★★ $\boxed{\text{ブラックホールのお話}}$ ★★

(Black Hole for Dilettante)

藤田　文久

(All Physics Institute)

★★ ブラックホールのお話 ★★

現在でもブラックホールの話題が色々なメディアでよく取り上げられている。しかしながら、ほとんどの場合、それを書いている人はブラックホールが何なのかを理解しているわけではない。この小ノートではブラックホールについて科学的な裏付けのある解説をして行こう。巷に氾濫している情報があまりにもひどすぎるのである。まるで「あの森に神がいた。自分は見た事がある」と言うお話にそっくりな形で「あの銀河の中心核にブラックホールがある。自分達はそれを撮影した」と主張したのである。これはブラックホールの実態を理解していない事が原因なのだが、しかしこれに対して人々は「ブラックホールが発見されたんだ」と思ってしまう危険性がかなりあると思われる。

1 ブラックホールとは何か？

最近、多くの人達からブラックホールについての質問が寄せられている。それで、ここでは簡単でしかし専門的に裏付けのある内容を解説して行きたい。ブラックホールとは星の一種と考えられているが、その定義 (名前の由来) は星とは無関係であり、アインシュタイン方程式の「ある特殊解の特異点」から来ている。しかし一般的にはブラックホールの専門家と称する人々が抱くイメージは「中性子星をさらに高密度にしたような星で光がその境界から外に抜け出せない」と言う、そういう星をイメージしているのであろう。

- 時空の黒い穴：

そして彼らはそれを「黒い穴」と呼んであたかも普通の星ではない特別な「時空の穴」と言う宣伝をしている。ところが、これらの専門家はブラックホールの動力学については全く理解していないし、さらには中性子星の物理に関する計算を自分で実行できる人達ではない。実際、彼らは自分の想像力により話を進めているため、これは科学になっているとは到底、言えないものである。このため一般の人々は長い間、混乱状態に陥っている。

1.1　M87 銀河の核

最近、ブラックホールかも知れないと言われている観測上の星は、M87 銀河の中心核と関係している。これは約６千万光年離れた銀河系でその直径は約１２万光年となっている。そしてその中心核には太陽質量の６５億倍の質量を持つ銀河核が存在していると考えられている。この辺の数字の正確さは別として、銀河核に大質量の中性子星のようなものが存在していると考える事は自然なことであり、現代物理学と矛盾はしていない。この M87 銀河の中心核に中性子星が存在しているとしたら、その半径は約１万 km 程度であり、地球よりもちょっとだけ大きい程度である。

- **ブラックホールと中性子星**：

もしこれをブラックホールの運動学で計算したとすれば、この半径の内側では光が脱出できないと言う事になっている。中性子星との違いはこの１点だけである。すなわち、光が外に出られないと言う事だけがブラックホールの特徴である。従って、この違いを観測する事は最初から不可能であることがよくわかると思う。

- **大質量の中性子星の形成**：

但し、このような大質量の中性子星が形成されるためには、超新星に対応する爆発が起こっていたはずである。この時に高速の粒子が周りに飛び散るため、場合によってはそのかなり外側に何らかの形の星雲が見える可能性はあると考えられる。これがリング状になっているとしたら、角運動量の関係から何か他の大きな星 (または銀河系) との衝突も起こっていた可能性があるかも知れない。このような大質量の中性子星的な星がどのように形成され得るのかと言う計算は非常に重要なはずであるが、具体的な計算が実行された形跡はない。これは新しい重力理論が発見されてからまだ１０年程しか経っていない事と関係しているものと思われる。現実的な問題として、中性子星的でその質量が膨大になるような星の存在は現代物理学の視点かみて十分可能であると考えられるし、研究対象としては面白い問題である。従ってこの分野においては、今後の発展が強く望まれるものであるが、しかし科学の定義が「再検証が可能である」と言う条件である限り、宇宙物理学が科学になり得るかどうかは難しい問題を含んでいる事は確かである。

1.2　科学担当者の責任か？

ブラックホールが発見されたなどと大げさに書いているメディアは問題ではある。しかし、この場合それを書いている科学担当者に必ずしも責任があるとは言えないかも知れない。むしろそれを発信している物理屋または天文屋に問題があると言えよう。彼らはブラックホールについて、昔ながらの知識はもっているとしても、その最新の理論物理学に関してはほとんど何も理解していないのが現状である。

1.3　ブラックホールと中性子星

この理由として、ブラックホールの物理を取り扱うためには、量子場の理論、宇宙物理学、原子核物理学そして一般相対論をかなり深く理解し、また具体的にその分野で計算ができないと理解できない問題だからである。

● 重力崩壊？：
例えば、原子核物理学の計算をしている人は、核子 – 核子間の相互作用には近距離で極めて強い斥力が働く事をよく知っている。このため中性子星をはるかに超えた高密度の星を作ることは原子核物理学の観点から言って、不可能な事である。しかしながら中性子星程度の密度の星ならば、その質量が増えても星として存在する事に問題となるような事は何もない。ましてや、重力によって星が潰れることなどあり得ない事は、重力がその原点においてもそれ程強くはならないことから明らかなのである。これは有限な密度分布を持つ場合の重力場を計算してみれば誰にでもわかる事である。ところが、大半の宇宙論屋はこの重要な点を理解していないので想像の世界で話を進めている。蛇足になるとは思うが、付録に有限密度の分布関数の場合の重力ポテンシャルについて、ちょっとだけ式を書いておこう。

1.4　宇宙の話とロマン

しかしブラックホールに関しては人々に取ってそれが何であるのか良くわからないため、なおさらに興味を惹かれることは至極、自然な事と言えよう。それは宇宙の話にはロマンがあるからであろう。ここではブラックホールとは一体何なのかをできる限り優しく、わかり易い言葉で解説して行こう。このため厳密さは欠いているが、その知識としては正しいものを伝達している。従って若い人達がこのノートを読んだ後、より深くこの問題を理解しようと思い、もう一段上の解説書 (量子場の理論の教科書になるが ･･) を読み進みたいと思うきっかけとなるように願っている。

2　ブラックホールの物理

もともとブラックホールは物質がない場合のアインシュタイン方程式を解いた場合、そのうちの特別な解が特異点を含むことから、その特異点と関係して使われ始めたものである。従って、星の形成などの物理的な条件がないため、ブラックホールと言っても時空にある「黒い穴」であるとして見たり、その表面の空間が変形しているため光が曲がって外に出られないと言って見たりで、荒唐無稽なお話以上の物理は存在していない。このためブラックホールと言う名称だけが独り歩きして現在に至っている。

2.1　中性子星

専門的な解説では、ブラックホールは質量がギュッと詰まった状態の星であるという事になっているのであろう。従って、どちらかと言えばそれは中性子星に近い星と言うイメージとなっているが、それよりももっと密度が高い星と想像しているのであろう。しかしそれでは「それがどのように形成されるのか？」と言う物理学はブラックホールのお話には出てこない。そもそも元になっている一般相対論はダイナミックスを扱う理論ではないので、その関連の理論体系や方程式は存在していないのである。

2.2　銀河の核

ブラックホールは星の内部構造とは無関係となっていて、単純に星の密度が非常に高いとしか定義されていない。しかしながら、星の密度が非常に高い星として中性子星が見つかっており、この存在はパルサーなどの測定から確かな事である。これらの事から銀河の中心にある銀河核に中性子星を巨大化したような星が存在しているとしても驚くことではない。実際、１千億近くの恒星達を重力で引き付けている事から、銀河核に巨大な星が存在するとした方が自然な事である。しかしながら、その実態は観測が難しく、観測データの点でも十分とは言えなく、まだまだ物理学にはなっているとは言えないものである。

2.3 ブラックホールの表面

ブラックホールの表面では空間が歪んでいて光が外に出られないというのがその最も重要な仮説である。ところが３次元空間が歪むと言う物理的内容が全く分からないのである。空間の歪みは光の軌跡で置き換えているのだが、光 (フォトン) が空間をどう伝搬するかと言う問題は古典力学では答えられない。一般相対論はダイナミックスとは無関係な定式化で構成されているが、これはどちらかと言えば古典力学を相対論化する事を視野に入れて作られたものである。従って、光の軌跡についてはこの理論形式では何も議論できないものである。それはフォトンは電磁場を量子化して初めて理解できるものである事に依っている。さらに言えば、空間と言ってもこれは座標系の事であり、実際の空間を人間が認識する事はできていない。

2.4 空間の歪みは物理音痴の戯言

従って、空間の歪みと言っても、勿論、これは誰も理解できなく、その絵を書いている人達は単に、SF 的に想像して描いているだけである。そもそも空間が歪むなどと言う発想は物理音痴の人の戯言であり、物理学とは無関係である。

3　一般相対論のお話とアインシュタイン

一般相対論についてここで詳しい解説をするつもりはないし、その解説をする価値もない理論模型である。一般相対論は座標系に対する方程式であり、アインシュタインは星が分布していたらそのあたりの座標系が変更を受けるであろうと想像して作った理論で、明らかにこれは物理学の素人の作品である。さらに言えば、このように作った理論が相対性理論と矛盾が生じていることはわかっていたと考えられる。このためこれまで最も重要であった相対性理論を「特殊相対論」と呼び、新しく定式化したものを「一般相対論」と呼んだのであろう。

3.1　相対性理論とその重要性

相対性理論と言うと、これはアインシュタインが成し遂げた仕事だと思っている読者が大半であろうと思うが、どうであろうか？　実際は、彼の功績をどこまで評価してよいかはそう単純ではない事が現在はわかっている。

● 静止質量：
確かに静止質量を Lorentz 不変な量と結びつけた功績はそれなりに評価されても良いとは思われる。しかしながら相対性理論の重要性はこの静止質量の問題にあるのではなく、考えている理論形式が相対論の変換 (Lorentz 変換) に対して不変であると言う定式化にその本質的な重要性がある。そしてこれらの理論形式は何人かの人達によってアインシュタイン以前にすでに行われていたのである。主な仕事として、相対論の変換性は Lorentz が行っているし、相対論における $3 \oplus 1$ 次元空間での不変性をうまく記述する方法は Minkowski が行っている。実際、アインシュタインは Minkowski が ETH 大学で行った講義に出席していたと言われている。

● 過大評価：
現在、専門家の間では相対性理論に対してのアインシュタインの功績が過大評価され過ぎているものと考えられている。また、彼の論文ではすべて自分一人でやったような書き方をしていることが問題視される事があるが、当時においてはこのような書き方が過大評価の一因になっている可能性はあるかも知れない。

● 一般相対論は相対性理論と矛盾：
一方、一般相対論が最も重要な相対性理論の変換性を破っている事を考えると「アインシュタインは相対性理論の本質を理解していなかった」と考えざるを得ないのである。この点からしても一般相対論を評価しようがない事が理解されたと思う。

3.2　物理学の基本方程式

物理学において基本方程式を作ろうとしたら、それに対応する自然現象を精査して余程、ざまざまな角度からあらゆる検討を重ねる必要がある。ところが、アインシュタイン方程式は右辺に星の分布関数を持ってきて、その影響で座標系が変更を受けるとして方程式を作ったのである。

● 理論の根拠：
ところが恐ろしい事に、その根拠となる自然現象が存在していないのである。さらに言えば、座標系に対する方程式が何を意味しているのか全く分からないし、模型の作成者本人も空間が歪むだろうと言う漠然とした描像しかなかったのであろう。１９世紀の終わりに「空間の歪み」について議論した論文があるようだが、アインシュタインはそれを参考にしたのであろうか・・。いずれにしてもこれは科学にはなっていない理論模型である。

3.3　アインシュタインの物理センスについて

これまで一般相対論を批判してきたが、アインシュタイン本人についてはコメントをほとんどしていない。しかしながら、ここではアインシュタインについて簡単な感想だけ述べておこう。彼が物理音痴であったかどうかそれは正確にはわからない。一般相対論が作られたときは、まだ量子力学さえ発見されていなかったので、彼が量子力学的で確率的な考え方を持っていなくても仕方がない事でもある。

● ソルベイ会議での量子力学論争：
しかしながら、１９３０年ソルベイ会議におけるボーアとの有名な量子力学論争をみる限り、彼は物理学における確率的な振る舞いの本質を理解できていない事がわかる。これはアインシュタインが決定論的世界観を持ち続け、その世界観の中心にある一般相対論を守りたかったのかも知れないが、これは良くわからない。今となっては量子論的なそして確率論的な描像が物理学の基本である事は周知の事実である。ところが、これと矛盾している一般相対論を信奉する集団が世の中には存在していて、彼らが依然として様々な問題を惹き起こしている。彼らの目的は何なのだろうか？

4　物理学と職人

物理学の分野で何か良い仕事をするためには「物理の職人」となる事が必須条件である。そして例えば「理論物理の職人」になるためには、基礎的な物理学 (特に電磁気学) の理解のため、様々な問題を解いたり、理論形式の検証に膨大な時間を注ぎ込む事が最低条件である。思い付きで物理が理解できることはめったになく、何か新しい仕事が簡単にできる事などまずあり得ないものである。

4.1　職人の重要性

この事はどの分野でも同じであろう。日本人には職人である事を誇りに思う文化が長く人々の間に根付いている。そしてこの職人気質はドイツのマイスター制と同質と考えられるが、これが日本やドイツの発展を支えてきたものと思われる。実際、日本の発展をこれまで支えてきた人々は町工場や工房や中小企業で働いている職人達である事はまず間違いない事である。

4.2　理論物理職人の激減

理論物理学では職人的な研究者が激減している。それは現在、多くの研究者が「知識偏重」型になっている事と関係している。知識を右から左に移しても学問の真の発展はない。常に、様々な技術を磨いて、より高いレベルにと普段の努力をする事をして始めて少し進歩する可能性が見えてくるものである。ところが、近年そうした職人肌の学者があまりにも少数になってしまっている。そのうちに、理論物理学の職人は絶滅危惧種に指定されるかも知れない。

- All Physics Institute :

その中にあって、現在、その数少ない職人タイプの研究者が集まって「All Physics Institute」 (よろず物理研究所) を作り、理論物理学の研究に励んでいる。この集団は「赤貧」に近い状態にもかかわらず、非常に活気があり理論物理学の職人としての自覚もある。この職人集団によって新しい現代物理学が再構築されつつあり、いずれ完成された理論体系が作られることになるのであろう。

付記

一般相対論が「座標系に対する方程式」であると言う事実が直感的にわかりにくいと言う質問が寄せられている。それで、ここでは「座標系に対する方程式」に関して、できるだけわかりやすい解説を試みようとの考えに至り、以下に説明して行こう。しかしこの話の問題点をうまく伝達できているかどうか、あまり自信があるわけではない。

物理学とは座標系を用意して質点 (粒子) の運動を記述しようとする学問である。この事は「普通の物理学」の所で解説しているので参考にして欲しい。ここではそれになぞらえて「水槽の中の金魚の運動」を記述する場合を考えて行こう。この場合、水槽は座標系に、そして金魚は質点に対応している。

自然界では水槽中の金魚の運動はそれがふらふら運動なのかそれとも直線的に泳ぐのかと言うような事を観測して、その運動の規則性を調べる事になっている。これは物理学で言ったら「質点の運動を調べてその運動を記述できる運動方程式を求める事」に対応している。

一般相対論は座標系に対する方程式である。それは計量テンソルが A と言う座標系から B と言う座標系に変換する時に出てくる量である事に依っている。従ってこの場合の座標は質点の座標とは異なり、座標系自体を意味している。すなわち、これはより一般的な座標を表していて一般相対論はこの座標系に対する方程式となっている。

これを金魚の例で説明しよう。一般相対論における座標系に対する方程式とは、金魚で言えば水槽に対する変化を記述しようとする事に対応している。そして、Einstein 方程式とは金魚で言えば「巨大な金魚がいると水槽が変形する」と考えて作られた方程式に対応している。しかしその根拠は示されていなく、対応する自然現象はさらに存在していない。金魚の水槽が変化したら、それは金魚が原因ではなく何らかの外力が加わったと考えられるが、一般相対論における座標系の変形には星の分布関数の存在のみがその原因としている。但し「黒い穴」は星が存在しない方程式の解の特異点として定義されている。

付録 A： 重力ポテンシャル

質量 M の質点が原点にある場合 $\rho(\boldsymbol{r}) = M\delta(\boldsymbol{r})$、そこから距離 r 離れた質量 m の質点に働く重力ポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{1}$$

となっている。これは原点で発散している。しかしながら、全質量 M の物質が球状に一様分布している場合、重力ポテンシャルは上記の形からはかなりずれることになる。実際、質量 M が半径 R の球に一様密度で分布をしている場合を考えると

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GMm}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right), & r < R \\ \\ -\frac{GMm}{r}, & r > R \end{cases} \tag{2}$$

となる。これより、このポテンシャルには原点での発散はなく、原点での重力の強さは表面での値の 1.5 倍程度である事がわかる。

何故、一般相対論は無意味か？

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

自然を理解したい！

この小ノートは『理論物理の間違い連鎖』の第２章を抜粋したものである。これまで長い間、一般相対論と言う全く無意味な理論に多くの人々が振り回され、そして貴重な時間を無駄にしてきたものである。この一番大きな原因は Einstein が『物理学の素人』であったにもかかわらず、有名になってしまったため、その発信力が無用に増大してしまったと言う事であろう。さらに言えば、その後、この訳の分からない理論を翻訳して、それを人々に伝え続けてきた物理屋達の責任も見過ごせないものと言えよう。職人的な物理屋は自分が理解できない事を人に教えると言う事は決してしないものだが、素人物理屋は自分が理解できていなくてもそれを彼なりに脚色しながら解説書を書くものである。このため、読者はそれを読んでもさっぱりわからないものだが、解説している素人物理屋は翻訳しているだけだから悠々たるものである。これは巷で良く見られる稚拙で間違いを含んでいる物理の解説も、翻訳しているだけだから問題があるはずがないと言う思い込みがあり、これは一般相対論の解説者と基本的には同じ穴の狢であろうと思われる。

『力学の上達法』のところですでに解説してあるが、第２，３章では水星の近日点移動に関連した物理をまとめて入れてある。近日点移動は１周期において生じる現象ではない事が証明されているが、他の惑星による影響は１００年平均で確かに観測されているし、理論計算でも有限値で求められている。

物理は自然現象を理解しようとする学問であり、そしてそれが全てである。その自然現象の基礎的な部分は『場の理論』によって正確に記述され、理解されている。自然現象を理解する上での理論上の困難さは全て『多体問題』の難しさにある。古典力学の範囲においても、乱気流の問題はどうにもならない難しさである。また、生物を量子論的に電子の言葉で理解しようとするとほとんど絶望的に難しいものである。しかし何とか、少しずつでも進歩して行く事が今後の重要な方向となっている。

目 次

第1章　Einstein の一般相対論

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

1.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

1.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{1.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

1.1.2　Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

1.1.3　Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{1.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.4}$$

としている．この時，$dx^\mu,\ dx_\mu$ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{1.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

1.2 一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (1.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

1.2.1 $(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが，$(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

1.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

1.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (1.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

1.3　一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [2]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (1.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

1.4　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最も お粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

第2章　力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである．その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果をある程度は内包している．この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である．

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である．この速度 v は約 $v \simeq 10^{-4}c$ である．従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ である．よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期 (１年) が約 $\pi \times 10^7$ 秒である事から，これまでの Newton 力学における周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる．

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう．しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである．

2.1　重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている．従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{2.1}$$

と求まっている．右辺の第２項が新しい重力ポテンシャルの補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を

含めた様々な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているので，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

2.1.1 非可積分ポテンシャル

式 (2.1) **の第２項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている．かって，カオスの理論が流行していた時があったが，その頃，この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった．この場合，非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた．従って，この取り扱いには十分な注意が必要である．**

非可積分ポテンシャル $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ **がある場合，厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう．ここではこの問題を詳しく見て行こう．まず式** (2.1) **で与えられるポテンシャル問題を解くと，その軌道の厳密解は**

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{2.2}$$

となっている．この解法は Kepler **問題の場合と全く同じであり，何か特別な事を考える必要があると言うわけではない．但し，定数の修正はあり，ここでは** A_g **と** L_g **がそれぞれ**

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{2.3}$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}} \equiv \ell\sqrt{1+\eta} \simeq \ell\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \tag{2.4}$$

と定義されている．但し, η **は**

$$\eta \equiv \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{2.5}$$

である．

2.1.2　軌道の式がデカルト座標に戻せない！

軌道を与える式 (2.2) には明らかに問題がある．まず，一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) \tag{2.6}$$

を見てみよう．この場合，この式はデカルト座標

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{2.7}$$

で表す事が出来ない．実際，$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ 項は

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r}\cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r}\sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \tag{2.8}$$

としてみると分かるように，デカルト座標では表現不能である．元々はデカルト座標から出発しているので，これは深刻な問題である．

2.1.3　軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある．軌道の解である式 (2.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon\cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である．これは軌道 r が $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ でどうなっているのかを見れば良くわかるものである．すなわち，

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0 \tag{2.9}$$

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\pi\eta}, \qquad \varphi = 2\pi \tag{2.10}$$

となっているため，同じ点で軌道に飛びがある．この差を Δr とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \tag{2.11}$$

となっている．但しこれは水星の場合である．これは勿論，自然界では起こってはならない現象である．

2.1.4　軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが，一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである．しかも，観測値と理論値が３桁近くも一致していたと言う主張であった．これは，一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が，実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう．

さらに言えば，水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には１００年間の水星近日点シフト値として求められたものである．この場合，水星近日点シフトの観測値から，木星などの影響を考慮した計算値を差っ引く必要があったのである．ところが，木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて，またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている．その意味で，これらの計算を自分で実行すれば，この計算値には不透明な部分が相当あり，到底，信頼できる計算ではない事が分かるものである．

物理屋として自然をきちんと理解するためには，どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう．そして，その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう．

2.2　非可積分ポテンシャルの摂動計算

　ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう．この場合，基本的な方針は変数である φ に摂動係数 η が関係する場合に注意を要すると言う事である．まず，軌道を決める方程式を書いて置こう．これは

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2m\alpha}{\ell^2 r}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\ell^2c^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2\sqrt{1+\eta}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}} \qquad (2.12)\end{aligned}$$

である．この式は

$$\sqrt{1+\eta}\,d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}}} \qquad (2.13)$$

と書き換える事が出来る．ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2c^2}\right)^2 \qquad (2.14)$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \qquad (2.15)$$

と非常に小さな量である事に注意しよう．従って，この η を摂動的に扱う必要がある．すなわち

$$\sqrt{1+\eta}\,d\varphi \simeq d\varphi \qquad (2.16)$$

と近似して見る事である．この場合，近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり，これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある．

2.2.1 摂動計算の最低次項

まず，摂動計算における最低次項を見て行こう．この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \tag{2.17}$$

となっている．これは確かに閉じた軌道を与えている．そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{2.18}$$

となっている．ここで A_g は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1+\eta) \tag{2.19}$$

である．この場合，離心率 ε も変更を受けているが運動力学には影響していないので，具体的には書いてない．その意味においては，この付加ポテンシャルによる影響とは，軌道半径 A_g が変更されたと言う事に対応している．

この軌道の式 (2.18) から明らかなように，近日点のシフトはない．これは物理的には当然で，非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても，これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である．

2.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう．式 (2.18) の解を $r^{(0)}$ すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

である．また摂動項を r' $(r = r^{(0)} + r')$ とすれば r' に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \tag{2.20}$$

となる．この場合，上式の右辺は φ にのみ依存していて r' には依っていない．ここで離心率 ε をゼロとすると右辺はゼロになっている．従って r' は離心率 ε に比例している事がわかる．よって r' は

$$r' \simeq C_0\eta\varepsilon A_g \tag{2.21}$$

と書く事が出来る．ここで C_0 は定数である．地球公転の場合，ε は $(\varepsilon \simeq 0.0167)$ と非常に小さいので，この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである．

2.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため，これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている．この事は歴史的にみても非常に重要である．実際には，これは非常に小さい効果ではあるが，しかし観測に掛かる程度の大きさではある．この影響を定量的に計算して確かめて行こう．

2.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1+2\eta\} \tag{2.22}$$

となる．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{2.23}$$

と書かれている．この式で R は平均軌道半径，ω は角速度で Newton 周期 T と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている．この事より，重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として, 周期のズレ ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{2.24}$$

である [?, ?]．ここで，式 (2.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である．この式より，正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している．

この周期のズレは大雑把に言って $\sim 10^{-8}$ の大きさであり，これは現在，時間に関する測定精度から見ても十分，観測可能な量である．但し，地球の公転周期を直接，この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる．しかしながら幸いにして，次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている．

2.3.2　地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \ \text{m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \ \ \text{kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \tag{2.25}$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って１年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital \ \ Motion} = 0.621 \ \ \text{s/year} \tag{2.26}$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は１９７２年６月から始まりこれまで４０年間に２５秒補正している．従って１年間での観測値は

$$\Delta T^{Obs}_{Orbital \ \ Motion} \simeq 0.625 \pm 0.013 \ \ \text{s/year} \tag{2.27}$$

である．これは式 (2.26) の理論値と完全に一致している．

2.3.3　うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [3]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

第3章　水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている．ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により，どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう．そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう．但し，Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが，彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多すぎるものである．このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ，残念ながら実行できてはいない．

しかしながら，この場合においては，水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている．観測値と言っても，その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており，この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである．現在においては，一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため，一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている．このため，水星近日点シフトの観測値を理論値と比較すると言う場合，この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている．

3.1　水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\boldsymbol{r}_w}^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_w|} \tag{3.1}$$

から計算を始める事になる．ここで $(m,\ \boldsymbol{r})$ と $(m_w,\ \boldsymbol{r}_w)$ は水星と惑星の質量とその座標を表している．式 (3.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している．今の場合，この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる．

3.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう．これは実際の観測と比べても十分，良い近似であると言えよう．従って，上記の Lagrangian を２次元極座標で書いておくと

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r_w}^2 + r_w^2\dot{\varphi_w}^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} \\ &\quad + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w)}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

となっている．従って，水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w\sin(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.4}$$

$$m_w\ddot{r_w} = m_wr_w\dot{\varphi}^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r\cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}(m_wr_w^2\dot{\varphi}) = -\frac{Gm_wMrr_w\sin(\varphi_w - \varphi))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.6}$$

である．

3.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合，これは単純な Kepler 問題である．この場合，運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{3.8}$$

となっている．そしてこの解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{3.9}$$

とである．ここで A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \qquad \text{但し} \quad (\alpha = GMm) \tag{3.10}$$

である．これが非摂動の運動となっている．

3.2　惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう．この場合，水星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{G m_w (r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2 r r_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.11}$$

である．ここで右辺の最後の項において $r,\ r_w$ を平均半径 $R,\ R_w$ で置き換えると言う近似を行う．従って，方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{G m_w (R - R_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2 R R_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \tag{3.12}$$

となる．以下では式 (3.12) の近似解を求めて行こう．

3.2.1　Legendre 展開

ここで最後の項 (3.12) を F として

$$F(x) \equiv -\frac{G m_w (R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2 R R_w x))^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{但し}, \quad x = \cos(\varphi - \varphi_w) \tag{3.13}$$

と定義しよう．そしてこれを

$$F(x) = -\frac{G m_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}}\, x + \cdots \tag{3.14}$$

と Legendre 展開しよう．従って，運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(\varphi - \varphi_w) \tag{3.15}$$

となる．ここで定数項は影響しないので無視している．

3.2.2　逐次近似法

この方程式 (3.15) を逐次近似法によって解いて行こう．まず，この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \tag{3.16}$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \tag{3.17}$$

を代入しよう．この場合，式 (3.15) は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{3.18}$$

となる．ここで b, β は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \tag{3.19}$$

となっている．

3.2.3　特殊解

方程式 (3.18) を解くために，まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう．従って，r は次のような解を持つと仮定しよう．

$$r = r^{(0)} + K \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \tag{3.20}$$

ここで $r^{(0)}$ は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \tag{3.21}$$

である．この場合，式 (3.20) を 式 (3.18) に代入しよう．この時，K は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \tag{3.22}$$

とすぐに求める事が出来る．よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{G m_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \tag{3.23}$$

となる．

3.3　水星近日点に対する惑星の効果

ここで Kepler 問題の解 $r^{(0)}$ を代入すると軌道の解は

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}\beta^2}\cos(b+\beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2-2R^2)}{R(R^2+R_w^2)^{\frac{5}{2}}(\omega-\omega_w)^2}\cos(b+\beta t)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

となっている．ここで $A \simeq R$ であり，また $\beta = \omega - \omega_w$ である．また ε_w を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2(\omega-\omega_w)^2}\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{3.25}$$

と定義しよう．ここで $b+\beta t = \varphi - \varphi_w$ を使うと軌道 r は

$$r \simeq \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)} \tag{3.26}$$

となる．これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる．

3.3.1　数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度，影響するのかと言う問題を具体的な数値を入れて評価して見よう．まず $\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)$ 項を

$$\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w) = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\varphi+\delta) \tag{3.27}$$

と書き換えよう．ここで c_1 と c_2 は

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w\cos\varphi_w \tag{3.28}$$

$$c_2 = \varepsilon_w\sin\varphi_w \tag{3.29}$$

であり，$\cos\delta$ は

$$\cos\delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \tag{3.30}$$

と定義されている．ここで ε_w は ε よりもはるかに小さいので式 (3.30) は

$$\cos\delta = \frac{\varepsilon+\varepsilon_w\cos\varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon+\varepsilon_w\cos\varphi_w)^2+(\varepsilon_w\sin\varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2\sin^2\varphi_w \tag{3.31}$$

と書く事が出来る．

3.3.2　惑星運動の１周期の平均

ここで惑星運動の１周期における平均操作を行おう．この場合，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi_w\,d\varphi_w = \frac{1}{2} \tag{3.32}$$

となり，従って１周期における平均操作を行うと δ は

$$\begin{aligned}
\delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\,\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon}\frac{GM}{R_w^2}\,\frac{1}{R(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\
&\simeq \frac{R_w\,\omega_w^2}{\sqrt{2}\,\varepsilon R\,(\omega-\omega_w)^2}\left(\frac{m_w}{M}\right)\frac{\left(1-\frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1+\frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

となる．但し，惑星の軌道は円であると近似している．

3.4　数値計算の結果

まず δ の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう．但し，表１ においては全て地球を単位として計っている．

表１　惑星の性質

惑星	水星	金星	火星	木星	土星	地球	太陽
軌道半径	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
質量	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
周期	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
ω	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

3.4.1　１００年間の δ の値

表２では１００年間における近日点シフト値の δ を表にしている．そしてこの計算結果を Newcomb の計算と比較している．

表２　１００年間の δ 値

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
δ [式 (3.33)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
δ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

その結果，δ についての我々の計算値は 111.1 であるのに対して，Newcomb の計算値は 109.3 であり，両者は予想以上に良く一致している．

3.4.2　観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は１９世紀のものであるが，これはその前の１００年間に渡る水星近日点シフトに対応している．この観測値がどの程度，信用できるのかと言う問題にここで答える事は出来ない．これは今後の課題である．

関連図書

[1] T. Fujita and N. Kanda, "Fundamental Problems in Quantum Field Theory" (Bentham Publishers, 2013)

[2] A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie," Annalen der Physik vol. 49, pp. 769–822, März. 1916.

[3] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).