何故、一般相対論は無意味か？

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

自然を理解したい！

この小ノートは『理論物理の間違い連鎖』の第２章を抜粋したものである。これまで長い間、一般相対論と言う全く無意味な理論に多くの人々が振り回され、そして貴重な時間を無駄に費やしてきたものである。恐らく、この一番大きな原因は Einstein が『物理学の nonprofessional』であったにもかかわらず有名人になってしまったため、その発信力が無用に増大してしまったと言う事であろう。さらに言えば、その後、この訳の分からない理論を翻訳して、それを人々に伝え続けてきた物理学者達の責任も見過ごせない程、重いと言えよう。職人的な物理屋は自分が理解できない事を他人に教えると言う事は決してしないものだが、職人的でない物理学者は自分が理解できていなくてもそれを適当に脚色しながら解説書を書くものである。このため、読者はそれを読んでもさっぱりわからないものだが、解説している職人的でない物理学者は翻訳しているだけだから悠然たるものである。

『力学の上達法』のところですでに解説してあるが、第２，３章では水星の近日点移動に関連した物理をまとめて入れてある。近日点移動は１周期において生じる現象ではない事が証明されているが、他の惑星による影響は１００年平均で確かに観測されているし、理論計算でも有限値で求められている。

物理は自然現象を理解しようとする学問であり、そしてそれが全てである。その自然現象の基礎的な部分は『場の理論』によって正確に記述され、理解されている。自然現象を理解する上での理論上の困難さは全て『多体問題』の難しさにある。古典力学の範囲においても、乱気流の問題はどうにもならない難しさである。また、生物を電子の言葉で量子論的に理解しようとするとほとんど絶望的に難しいものである。しかし何とか、少しずつでも進歩して行く事が今後の重要な方向となっている。

目 次

第1章　Einstein の一般相対論

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

1.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

1.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

1.1.2　Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

1.1.3　Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{1.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.4}$$

としている．この時，$dx^\mu,\ dx_\mu$ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{1.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

1.2　一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (1.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

1.2.1　$(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが， $(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

1.2.2　$(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

1.2.3　$g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (1.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

1.3　一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [1]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (1.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

1.4　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

第2章　力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである．その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果をある程度は内包している．この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である．

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である．この速度 v は約 $v \simeq 10^{-4}c$ である．従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ である．よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期 (１年) が約 $\pi \times 10^7$ 秒である事から，これまでの Newton 力学における周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる．

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう．しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである．

2.1　重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている [2]．従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{2.1}$$

と求まっている．右辺の第２項が新しい重力ポテンシャルの補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を

含めた様々な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているので，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

2.1.1 非可積分ポテンシャル

式 (2.1) の第２項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている．かって，カオスの理論が流行していた時があったが，その頃，この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった．この場合，非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた．従って，この取り扱いには十分な注意が必要である．

非可積分ポテンシャル $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ がある場合，厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう．ここではこの問題を詳しく見て行こう．まず式 (2.1) で与えられるポテンシャル問題を解くと，その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{2.2}$$

となっている．この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり，何か特別な事を考える必要があると言うわけではない．但し，定数の修正はあり，ここでは A_g と L_g がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{2.3}$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}} \equiv \ell\sqrt{1+\eta} \simeq \ell\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \tag{2.4}$$

と定義されている．但し, η は

$$\eta \equiv \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{2.5}$$

である．

2.1.2　軌道の式がデカルト座標に戻せない！

軌道を与える式 (2.2) には明らかに問題がある．まず，一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) \tag{2.6}$$

を見てみよう．この場合，この式はデカルト座標

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{2.7}$$

で表す事が出来ない．実際，$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ 項は

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r}\cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r}\sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \tag{2.8}$$

としてみると分かるように，デカルト座標では表現不能である．元々はデカルト座標から出発しているので，これは深刻な問題である．

2.1.3　軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある．軌道の解である式 (2.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon\cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である．これは軌道 r が $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ でどうなっているのかを見れば良くわかるものである．すなわち，

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0 \tag{2.9}$$

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\pi\eta}, \qquad \varphi = 2\pi \tag{2.10}$$

となっているため，同じ点で軌道に飛びがある．この差を Δr とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \tag{2.11}$$

となっている．但しこれは水星の場合である．これは勿論，自然界では起こってはならない現象である．

2.1.4　軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが，一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである．しかも，観測値と理論値が３桁近くも一致していたと言う主張であった．これは，一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が，実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう．

さらに言えば，水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には１００年間の水星近日点シフト値として求められたものである．この場合，水星近日点シフトの観測値から，木星などの影響を考慮した計算値を差っ引く必要があったのである．ところが，木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて，またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている．その意味で，これらの計算を自分で実行すれば，この計算値には不透明な部分が相当あり，到底，信頼できる計算ではない事が分かるものである．

物理屋として自然をきちんと理解するためには，どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう．そして，その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう．

2.2　非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう．この場合，基本的な方針は変数である φ に摂動係数 η が関係する場合に注意を要すると言う事である．まず，軌道を決める方程式を書いて置こう．これは

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2m\alpha}{\ell^2 r}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\ell^2c^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2\sqrt{1+\eta}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}} \qquad (2.12)\end{aligned}$$

である．この式は

$$\sqrt{1+\eta}\,d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}}} \qquad (2.13)$$

と書き換える事が出来る．ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2c^2}\right)^2 \qquad (2.14)$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \qquad (2.15)$$

と非常に小さな量である事に注意しよう．従って，この η を摂動的に扱う必要がある．すなわち

$$\sqrt{1+\eta}\,d\varphi \simeq d\varphi \qquad (2.16)$$

と近似して見る事である．この場合，近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり，これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある．

2.2.1 摂動計算の最低次項

まず，摂動計算における最低次項を見て行こう．この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \tag{2.17}$$

となっている．これは確かに閉じた軌道を与えている．そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{2.18}$$

となっている．ここで A_g は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1+\eta) \tag{2.19}$$

である．この場合，離心率 ε も変更を受けているが運動力学には影響していないので，具体的には書いてない．その意味においては，この付加ポテンシャルによる影響とは，軌道半径 A_g が変更されたと言う事に対応している．

この軌道の式 (2.18) から明らかなように，近日点のシフトはない．これは物理的には当然で，非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても，これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である．

2.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう．式 (2.18) の解を $r^{(0)}$ すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

である．また摂動項を r' $(r = r^{(0)} + r')$ とすれば r' に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \tag{2.20}$$

となる．この場合，上式の右辺は φ にのみ依存していて r' には依っていない．ここで離心率 ε をゼロとすると右辺はゼロになっている．従って r' は離心率 ε に比例している事がわかる．よって r' は

$$r' \simeq C_0\eta\varepsilon A_g \tag{2.21}$$

と書く事が出来る．ここで C_0 は定数である．地球公転の場合，ε は $(\varepsilon \simeq 0.0167)$ と非常に小さいので，この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである．

2.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため，これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている [2]．この事は歴史的にみても非常に重要である．実際には，これは非常に小さい効果ではあるが，しかし観測に掛かる程度の大きさではある．この影響を定量的に計算して確かめて行こう．

2.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1+2\eta\} \tag{2.22}$$

となる．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{2.23}$$

と書かれている．この式で R は平均軌道半径，ω は角速度で Newton 周期 T と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている．この事より，重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として, 周期のズレ ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{2.24}$$

である [2, 3]．ここで，式 (2.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である．この式より，正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している．

この周期のズレは大雑把に言って $\sim 10^{-8}$ の大きさであり，これは現在，時間に関する測定精度から見ても十分，観測可能な量である．但し，地球の公転周期を直接，この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる．しかしながら幸いにして，次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている．

2.3.2　地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \ \mathrm{m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \ \ \mathrm{kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \tag{2.25}$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って１年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ \ Motion} = 0.621 \ \ \mathrm{s/year} \tag{2.26}$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は１９７２年６月から始まりこれまで４０年間に２５秒補正している．従って１年間での観測値は

$$\Delta T^{Obs}_{Orbital\ \ Motion} \simeq 0.625 \pm 0.013 \ \ \mathrm{s/year} \tag{2.27}$$

である．これは式 (2.26) の理論値と完全に一致している．

2.3.3　うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [4]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

第3章　水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている．ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により，どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう．そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう．但し，Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが，彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多すぎるものである．このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ，残念ながら実行できてはいない．

しかしながら，この場合においては，水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている．観測値と言っても，その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており，この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである．現在においては，一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため，一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている．このため，水星近日点シフトの観測値を理論値と比較すると言う場合，この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている．

3.1　水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\boldsymbol{r}_w}^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_w|} \tag{3.1}$$

から計算を始める事になる．ここで $(m,\ \boldsymbol{r})$ と $(m_w,\ \boldsymbol{r}_w)$ は水星と惑星の質量とその座標を表している．式 (3.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している．今の場合，この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる．

3.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう．これは実際の観測と比べても十分，良い近似であると言えよう．従って，上記の Lagrangian を２次元極座標で書いておくと

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r_w}^2 + r_w^2\dot{\varphi_w}^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} \\ &\quad + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w)}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

となっている．従って，水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w\sin(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.4}$$

$$m_w\ddot{r_w} = m_wr_w\dot{\varphi}^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}(m_wr_w^2\dot{\varphi}) = -\frac{Gm_wMrr_w\sin(\varphi_w - \varphi))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.6}$$

である．

3.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合，これは単純な Kepler 問題である．この場合，運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{3.8}$$

となっている．そしてこの解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{3.9}$$

とである．ここで A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad \text{但し} \quad (\alpha = GMm) \tag{3.10}$$

である．これが非摂動の運動となっている．

3.2 惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう．この場合，水星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.11}$$

である．ここで右辺の最後の項において $r,\ r_w$ を平均半径 $R,\ R_w$ で置き換えると言う近似を行う．従って，方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(R - R_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.12}$$

となる．以下では式 (3.12) の近似解を求めて行こう．

3.2.1 Legendre 展開

ここで最後の項 (3.12) を F として

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x))^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{但し}, \quad x = \cos(\varphi - \varphi_w) \tag{3.13}$$

と定義しよう．そしてこれを

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w(R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}}\, x + \cdots \tag{3.14}$$

と Legendre 展開しよう．従って，運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w(R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}}\cos(\varphi - \varphi_w) \tag{3.15}$$

となる．ここで定数項は影響しないので無視している．

3.2.2　逐次近似法

この方程式 (3.15) を逐次近似法によって解いて行こう．まず，この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \tag{3.16}$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \tag{3.17}$$

を代入しよう．この場合，式 (3.15) は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{3.18}$$

となる．ここで b, β は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \tag{3.19}$$

となっている．

3.2.3　特殊解

方程式 (3.18) を解くために，まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう．従って， r は次のような解を持つと仮定しよう．

$$r = r^{(0)} + K \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{3.20}$$

ここで $r^{(0)}$ は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{3.21}$$

である．この場合，式 (3.20) を 式 (3.18) に代入しよう．この時， K は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \tag{3.22}$$

とすぐに求める事が出来る．よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \tag{3.23}$$

となる．

3.3 水星近日点に対する惑星の効果

ここで Kepler 問題の解 $r^{(0)}$ を代入すると軌道の解は

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi} - \frac{Gm_wR_w(R_w^2-2R^2)}{(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}\beta^2}\cos(b+\beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi+\frac{Gm_wR_w(R_w^2-2R^2)}{R(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}(\omega-\omega_w)^2}\cos(b+\beta t)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

となっている．ここで $A\simeq R$ であり，また $\beta=\omega-\omega_w$ である．また ε_w を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2(\omega-\omega_w)^2}\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{3.25}$$

と定義しよう．ここで $b+\beta t=\varphi-\varphi_w$ を使うと軌道 r は

$$r\simeq\frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)} \tag{3.26}$$

となる．これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる．

3.3.1 数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度，影響するのかと言う問題を具体的な数値を入れて評価して見よう．まず $\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)$ 項を

$$\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)=c_1\cos\varphi+c_2\sin\varphi=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\varphi+\delta) \tag{3.27}$$

と書き換えよう．ここで c_1 と c_2 は

$$c_1 = \varepsilon+\varepsilon_w\cos\varphi_w \tag{3.28}$$

$$c_2 = \varepsilon_w\sin\varphi_w \tag{3.29}$$

であり，$\cos\delta$ は

$$\cos\delta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \tag{3.30}$$

と定義されている．ここで ε_w は ε よりもはるかに小さいので式 (3.30) は

$$\cos\delta=\frac{\varepsilon+\varepsilon_w\cos\varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon+\varepsilon_w\cos\varphi_w)^2+(\varepsilon_w\sin\varphi_w)^2}}\simeq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2\sin^2\varphi_w \tag{3.31}$$

と書く事が出来る．

3.3.2 惑星運動の１周期の平均

ここで惑星運動の１周期における平均操作を行おう．この場合，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi_w\,d\varphi_w=\frac{1}{2} \tag{3.32}$$

となり，従って１周期における平均操作を行うと δ は

$$\begin{aligned}\delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\simeq\frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\frac{GM}{R_w^2}\,\frac{1}{R(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\\ &\simeq \frac{R_w\,\omega_w^2}{\sqrt{2}\,\varepsilon R\,(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned} \tag{3.33}$$

となる．但し，惑星の軌道は円であると近似している．

3.4　数値計算の結果

まず δ の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう．但し，表１ においては全て地球を単位として計っている．

表１　惑星の性質

惑星	水星	金星	火星	木星	土星	地球	太陽
軌道半径	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
質量	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
周期	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
ω	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

3.4.1　１００年間の δ の値

表２では１００年間における近日点シフト値の δ を表にしている．そしてこの計算結果を Newcomb の計算と比較している．

表２　１００年間の δ 値

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
δ [式 (3.33)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
δ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

その結果， δ についての我々の計算値は 111.1 であるのに対して，Newcomb の計算値は 109.3 であり，両者は予想以上に良く一致している．

3.4.2　観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は１９世紀のものであるが，これはその前の１００年間に渡る水星近日点シフトに対応している．この観測値がどの程度，信用できるのかと言う問題にここで答える事は出来ない．これは今後の課題である．

関連図書

[1] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” Annalen der Physik vol. 49, pp. 769−822, März. 1916.

[2] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)

[3] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[4] Simon Newcomb, ”Tables of the Four Inner Planets”, 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).