hereafter, we use the notation of $\dot{\psi}(x) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}$. The Lagrange equation can be obtained

by requiring that the action S should be a minimum with respect to the variation of ψ, $\dot{\psi}$ and $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$,

$$\delta S = \int \delta\mathcal{L}\left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) d^3r\, dt = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\,\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\,\delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})}\,\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\right) d^3r\, dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})}\right)\delta\psi\, d^3r\, dt = 0, \qquad (D.10.9)$$

where the surface terms are assumed to vanish. Therefore, one obtains

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial x_k})}\,, \qquad (D.10.10)$$

which can be expressed in the relativistic covariant way as

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right). \qquad (D.10.11)$$

D.11 Noether Current

If the Lagrangian density is invariant under the transformation of the field with a continuous variable, then there is always a conserved current associated with this symmetry. This is called *Noether current* **and can be derived from the invariance of the Lagrangian density and the Lagrange equation.**

D.11.1 Global Gauge Symmetry

The Lagrangian density which is discussed in this textbook should have the following functional dependence in general

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_I\left\{\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right\}$$

which is obviously invariant under the global gauge transformation

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \psi'^{\dagger} = e^{-i\alpha}\psi^{\dagger}, \qquad (D.11.1)$$

where α ia a real constant. Therefore, the Noether current is conserved in this system. To derive the Noether current conservation for the global

gauge transformation, one can consider the infinitesimal global transformation, that is, $|\alpha| \ll 1$

$$\psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = i\alpha\psi. \tag{D.11.2a}$$

$$\psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} + \delta\psi^{\dagger}, \quad \delta\psi^{\dagger} = -i\alpha\psi^{\dagger}. \tag{D.11.2b}$$

Invariance of Lagrangian Density

Now, it is easy to find

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi', \psi'^{\dagger}, \partial_\mu\psi', \partial_\mu\psi'^{\dagger}) - \mathcal{L}(\psi, \psi^{\dagger}, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^{\dagger}) = 0 \tag{D.11.3a}$$

which becomes

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\,\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\delta\left(\partial_\mu\psi\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\dagger}}\delta\psi^{\dagger} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\delta\left(\partial_\mu\psi^{\dagger}\right) \\ &= i\alpha\left[\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\partial_\mu\psi - \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\right)\psi^{\dagger} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\partial_\mu\psi^{\dagger}\right] \\ &= i\alpha\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\psi^{\dagger}\right] = 0\end{aligned} \tag{D.11.3b}$$

where the equation of motion for ψ **is employed.**

Current Conservation

Therefore, one defines the current j^μ **as**

$$j^\mu \equiv -i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\psi^{\dagger}\right] \tag{D.11.4}$$

and one has the current conservation

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{D.11.5}$$

For Dirac fields, one finds the conserved current

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{D.11.6}$$

D.11.2 Chiral Symmetry

When the Lagrangian density is invariant under the chiral transformation,

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{D.11.7}$$

then there is another Noether current. Here, $\delta\psi$ as defined in eq.(D.11.2) becomes

$$\delta\psi = i\alpha\gamma_5\psi. \tag{D.11.8}$$

Therefore, a corresponding conserved current for massless Dirac fields becomes

$$j_5^\mu = -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{D.11.9}$$

and we have

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0. \tag{D.11.10}$$

The conservation of the axial vector current holds for massless field theory models.

D.12 Hamiltonian Density

The Hamiltonian density $\mathcal{H}$ is constructed from the Lagrangian density $\mathcal{L}$. If the Lagrangian density is invariant under the translation a^μ, then there is a conserved quantity which is the energy momentum tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$. The Hamiltonian density is constructed from the energy momentum tensor of $\mathcal{T}^{00}$.

D.12.1 Hamiltonian Density from Energy Momentum Tensor

Now, the Lagrangian density is given as $\mathcal{L}\left(\psi_i, \partial_0\psi_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right)$. If one considers the following infinitesimal translation a^μ of the field ψ_i and $\psi_i^\dagger$

$$\psi_i' = \psi_i + \delta\psi_i, \quad \delta\psi_i = (\partial_\nu\psi_i)a^\nu,$$

$$\psi_i^{\dagger\prime} = \psi_i^\dagger + \delta\psi_i^\dagger, \quad \delta\psi_i^\dagger = (\partial_\nu\psi_i^\dagger)a^\nu,$$

then the Lagrangian density should be invariant

$$\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\psi_i', \partial_\mu\psi_i') - \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu\psi_i)$$

$$= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i}\,\delta\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\,\delta(\partial_\mu\psi_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i^\dagger}\,\delta\psi_i^\dagger + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)}\,\delta(\partial_\mu\psi_i^\dagger) \right] = 0. \qquad (D.12.1)$$

Making use of the Lagrange equation, one obtains

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i}\,(\partial_\nu\psi_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\,(\partial_\mu\partial_\nu\psi_i) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\,\partial_\nu\psi_i \right) \right] a^\nu$$

$$+ \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i^\dagger}\,(\partial_\nu\psi_i^\dagger) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)}\,(\partial_\mu\partial_\nu\psi_i^\dagger) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)}\,\partial_\nu\psi_i^\dagger \right) \right] a^\nu$$

$$= \partial_\mu \left[\mathcal{L}g^{\mu\nu} - \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\,\partial^\nu\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)}\,\partial^\nu\psi_i^\dagger \right) \right] a_\nu = 0. \qquad (D.12.2)$$

Energy Momentum Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$

Therefore, if one defines the energy momentum tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ by

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\,\partial^\nu\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i^\dagger)}\,\partial^\nu\psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \qquad (D.12.3)$$

then, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ is a conserved quantity, that is

$$\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0.$$

This leads to the definition of the Hamiltonian density $\mathcal{H}$ in terms of $\mathcal{T}^{00}$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{T}^{00} = \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_i)}\,\partial^0\psi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_i^\dagger)}\,\partial^0\psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L}. \qquad (D.12.4)$$

D.12.2 Hamiltonian Density for Free Dirac Fields

For a free Dirac field with its mass m, the Lagrangian density becomes

$$\mathcal{L} = \psi_i^\dagger\dot{\psi}_i + \psi_i^\dagger\left[i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\gamma^0\right]_{ij}\psi_j. \qquad (D.12.5)$$

Therefore, we find the Hamiltonian density as

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}^{00} = \bar{\psi}_i\left[-i\gamma_k\partial_k + m\right]_{ij}\psi_j = \bar{\psi}\left[-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\right]\psi. \qquad (D.12.6)$$

Hamiltonian for Free Dirac Fields

The Hamiltonian H is obtained by integrating the Hamiltonian density over all space

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3r = \int \bar{\psi}\, [-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m]\, \psi\, d^3r. \qquad (D.12.7)$$

In classical field theory, this Hamiltonian is not an operator but is just the field energy itself. However, this field energy cannot be evaluated unless one knows the shape of the field $\psi(x)$ itself. Therefore, one should determine the shape of the field $\psi(x)$ by the equation of motion in the classical field theory.

D.12.3 Role of Hamiltonian

The classical field Hamiltonian itself is not useful. This is similar to the classical mechanics case in which one has to derive the Hamilton equations in order to calculate physical properties of the system, and the Hamilton equations are equivalent to the Lagrange equations in classical mechanics.

Classical Field Theory

In classical field theory, the situation is just the same as the classical mechanics case. If one stays in the classical field theory, then one should derive the field equation from the Hamiltonian by the functional variational principle.

Quantized Field Theory

The Hamiltonian of the field theory becomes important when the fields are quantized. In this case, the Hamiltonian becomes an operator, and thus one has to solve the eigenvalue problem for the quantized Hamiltonian $\hat{H}$

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \qquad (D.12.8)$$

where $|\Psi\rangle$ is called *Fock state* and should be written in terms of the creation and annihilation operators of fermion and anti-fermion. The space spanned by the Fock states is called *Fock space*. In normal circumstances of the field theory models such as QED and QCD, it is practically impossible to find the eigenstate of the quantized Hamiltonian. The difficulty of the quantized field theory comes mainly from two reasons. Firstly, one has to construct the vacuum state which is composed of infinite many negative energy particles interacting with each other. The vacuum state should be the eigenstate of the Hamiltonian

$$\hat{H}|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle,$$

where E_Ω denotes the energy of the vacuum and it is in general infinity with the negative sign. The vacuum state $|\Omega\rangle$ is composed of infinitely many negative energy particles

$$|\Omega\rangle = \prod_{\boldsymbol{p},s} b^{\dagger(s)}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle\rangle,$$

where $|0\rangle\rangle$ denotes the null vacuum state. In the realistic calculations, the number of the negative energy particles must be set to a finite value, and this should be reasonable since physical observables should not depend on the deep negative energy particles.

D.13 Variational Principle in Hamiltonian

Now, one can derive the equation of motion by requiring that the Hamiltonian should be minimized with respect to the functional variation of the state $\psi(\boldsymbol{r})$.

D.13.1 Schrödinger Field

When one minimizes the Hamiltonian

$$H = \int \left[-\frac{1}{2m}\psi^\dagger \boldsymbol{\nabla}^2\psi + \psi^\dagger U\psi \right] d^3r \qquad (D.13.1)$$

with respect to $\psi(\boldsymbol{r})$, then one can obtain the static Schrödinger equation.

Functional Derivative

First, one defines the functional derivative for an arbitrary function $\psi_i(\boldsymbol{r})$ **by**

$$\frac{\delta\psi_i(\boldsymbol{r}')}{\delta\psi_j(\boldsymbol{r})} = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \qquad (D.13.2)$$

This is the most important equation for the functional derivative, and once one accepts this definition of the functional derivative, then one can evaluate the functional variation just in the same way as normal derivative of the function $\psi_i(\boldsymbol{r})$**.**

Functional Variation of Hamiltonian

For the condition on $\psi(\boldsymbol{r})$**, one requires that it should be normalized according to**

$$\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\, d^3r = 1. \qquad (D.13.3)$$

In order to minimize the Hamiltonian with the above condition, one can make use of the Lagrange multiplier and make a functional derivative of the following quantity with respect to $\psi^\dagger(\boldsymbol{r})$

$$H[\psi] = \int \left[-\frac{1}{2m}\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}'^2\psi(\boldsymbol{r}') + \psi^\dagger(\boldsymbol{r}')U\psi(\boldsymbol{r}')\right] d^3r'$$
$$-E\left(\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\, d^3r' - 1\right), \qquad (D.13.4)$$

where E **denotes a Lagrange multiplier and just a constant. In this case, one obtains**

$$\frac{\delta H[\psi]}{\delta\psi^\dagger(\boldsymbol{r})} = \int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left[-\frac{1}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}'^2\psi(\boldsymbol{r}') + U\psi(\boldsymbol{r}') - E\psi(\boldsymbol{r}')\right] d^3r' = 0. \qquad (D.13.5)$$

Therefore, one finds

$$-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\boldsymbol{r}) + U\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (D.13.6)$$

which is just the static Schrödinger equation.

D.13.2 Dirac Field

The Dirac equation for free field can be obtained by the variational principle of the Hamiltonian eq.(D.12.7). Below, we derive the static Dirac equation in a concrete fashion by the functional variation of the Hamiltonian.

Functional Variation of Hamiltonian

For the condition on $\psi_i(\boldsymbol{r})$, one requires that it should be normalized according to

$$\int \psi_i^\dagger \psi_i(\boldsymbol{r})\, d^3r = 1. \qquad (D.13.7)$$

Now, the Hamiltonian should be minimized with the condition of eq.(D.13.7)

$$H[\psi_i] = \int \psi_i^\dagger(\boldsymbol{r}) \left[-i(\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla})_{ij} + m(\gamma^0)_{ij} \right] \psi_j(\boldsymbol{r})\, d^3r$$
$$-E \left(\int \psi_i^\dagger(\boldsymbol{r}) \psi_i(\boldsymbol{r})\, d^3r - 1 \right), \qquad (D.13.8)$$

where E is just a constant of the Lagrange multiplier. By minimizing the Hamiltonian with respect to $\psi_i^\dagger(\boldsymbol{r})$, one obtains

$$(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta)\, \psi(\boldsymbol{r}) - E\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (D.13.9)$$

which is just the static Dirac equation for free field.

付 録E Wave Propagations in medium and vacuum

The classical wave such as sound can propagate through medium. However, it cannot propagate in vacuum as is well known. This is, of course, clear since the classical wave is the chain of the oscillations of the medium due to the pressure on the density.

On the other hand, quantum wave including photon can propagate in vacuum since it is a particle. Here, we clarify the difference in propagations between the classical wave and quantum wave. The most important point is that the classical wave should be always written in terms of real functions while photon or quantum wave should be described by the complex wave function of the shape e^{ikx} since it should be an eigenstate of the momentum.

This part is written as Appendix to the field theory text book "Fundamental problems in quantum field theory" published in Bentham publishers in 2013.

E.1 What is wave ?

The sound can propagate through medium such as air or water. The wave can be described in terms of the amplitude ϕ in one dimension

$$\phi(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \tag{E.1}$$

where ω and k denote the frequency and wave number, respectively. The dispersion relation of this wave can be written as

$$\omega = vk. \tag{E.2}$$

Here, it is important to note that the amplitude is written as the real function, in contrast to the free wave function of electron in quantum mechanics. In fact, the free wave of electron can be described in one dimension as

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\omega t - kx)} \tag{E.3}$$

which is a complex function. The electron can propagate by itself and there is no medium necessary for the electron motion.

What is the difference between the real wave amplitude and the complex wave function? Here, we clarify this point in a simple way though this does not contain any new physics.

E.1.1 A real wave function: Classical wave

If the amplitude is real such as (E.1), then it can only propagate in medium. This can be clearly seen since the energy of the wave can be transported in terms of the density oscillation which is a real as the physical quantity. In addition, the amplitude becomes zero at some point, and this is only possible when it corresponds to the oscillation of the medium. This means that the wave function of (E.1) has nothing to do with the probability of wave object. Instead, if it is the oscillation of the medium, then it is easy to understand why one finds the point where the amplitude vanishes to zero. The real amplitude is called a classical wave since it is indeed seen in the world of the classical physics.

E.1.2 A complex wave function: Quantum wave

On the other hand, the free wave function of electron is a complex function, and there is no point where it can vanish to zero. Since this is just the wave function of electron, its probability of finding the wave is always a constant $\frac{1}{V}$ at any space point of volume V.

E.2 Classical wave

The sound propagates in the air, and its propagation should be transported in terms of density wave. The amplitude of this wave can be written in terms of the real function as given in eq.(E.1). This is quite reasonable since the density wave should be described by the real physical quantity. Instead, this requires the existence of the medium (air), and the wave can propagate as long as the air exists. Here, we first write the basic wave equation in one dimension

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{E.4}$$

which is similar to the wave equation in quantum mechanics, though it is a real differential equation. Here, v denotes the speed of wave.

E.2.1 Classical waves carry their energy ?

In this case, a question may arise as to what is a physical quantity which is carried by the classical wave like sound. It seems natural that the wave carries its energy (or wave length). In fact, the transportation of the energy should be carried out by the compression of the density and successive oscillations of the medium. Therefore this is called compression wave.

E.2.2 Longitudinal and transverse waves

Here, we discuss the terminology of the longitudinal and transverse waves, even though one should not stress its physics too much since there is no special physical meaning.

• Longitudinal wave : The sound propagates as the compressional wave, and the oscillations should be always in the direction of the wave motion. In this case, it is called longitudinal wave. This wave can be easily understood since one can make a picture of the density wave.

• Transverse wave : On the other hand, if the motion of the oscillations is in the perpendicular to the direction of the wave motion, then it is called transverse wave. The tidal wave may be the transverse wave, but its description may not be very simple since the density change may not directly be related to the wave itself.

E.3 Quantum wave

Photon and quantum wave are quite different from the classical wave, and the quantum wave is a particle motion itself. No medium oscillation is involved. For example, a free electron moves with the velocity v in vacuum, and this motion is also called "wave". The reason why we call it wave is due to the fact that the equation of motion that describes electrons looks similar to the classical wave equation of motion. Further, the solution of the wave equation can be described as e^{ikx}, and thus it is the same as the wave behavior in terms of mathematics. But the physical meaning is completely different from the classical wave, and quantum wave is just the particle motion which behaves as the probabilistic motion.

E.3.1 Quantum wave (electron motion)

The wave function of a free electron in one dimension can be described as

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{E.5}$$

which is a solution of the Schrödinger equation of a free electron,

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi \tag{E.6}$$

where $k = \sqrt{2m\omega}$, and V denotes the corresponding volume. Since the Schrödinger equation is quite similar to the wave equation in a classical sense, one calls the solution of the Schrödinger equation as a wave. However, the physics of the quantum wave should be understood in terms of the quantum mechanics, and the relation to the classical wave should not be stressed. That is, the quantum wave is completely different from the classical wave, and one should treat the quantum wave as it is. In addition, the behavior and physics of the classical wave are very complicated and it is clear that we do not fully understand the behavior of the classical wave since it involves many body problems in physics.

E.3.2 Photon

The electromagnetic wave is called photon which behaves like a particle and also like a wave. This photon can propagate in vacuum and thus it should be considered to be a particle. Photon can be described by the vector potential $\boldsymbol{A}$.

• $\boldsymbol{A}$ is real ! : However, this $\boldsymbol{A}$ is obviously a real function, and therefore, it cannot propagate like a particle. This can be easily seen since the free Hamiltonian of photon commutes with the momentum operator $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$, and therefore it can be a simultaneous eigenstate of the Hamiltonian. Thus, the $\boldsymbol{A}$ should be an eigenstate of the momentum operator since the free state must be an eigenstate of momentum. However, any real function cannot be an eigenstate of the momentum operator, and thus the vector field in its present shape cannot describe the free particle state.

• Free solution of vector field : What should we do ? The only way of solving this puzzle is to quantize a photon field. First, the solution of $\boldsymbol{A}$ can be written as

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right) \tag{E.7}$$

with $kx \equiv \omega_k t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$. Here, $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ denotes the polarization vector which will be discussed later more in detail. As one sees, the vector field is indeed a real function.

• Quantization of vector field : Now we impose the following quantization conditions on $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ and $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$

$$[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \tag{E.8}$$

$$[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = 0, \qquad [c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = 0. \tag{E.9}$$

In this case, $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$, $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ become operators. Therefore, one should now consider the Fock space on which they can operate. This can be defined as

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle &= 0 && \text{(E.10)} \\ c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle &= |\boldsymbol{k},\lambda\rangle && \text{(E.11)} \end{aligned}$$

where $|0\rangle$ denotes the vacuum state of the photon field. Therefore, if one operates the vector field on the vacuum state, then one obtains

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx}. \tag{E.12}$$

As one sees, this new state is indeed the eigenstate of the momentum operator and should correspond to the observables. Therefore, photon can be described only after the vector field is quantized. Thus, photon is a particle whose dispersion relation becomes

$$\omega_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|. \tag{E.13}$$

E.4 Polarization vector of photon

Until recently, there is a serious misunderstanding for the polarization vector $\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}$. This is related to the fact that the equation of motion for the polarization vector is not solved, and thus there is one condition missing in the determination of the polarization vector.

E.4.1 Equation of motion for polarization vector

Now the equation of motion for $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ without any source terms can be written from the Lagrange equation as

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{E.14}$$

where $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. This can be rewritten as

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{E.15}$$

Now, the shape of the solution of this equation can be given as

$$A^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda} \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{E.16}$$

and thus we insert it into eq.(E.15) and obtain

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0. \tag{E.17}$$

Now the condition that there should exist non-zero solution of $\epsilon^\mu_{\boldsymbol{k},\lambda}$ is obviously that the determinant of the matrix in the above equation should vanish to zero, namely

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0. \tag{E.18}$$

This leads to $k^2 = 0$, which means $k_0 \equiv \omega_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|$. This is indeed a proper dispersion relation for photon.

E.4.2 Condition from equation of motion

Now we insert the condition of $k^2 = 0$ into eq.(E.17), and obtain

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{E.19}$$

which is a new constraint equation obtained from the basic equation of motion. Therefore, this condition (we call it "Lorentz condition") is most fundamental. It should be noted that the Lorentz gauge fixing is just the same as eq.(E.19). This means that the Lorentz gauge fixing is improper and forbidden for the case of no source term. In this sense, the best gauge fixing should be the Coulomb gauge fixing

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0 \tag{E.20}$$

from which one finds $\epsilon_0 = 0$, and this is indeed consistent with experiment.

• Number of freedom of polarization vector : **Now we can understand the number of degree of freedom of the polarization vector. The Lorentz condition $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ should give one constraint on the polarization vector,**

and the Coulomb gauge fixing $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=0$ gives another constraint. Therefore, the polarization vector has only two degrees of freedom, which is indeed an experimental fact.

• State vector of photon : The state vector of photon is already discussed. But here we should rewrite it again. This is written as

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}(x)|0\rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}}e^{-ikx}. \tag{E.21}$$

In this case, the polarization vector $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ has two components, and satisfies the following conditions

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0. \tag{E.22}$$

E.4.3 Photon is a transverse wave ?

People often use the terminology of transverse photon. Is it a correct expression ? By now, one can understand that the quantum wave is a particle motion, and thus it has nothing to do with the oscillation of the medium. Therefore, it is meaningless to claim that photon is a transverse wave. The reason of this terminology may well come from the polarization vector $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ which is orthogonal to the direction of photon momentum. However, as one can see, the polarization vector is an intrinsic property of photon, and it does not depend on space coordinates.

• No rest frame of photon ! : In addition, there is no rest frame of photon, and therefore, one cannot discuss its intrinsic property unless one fixes the frame. Even if one says that the polarization vector is orthogonal to the direction of the photon momentum, one has to be careful in which frame one discusses this property.

In this respect, it should be difficult to claim that photon behaves like a transverse wave. Therefore, one sees that photon should be described as a massless particle which has two degrees of freedom with the behavior of a boson. There is no correspondence between classical waves and photon, and even more, there is no necessity of making analogy of photon with the classical waves.

E.5 Poynting vector and radiation

We have clarified that the propagation of the real function requires some medium which can make oscillations. Here, we discuss the Poynting vector how it appears in physics, and show that it cannot propagate in vacuum at all. Also, we present a brief description of the basic radiation mechanism how photon can be emitted.

E.5.1 Field energy and radiation of photon

Before discussing the propagation of the Poynting vector, we should first discuss the mechanism of the radiation of photon in terms of classical electrodynamics. The interaction Hamiltonian can be written as

$$H_I = -\int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \, d^3r \tag{E.23}$$

which should be a starting point of all the discussions. Now, we make a time derivative of the interaction Hamiltonian and obtain

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = -\int \left[\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right] d^3r. \tag{E.24}$$

Since we can safely set $A^0 = 0$ in this treatment, we find

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{E.25}$$

Therefore, we can rewrite eq.(E.24) as

$$W = \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \, d^3r - \int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{A} \, d^3r. \tag{E.26}$$

Defining the first term of eq.(E.24) as W_E, we can rewrite W_E as

$$W_E \equiv \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \, d^3r = -\frac{d}{dt} \left[\int \left(\frac{1}{2\mu_0} |\boldsymbol{B}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\boldsymbol{E}|^2 \right) d^3r \right] - \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} \, d^3r \tag{E.27}$$

which is just the energy of electromagnetic fields.

E.5.2 Poynting vector

Here, the last term of eq.(E.27) is Poynting vector $\boldsymbol{S}$ as defined by

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{E.28}$$

which is connected to the energy flow of the electromagnetic field. This Poynting vector is a conserved quantity, and thus it has nothing to do with the electromagnetic wave. In addition, it is a real quantity, and thus there is no way that it can propagate in vacuum. In addition, the Poynting vector cannot be a target of the field quantization, and thus it always remains classical since it is written in terms of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{B}$. However, there is still some misunderstanding in some of the textbooks on Electromagnetism, and therefore, one should be careful for the treatment of the Poynting vector.

• Exercise problem: Here, we present a simple exercise problem of circuit with condenser with C (disk radius of a and distance of d) and resistance with R. The electric potential difference V is set on the circuit. In this case, the equation for the circuit can be written as

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

This can be easily solved with the initial condition of $Q = 0$ at $t = 0$, and the solution becomes

$$Q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Therefore, the electric current J becomes

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

In this case, we find the electric field $\boldsymbol{E}$ and the displacement current $\boldsymbol{j}_d$

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{E.29}$$

$$\boldsymbol{j}_d = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{V}{R\pi a^2}e^{-\frac{t}{RC}}\boldsymbol{e}_z. \tag{E.30}$$

Thus, the magnetic field $\boldsymbol{B}$ becomes

$$\boldsymbol{B} = \frac{i_d\, r}{2}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{r}{2\pi a^2 R}\ e^{-\frac{t}{RC}}\ \boldsymbol{e}_\theta$$

where $\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 i_d \pi r^2$ is used. Therefore, the Poynting vector at the surface (with $r = a$) of the cylindrical space of the disk condenser becomes

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = -\frac{V^2}{2\pi a R d}\; e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \boldsymbol{e}_r .$$

It should be noted that the energy in the Poynting vector is always flowing into the cylindrical space. Therefore, the electric field energy is now accumlated in the cylindrical space. There is, of course, no electromagnetic wave radiation, and in fact, the Poynting vector is the flow of field energy, and has nothing to do with the electromagnetic wave.

E.5.3 Emission of photon

The emission of photon should come from the second term of eq.(E.26) which can be defined as W_R and thus

$$W_R = -\int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{A}\, d^3r. \tag{E.31}$$

In this case, we can calculate the $\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}$ term by employing the Zeeman effect Hamiltonian with a uniform magnetic field of $\boldsymbol{B}_0$

$$H_Z = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}_0. \tag{E.32}$$

The relevant Schrödinger equation for electron with its mass m_e becomes

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}_0\, \psi. \tag{E.33}$$

Therefore, we find

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e}{m_e}\left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\hat{\boldsymbol{p}}\psi + \psi^\dagger \hat{\boldsymbol{p}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] = -\frac{e^2}{2m_e^2}\boldsymbol{\nabla} B_0(\boldsymbol{r}). \tag{E.34}$$

In order to obtain the photon emission, one should quantize the field $\boldsymbol{A}$ in eq.(E.31).

• Field quantization : The field quantization in electromagnetic interactions can be done only for the vector potential $\boldsymbol{A}$. The electric field $\boldsymbol{E}$ and the magnetic field $\boldsymbol{B}$ are classical quantities which are defined before the field quantization.

E.6 Gravitational wave

People often discuss the gravitational wave which is supposed to come from the Einstein equation. In this case, one sees that the equation for the metric tensor is all real, and thus the solution of this equation must be also real. Therefore, the gravitational wave, if at all exists, is a real function, and thus it cannot propagate in vacuum unless one believes the

aether hypothesis.

• No quantization of gravity : In addition, there is no physical meaning to quantize the metric tensor and therefore, there is no chance that the gravitational wave propagates in vacuum.

E.6.1 General relativity

Since we treat the gravitational wave, we should make a comment on the general relativity. Einstein invented the general relativity which is the second order differential equation for the metric tensor $g^{\mu\nu}$. A question may arise as to why the general relativity can be related to the gravitational theory. This reason is simply because Einstein claimed that he had proved the gravitational Poisson equation should be derived from the general relativity at the weak gravitational limit. However, in his proof, he assumed the following strange equation

$$g^{00} \simeq 1 + 2\phi \tag{E.35}$$

where ϕ denotes the gravitational field. Because of this equation (E.35), he could derive the gravitational Poisson equation

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r}) \tag{E.36}$$

where G and ρ denote the gravitational constant and the density, respectively.

• Eq.(E.35) is correct ? : Here, we show that eq.(E.35) is not only strange but simply incorrect. In order to do so, we should examine the physical meaning of the equation $g^{00} \simeq 1 + 2\phi$. We should notice that 1 (unity) in the right hand side of eq.(E.35) is a simple number. This is clear since the metric tensor is just the coordinate system itself. However, the gravitational field ϕ is a dynamical variable, and therefore this summation of two different categories is simply meaningless.

• No connection between general relativity and gravity : By now it should be clear that the general relativity has nothing to do with gravity. It is a theory for the coordinate system (metric tensor), but it is not a theory for nature.

Note :
The new gravitational theory is explained in detail in Chapter 6 in the text book of
"Fundamental problems in quantum field theory" .

Reference :

Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

関連図書

[1] K. Nishijima, "Fields and Particles", (W.A. Benjamin, INC, 1969)

[2] S.L. Adler, "Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics," Phys. Rev. vol. 177, pp. 2426−2438, Jan. 1969.

[3] T. Fujita and N. Kanda, "Fundamental Problems in Quantum Field Theory" (Bentham Publishers, 2013)

[4] M. Matsuda, "Exact Evaluation of Triangle Diagrams", APIT-A-2023-001

[5] L. D. Landau, Dokl. Akad. Nawk., USSR vol. 60, pp. 207, 1948.

[6] C. N. Yang, "Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons," Phys. Rev. vol. 77, pp. 242−245, Jan. 1950.

[7] A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie," Annalen der Physik vol. 49, pp. 769−822, März. 1916.

[8] Dirac, AIP Conference Proceedings 74, 129 (1981)

[9] R.P. Feynman, "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics," Phys. Rev. vol. 76, pp. 769−789, Sep. 1949.

[10] G. 't Hooft and M. Veltman, "Regularization and renormalization of gauge fields," Nucl. Phys. B. vol. 44, pp. 189−213, 1972.

[11] R. Feynman and M. Gell-Mann, "Theory of the Fermi Interaction," Phys. Rev. vol. 109, pp. 193−198, Jan. 1958.

[12] A. Salam, In Elementary particle physics (Nobel Symposium No. 8), Ed. N. Svartholm; Almqvist and Wilsell, Stockholm (1968)

[13] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” Phys. Rev. Lett. vol. 19, pp. 1264–1266, Nov. 1967.

[14] P.W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” Phys. Lett. vol. 12, pp. 132–133, Sep. 1964.

[15] M. Matsuda, T. Sakamoto and T. Fujita “Electromagnetic Interaction of Complex Scalar Fields”, APIT-A-2022-001

[16] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I,” Phys. Rev. vol. 122, pp. 345–358, Apr. 1961.

[18] N.N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) 11, 23 (1947)

[19] W. Thirring, Ann. Phys. (N.Y) 3, 91 (1958)

[20] T. Fujita, M. Hiramoto, T. Homma and H. Takahashi, “New Vacuum of Bethe Ansatz Solutions in Thirring Model,” J. Phys. Soc. Japan vol. 74, pp. 1143–1149, Jan. 2005.

[21] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[22] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[23] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, ”Relativistic Quantum Theory”, (Pergamon Press, 1974)

[24] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Fields”, (McGraw-Hill Book Company,1965)

[25] J. Schwinger, “Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation,” Phys. Rev. vol. 74, pp. 1439–1461, Nov. 1948.

[26] S. Tomonaga, "On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields," Prog. Theor. Phys. vol. 1, pp. 27–42, Aug-Sept. 1946.

[27] G. 't Hooft and M. Veltman, "Combinatorics of gauge fields," Nucl. Phys. B. vol. 50, pp. 318–353, 1972.

[28] T. Fujita, N. Kanda, H. Kato, H. Kubo, Y. Munakata, S. Oshima and K. Tsuda, "New Renormalization Scheme of Vacuum Polarization in QED", arXiv:0901.3421

[29] W. Pauli and F. Villars, "On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory," Rev. Mod. Phys. vol. 21, pp. 434–444, Sep. 1949.

[30] J.C. Ward, "An Identity in Quantum Electrodynamics," Phys. Rev. vol. 78, pp. 182–182, Apr. 1950.

[31] N. Kanda, "Light-Light Scattering", hep-ph/1106.0592

[32] F. Mandl and G. Shaw, "Quantum Field Theory", (John Wiley & Sons, 1993)

[33] T. Fujita and N. Kanda, "A Proposal to Measure Photon-Photon Scattering", hep-ph/1106.0465

[34] H. Euler, " Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracshen Theorie," Annalen der Physik 1936; 26: 398–448.

[35] W. Heisenberg, "Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons," Zeits. f. Physik. vol. 90, pp. 209–231, Juni. 1934.

[36] W. Heisenberg and H. Euler, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons," Zeits. f. Physik vol. 98, pp. 714–732, Dezember 1935.

[37] R. Karplus and M. Neuman, "The Scattering of Light by Light," Phys. Rev. vol. 83, pp. 776–784, Aug. 1951.

[38] T. Fujita and N. Kanda, "Tomonaga's Conjecture on Photon Self-Energy", physics.gen-ph/1102.2974

[39] F. Moulin, D. Bernard, and F. Amiranoff, "Photon-photon elastic scattering in the visible domain," Z. Phys. C. vol. 72, pp. 607−611, 1996.

[40] D. Bernard, F. Moulin, F. Amirano, A. Braun4, J.P. Chambaret, G. Darpentigny, G. Grillon, S. Ranc, and F. Perrone, "Search for stimulated photon-photon scattering in vacuum," Eur. Phys. J. D. vol. 10, pp. 141−145, 2000.

[41] I. Larin et al. , "New Measurement of the π^0 Radiative Decay Width," Phys. Rev. Lett. vol. 106, 162303, Apr. 2011.

[42] C. Itzykson and J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", (McGraw-Hill, 1980)

[43] N. Kanda, R. Abe, T. Fujita and H. Tsuda, "Z^0 decay into two photons", hep-ph/1109.0926

[44] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Physics Letters B vol. 667, pp. 1, 2008.

[45] J. Schwinger, "Gauge Invariance and Mass. II," Phys. Rev. vol. 128, pp. 2425−2429, Dec. 1962.

[46] N. S. Manton, "The Schwinger Model and Its Axial Anomaly," Ann. Phys. vol. 159, pp. 220−251, 1985.

[47] C.N. Yang and R.L. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance," Phys. Rev. vol. 96, pp. 191−195, Oct. 1954.

[48] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Cote, P. Pires, and R. de Tourreil, "Parametrization of the Paris N-N potential," Phys. Rev. C. vol. 21, pp. 861−873, Mar. 1980.

[49] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Cote, P. Pires, and R. de Tourreil, "Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential," Phys. Lett. B. vol. 101, pp. 139−140, May. 1981.

[50] R. Machleidt, K. Holinde, and Ch. Elster, "The bonn meson-exchange model for the nucleon?nucleon interaction," Phys. Rep. vol. 149, pp. 1–89, May. 1987.

[51] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. 1989; 19: 189.

[52] A. Bohr and B.R. Mottelson, "Nuclear Structure" (Vol. 1), (World Scientific,1998)

[53] D. Kiang, M.A. Preston and P. Tip, "One-Boson-Exchange Potential and Nuclear Matter," Phys. Rev. vol. 170, pp. 907–915, Jun. 1968.

[54] R.D. Haracz and R.D. Sharma, "Two-Boson-Exchange Effects in Nucleon-Nucleon Scattering," Phys. Rev. vol. 176, pp. 2013–2018, Dec. 1968.

[55] M.H. Partovi and E.L. Lomon, "Field-Theoretical Nucleon-Nucleon Potential," Phys. Rev. D. vol. 2, pp. 1999–2032, Nov. 1970.

[56] W.R. Wortman, "Two-Pion-Exchange Contributions to Nucleon-Nucleon Scattering," Phys. Rev. vol. 176, pp. 1762–1768, Dec. 1968.

[57] F. Gross, "Relativistic quantum mechanics and field theory", (John Wiley & Sons, 1993)

[58] T. Fujita, N. Kanda and S. Oshima, "Nuclear Potential with Two Pion Exchange", arXiv:1209.3067

[59] T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi, "Boson after symmetry breaking in quantum field theory", in *Focus on Boson Research* (Nova Science Publisher, 2005)

[60] T. Fujita, N. Kanda and H. Tsuda, "Higgs Mechanism and New Propagator of Massive Vector Bosons," J. Mod. Phys. vol. 3, pp. 619–624, Jul. 2012.

[61] J. Goldstone, Nuovo Cimento vol. 19, pp. 154, 1961.

[62] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, "Broken Symmetries," Phys. Rev. vol. 127, pp. 965–970, Aug. 1962.

[63] T. Fujita, T. Kobayashi, M. Hiramoto, H. Takahashi, “Non-equivalence between Heisenberg XXZ spin chain and Thirring model,” Eur. Phys. J. C. vol. 39, pp. 511−518, Jan. 2005.

[64] S.L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions,” Nucl. Phys. vol. 22, pp. 579−588, Feb. 1961.

[65] T. Fujita and N. Kanda, “No Anomaly and New Renormalization Scheme,” J. Mod. Phys. vol. 3, pp. 665−681, Aug. 2012.

[66] T. Fujita, A. Kusaka, K. Tsuda and S. Oshima, “Unphysical Gauge Fixing in Higgs Mechanism”, arXiv:0806.2957

[67] T. Fujita, “Physical observables in gauge field theory” in *New Fundamentals in Fields and Particles*, Transworld Research Network (2009), p.1−p.20

[68] E. Fermi, ”Elementary Particles”, (Yale University Press, New Haven, 1951)

[69] S.S Gershtein and J.B. Zeldovich, JETP vol. 2, pp. 576, 1955.

[70] T.D. Lee and C.N. Yang, “Question of Parity Conservation in Weak Interactions,” Phys. Rev. vol. 104, pp. 254−258, Oct. 1956.

[71] C.S. Wu, “Parity Experiments in Beta Decays,” Rev. Mod. Phys. vol. 31, pp. 783−790, 1959.

[72] T. Fujita, “Physical observables in path integral formulation”, in *New Fundamentals in Fields and Particles*, Transworld Research Network (2009), p.31−p.45

[73] T. Fujita, “Quantum Gravity without General Relativity”, arXiv:0804.2518

[74] S. Kanemaki, A. Kusaka, S. Oshima and T. Fujita, “Problems of scalar bosons”, in *New Fundamentals in Fields and Particles*, ed. by T. Fujita, Transworld Research Network (2009), p.47−p.60

[75] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, “Gravitation” (Freeman, 1973)

[76] T. Fujita and N. Kanda, "Novel Solution of Mercury Perihelion Shift", physics.gen-ph/0911.2086

[77] T. B. Bahder, "Relativity of GPS measurement," Phys. Rev. D. vol. 68, 063005, Sep. 2003.

[78] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, eds., Global Positioning System, Progress in Astronautics and Aeronautics, 163, 164 (1996)

[79] T. Fujita and N. Kanda, "Physics of Leap Second", physics.gen-ph/0911.2087

[80] T. Fujita and S. Oshima, "Electric dipole moments of neutron-odd nuclei ," J. Phys. G. vol. 39, pp. 095106(6pp), Jul. 2012.

[81] K. Muto, "Time reversal invariance and EDM in atomic system", in *New Fundamentals in Fields and Particles*, ed. by T. Fujita, Transworld Research Network (2008), p.119−p.155

[82] S. Oshima, "Electric dipole moments (EDM) of ionic atoms," Phys. Rev. C. vol. 81, pp. 038501(4pp), Mar. 2010.

[83] P. G. Harris, C. A. Baker, K. Green, P. Iaydjiev, S. Ivanov, D. J. R. May, J. M. Pendlebury, D. Shiers, K. F. Smith, M. van der Grinten and P. Geltenbort, "New Experimental Limit on the Electric Dipole Moment of the Neutron," Phys. Rev. Lett. vol 82, pp. 904−907, Sep. 1999.

[84] K. F. Smith, N. Crampin, J. M. Pendlebury, D. J. Richardson, D. Shiers, K. Green, A. I. Kilvington, J. Moir, H. B. Prosper and, D. Thompson, N. F. Ramsey, B. R. Heckel and, S. K. Lamoreaux, P. Ageron and, W. Mampe and A. Steyerl, "A search for the electric dipole moment of the neutron," Phys. Lett. B. vol. 234 pp. 191−196, Jan. 1990.

[85] M. Kobayashi and T. Maskawa, "CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction," Prog. Theor. Phys. vol. 49 pp. 652−657, 1973.

[86] E.P. Shabalin, Sov. J. Nucl. Phys. vol. 28, pp. 75, 1978.

[87] E.P. Shabalin, Sov. J. Nucl. Phys. vol. 31, pp. 864, 1980.

[88] T.P. Cheng and L.F. Li, "Guage Theory of Elementary Particle Physics", (Oxford University Press, 1988)

[89] H.A. Bethe, "The Electromagnetic Shift of Energy Levels," Phys. Rev. vol. 72, pp. 339−341, Aug. 1947.

[90] M.I. Eides, H. Grotch and V.A. Shelyuto, "Theory of light hydrogen-like atoms," Phys. Rep. vol. 342, pp. 63−261, Feb. 2001.

[91] E.A. Uehling, "Polarization Effects in the Positron Theory," Phys. Rev., vol. 48, pp. 55−63, Jul. 1935.

[92] R. Pohl et al. , "The size of the proton ," Nature Letters vol. 466, pp. 213−217, Jul. 2010.

[93] T. Sakamoto, T. Fujita, N. Kanda, H. Kato and K. Tsuda, "A Puzzle of Lamb Shifts in Muonic Hydrogen", to be published

[94] K.A. Woodle, A. Badertscher, V.W. Hughes, D.C. Lu, M. W. Ritter, M. Gladisch, H. Orth, G. zu Putlitz, M. Eckhause, J. Kane and F.G. Mariam, "Measurement of the Lamb shift in the n = 2 state of muonium," Phys. Rev. A. vol. 41, pp. 93−105, Jan. 1990.