☆☆　ミューオン g-2 の計算法　☆☆

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

これまでレプトン(電子とミューオン)の g-2 計算に関して、教科書 [Fundamental Problems in Quantum Field Theory] で解説しているので、ここで改めて解説する必要はないと考えてきたし、実際、その通りであろうと思ってはいる。しかしながら、やはりミューオンの g-2、特に Z^0-boson による Vertex Corrections をわかり易く解説することは、現在、特に重要であろうと思い始めている。それはこの計算が現代物理学の基礎になっているからである。

Z^0-boson によるレプトン g-2 への Vertex Corrections は確かに量子電磁力学(QED)を少し超えた範囲の計算となっている。しかしながらこの場合、弱い相互作用を考慮する事だけが QED の範囲外であると言う事であり、基本的には量子場の理論の計算である。このため、現代物理学の基礎として見た場合、これが最も重要な計算となっている事は間違いないことである。さらに、この計算には Log 発散がないため、これまで場の理論の手法として最も重要な理論スキームとして受け入れられてきた『繰り込み理論』の手法そのものが、Z^0-boson による Vertex Corrections に対して実は必要とはなっていないのである。

場の理論計算は g-2 計算を含めてほとんどの場合、誰にとってもかなり (非常に) 大変である。しかしながら、それでも地味に一つ一つ計算して行くしか他に方法はない。一般的に言って、物理の計算ではほとんど正しくても、何処かでほんのちょっとでも間違いを含んでいるとその計算は最初からやり直しとなっている。そして、正しい計算結果を得るためには途方もないほど、時間が掛かる事が普通である。しかしながら、結果を含めて自分で計算してそれがうまく実行できれば、必ずそして確実に前に進めるものである。

この解説が院生や若手研究者 (実は古手研究者も含む) に取って、理論物理の技術向上に少しでもプラスになればと願っている。この場合でも、やはり自分で計算して検証することしか、なかなか成長する事は出来ないものである。しかしだからこそ、物理は楽しいとも言えるものであろう。

この解説ノートを書いた後、電子の磁気能率そのものをきちんと解説する必要があるかも知れないと思い始めて、これを第１章に書き入れている。これは大学院の講義ノートを書き直したものである。従って、あるいは修士の院生諸君には多少、プラスになるかも知れないとは思っている。この磁気能率に対する３次の摂動計算が Vertex Corrections である。

第４章に教科書の付録を載せてある。これは、場の理論計算の時に必ず必要になる公式集である。

目 次

第1章　電子の磁気能率

電磁場中の電子の運動を正しく記述する理論は Dirac 方程式である。そしてこの方程式を非相対論に近似して行くと、電子と電磁場の相互作用として Zeeman 効果を記述する相互作用 Hamiltonian H_{ZM} が求められる。この場合、スピンによる部分だけ書くと

$$H_{ZM} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\mu}_e\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.1}$$

となっている。ここで電子の磁気能率 $\boldsymbol{\mu}_e$ は

$$\boldsymbol{\mu}_e \equiv \frac{e}{2m_e}\,\boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{e}{2m_e}\,g\,\boldsymbol{s} \tag{1.2}$$

で定義されている。この場合、g は g-factor と呼ばれていて、電子では $g=2$ である事がわかる。ここで式 (1.1) の導出は非相対論に近似した Dirac の Hamiltonian

$$H_{NR} = \frac{1}{2m_e}\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\Big)^2 \tag{1.3}$$

から簡単に求める事ができる。実際、数学の公式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

を用い、さらに $\hat{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ に注意して Hamiltonian を書き直すと

$$H_{NR} = \frac{1}{2m_e}\,(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})^2 - \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.4}$$

となる。この右辺第２項が Zeeman 効果の式 (1.1) である。一方、電子と電磁場の相互作用 Hamiltonian H_I は電子と電磁場の Lagrangian density から

$$H_I = -e\int \boldsymbol{j}_e\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r \tag{1.5}$$

となっている。この相互作用 Hamiltonian の１次摂動計算を行うと式 (1.1) が求められる。ここでは１次摂動の計算過程を解説しよう。これは大学院の講義で解説した部分であり、簡単な計算ではあるが何かの足しになるかも知れない。

1.1　１次摂動計算

量子電磁力学における相互作用 Hamiltonian は

$$H_I = -e\int \boldsymbol{j}_e \cdot \boldsymbol{A}\, d^3r \tag{1.6}$$

であり、これが磁気能率に関係している。但し、ここでの A は外場であり量子化されてはいない。一方、次章で扱う３次の摂動計算は電磁場 A の量子化による効果である。量子場の理論においては、Dirac 場を含めて場を量子化しているためその系は無限多体系となっている。従って、摂動論でしか計算出来ない。その摂動論では、非摂動の状態関数はすべて自由粒子の状態である。勿論、それ以外、計算できないからである。従って、電子の磁気能率に関連する Zeeman 効果の Hamiltonian も１次摂動の計算を行う事により、式 (1.1) のエネルギー $W^{(1)}$ を求める事ができる。よって

$$W^{(1)} = \langle \mathrm{FS}\,|H_I|\mathrm{FS}\,\rangle = -e\langle \mathrm{FS}\,|\int \boldsymbol{j}_e \cdot \boldsymbol{A}\, d^3r|\mathrm{FS}\,\rangle \tag{1.7}$$

となる。ここで $|\mathrm{FS}\,\rangle$ は電子の自由粒子状態を意味していて、シンボリックに書いている。以下に１次摂動計算について解説しよう。この場合、$W^{(1)}$ と H_I を同定して

$$W^{(1)} = H_I = -e\int \boldsymbol{j}_e \cdot \boldsymbol{A}\, d^3r \tag{1.8}$$

と表記する事にしている。ここで j_e は自由粒子の状態関数によって計算されている。

1.1.1　Vector Current $\boldsymbol{j}_e$

電子の Vector Current $\boldsymbol{j}_e$ は

$$\boldsymbol{j}_e = \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \tag{1.9}$$

である。ここで ψ は電子の状態関数であり、また $\bar{\psi}$ は

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \tag{1.10}$$

と定義されている。この $\bar{\psi}$ の導入は状態関数から Lorentz 不変な内積を作る時に便利であるため導入されたもので、特に物理的な意味がある訳ではない。また γ 行列は

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

と定義されている。ここで Dirac 方程式の自由粒子解 $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r},t)$ を具体的に書いておこう。この自由粒子解として

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r},t) = u_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - iEt} \tag{1.12}$$

と書く事ができる．但し，$u_{\boldsymbol{p}}$ は４列のベクトルであり、

$$u_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}} + m_e}{2E_{\boldsymbol{p}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}+m_e}\chi_s \end{pmatrix}, \qquad \chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

と書かれている。$\chi_\uparrow$ と $\chi_\downarrow$ はスピン波動関数である。

1.1.2　Vector Current $\boldsymbol{j}_e$ の非相対論極限

　ここで $\boldsymbol{j}_e$ の非相対論極限の式を書いておこう。時間依存の部分は効いてこないのでここでは省略している。また、スピン波動関数 χ_s も必要ないので省略しよう。Dirac 方程式の自由粒子解の状態関数 $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ で非相対論の近似をすると

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}} + m_e}{2E_{\boldsymbol{p}}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_{\boldsymbol{p}}+m_e} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m_e} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.14}$$

となる。この時、Vector Current $\boldsymbol{j}_e$ は

$$\boldsymbol{j}_e = \bar{\psi}(\boldsymbol{p}')\boldsymbol{\gamma}\,\psi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m_e}\Big\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}')\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\Big\}\frac{1}{V}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.15}$$

となっている。但し、$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$ は Momentum Transfer である。ここで公式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}')\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}' + i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p}', \qquad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} - i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \tag{1.16}$$

を使うと、Vector Current $\boldsymbol{j}_e$ は

$$\boldsymbol{j}_e = \frac{1}{2m_eV}\Big(2\boldsymbol{p} - i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q}\Big)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.17}$$

と求まる。但し、右辺第１項では $\boldsymbol{q}\to 0$ としている。右辺第２項が Spin Current であり、Momentum Transfer $\boldsymbol{q}$ の関数である。この $\boldsymbol{q}$ は定磁場を考える場合、非常に小さな物理量であるが、しかしゼロではない。これはいずれゼロの極限をとる物理量であるが、最初からゼロとする事は出来ない。

1.2　相互作用 Hamiltonian H_I の非相対論極限

　ここで相互作用 Hamiltonian H_I の非相対論極限を具体的に計算して行こう。ここでは Spin Current の部分だけ考えて行く。H_I は

$$H_I = -e \int \boldsymbol{j}_e \cdot \boldsymbol{A} \, d^3r \tag{1.18}$$

である。今の場合、ベクトルポテンシャルは定磁場の外場であり、これは

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} \tag{1.19}$$

と書く事ができる。よって、スピン部分の H_I は

$$\begin{aligned} H_I &= -e \int \boldsymbol{j}_e \cdot \boldsymbol{A} \, d^3r = \frac{ie}{4m_eV} \int (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{q}) \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \, d^3r \\ &= \frac{e}{4m_eV} \int (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla}) \, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \, d^3r \end{aligned} \tag{1.20}$$

となる。但し、この ∇ はこの式では $e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$ のみにオペレートする。ここで式 (1.20) において、部分積分を実行しよう。この場合、無限遠方ではゼロとしている。この結果、式 (1.20) は

$$H_I = \frac{e}{4m_eV} \int \Big[(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{r} \Big] \cdot \boldsymbol{B} \, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \, d^3r \tag{1.21}$$

となる。ここで、この ∇ は 括弧 [ ] の中の $\boldsymbol{r}$ にのみオペレートする。さらに、

$$(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r}) \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r}) = -2\boldsymbol{\sigma} \tag{1.22}$$

と計算されるので、式 (1.21) は

$$H_I = -\frac{e}{2m_eV} \int \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \, d^3r \tag{1.23}$$

となる。ここで $\boldsymbol{q} \to 0$ とすると、１次摂動計算の結果が

$$H_I = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1.24}$$

と求まる。これは式 (1.1) そのものである。よって電子の磁気能率 $\boldsymbol{\mu}_e$ は

$$\boldsymbol{\mu}_e = \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{2m_e} g \boldsymbol{s} \tag{1.25}$$

なので、確かに $g = 2$ である。従って、相互作用 Hamiltonian の１次摂動計算から求められた電子の磁気能率の g-factor は２である事が確かめられた。

1.3 磁気能率の高次項

場の量子論では電磁場 $\boldsymbol{A}$ を量子化してはじめてフォトンが理解できるため、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の量子化は必須である。この場合、量子電磁力学 (QED) は無限多体系の問題となっている。従って、QED では３次の摂動計算が効いて来ることになり、それが Vertex Corrections である。この場合、磁気能率の計算結果は $g = 2$ から少しずれるため、このずれの効果を表現するために $g - 2$ 計算と言う言い方をしている。

次章では Z^0-boson による Vertex Corrections について解説しよう。この計算が最も信頼できる計算となっているからである。不思議議な事ではあるが、フォトンはゲージ粒子であるため、その取扱いが複雑になっていて、３次の摂動計算にはまだ少し任意性があるように思われる。このため、フォトンによる Vertex Corrections についてはここで紹介はしていない。

第2章　Vertex Corrections

ミューオンの g-2 計算について、ここで簡単な解説ノートを書いておこう。電子の g-2 計算はフォトンによる Vertex Corrections に依るものであるが、この計算により基本的には g-2 の実験結果が理解されている。そして、これは量子電磁力学 (QED) の範囲内の計算で十分である [2, 3, 4, 5]。一方、ミューオンの g-2 は、この電子の g-2 から９桁目でズレが生じる事が Fermilab の実験で確認されている。この電子とミューオンの g-2 の差は QED の範囲では理解できない事が分かっている。それは g-2 が無次元量であるため、電子とミューオンの質量差には依存しないからである。

それではこの電子とミューオンの g-2 の差はどのように理解できるのであろうか？この場合、最も可能性がある物理的なメカニズムは Z^0-boson による Vertex Corrections の効果によるものである。Z^0-boson の質量 M_Z は $M_Z \simeq 91$ GeV/c^2 程度であるため、電子やミューオンと比べるとはるかに重いものである。この場合、レプトンに対する Z^0-boson による Vertex Corrections の補正項 $g^{\ell}_{Z^0}$ は、g-2 が無次元である事から、必ずレプトンと Z^0-boson の質量比に比例しているはずである。実際の計算では [1]

$$g^{e}_{Z^0} \simeq C_0 \left(\frac{m_e}{M_Z}\right)^2 \tag{2.1}$$

$$g^{\mu}_{Z^0} \simeq C_0 \left(\frac{m_\mu}{M_Z}\right)^2 \tag{2.2}$$

となっている。ここで C_0 は定数である。また, m_e と m_μ は電子とミューオンの質量である。従って、ミューオンに対する Vertex Corrections の効果は電子に対する効果よりも

$$\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \simeq 4.4 \times 10^4 \tag{2.3}$$

だけ大きくなっている。これがミューオンと電子の g-2 の差として観測されたものと考えられるのである。

2.1 Weak Vector Boson による Vertex Corrections

ここでは、レプトンに対する Vertex Corrections に関して、Weak Vector Boson の効果の計算を実行しよう。この場合，Z^0-boson がこの補正に効いてきている．

2.1.1 Z^0-boson による Vertex Corrections

ここで Z^0-boson による Vertex Corrections $\Lambda^\rho(p',p)$ の式を書いておこう。基本的には Feynman diagrams を計算することになっている。この場合の Notations は教科書 [1] を参照して貰う事にして、細かい部分の解説は省略する事にしよう。$\Lambda^\rho(p',p)$ は

$$\Lambda^\rho(p',p) = -ig_z^2 e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M_Z^2 - i\varepsilon} \right) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m_e} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_e} \gamma_\nu \gamma^5 \tag{2.4}$$

と書かれている。但し、ここでは $\gamma^5\gamma_\mu$ 項のみ書いている。ここで、最も重要な部分は Z^0-boson の伝搬関数 $D^{\mu\nu}(k)$ であり、これは

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M_Z^2 - i\varepsilon} \tag{2.5}$$

となっている。この伝搬関数の式 (2.5) の導出に関しては次章で解説しよう。

2.1.2 k 積分の主要項の計算法

この $\Lambda^\rho(p',p)$ の計算はかなり大変である。ここでは簡単化した計算として Log 発散が存在しないと言う事の証明を解説しておこう。この場合、式 (2.4) の計算は、まず分母に現れているオペレータである γ 行列の処理から始める事になる。すなわち

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_e} = \frac{\not{p} - \not{k} + m_e}{(p-k)^2 - m_e^2} \tag{2.6}$$

とする。この事より、式 (2.4) は

$$\Lambda^\rho(p',p) = -ig_z^2 e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M_Z^2 - i\varepsilon} \right) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\not{p} - \not{k} + m_e}{(p-k)^2 - m_e^2} \gamma^\rho \frac{\not{p} - \not{k} + m_e}{(p-k)^2 - m_e^2} \gamma_\nu \gamma^5 \tag{2.7}$$

となる。但しここでは $p = p'$ としている。ここで Feynman trick を使う。すなわち

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 x dx \frac{1}{[xa + (1-x)b]^3} \tag{2.8}$$

と言う恒等式である。この式の証明は簡単であるが、しかし非常に有用である。これより、式 (2.7) の分母の部分は

$$\frac{1}{(k^2-M_Z^2-i\varepsilon)\Big((p-k)^2-m_e^2\Big)^2}=2\int_0^1 xdx\frac{1}{\Big[x(k^2-M_Z^2)+(1-x)\Big((p-k)^2-m_e^2\Big)\Big]^3}$$

と書き直す事ができる。さらに、積分公式

$$\int d^4k\frac{1}{k^2-s-i\varepsilon)^n}=(-)^n i\pi^2\frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{s^{n-2}},\qquad (n\geq 3) \tag{2.9}$$

を使って計算して行く事になる。

2.1.3 $\Lambda^\rho(p',p)$ に Log 発散がない！

ここで、この Vertex Corrections $\Lambda^\rho(p',p)$ の式 (2.4) には Log 発散がない事を証明しよう。この事は非常に重要である。それは、Feynman 達によるフォトンの Vertex Corrections には Log 発散が出たため、人々はその発散を処理するために『繰り込み』と言う処方箋を考えざるを得なかったのである。Feynman 達の計算で Log 発散が出てきた理由は彼らが使った Feynman の伝搬関数にある。しかしここではこの議論は行わないので、教科書 [1] を参照して貰う事にしよう。

式 (2.4) には Log 発散がない事の証明のために、式 (2.4) の計算において k の主要項のみ計算を実行して行こう。これは

$$\Lambda^\rho(p,p)=-ieg_z^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^1 2xdx\frac{\left(\gamma_\mu \not{k}\gamma^\rho\not{k}\gamma^\mu-\frac{\not{k}\not{k}\gamma^\rho\not{k}\not{k}}{k^2}\right)}{(k^2-s-i\varepsilon)^3}=0 \tag{2.10}$$

となっていることから証明されている。ここで $s=M_Z^2(1-x)+m_e^2x^2$ である。

式 (2.4) を丁寧に計算すると レプトン g-2 に対する Z^0-boson による Vertex Corrections が求められる。この計算は式 (2.7) を使わないで最初の式 (2.4) において伝搬関数の分子に現れる $\frac{1}{k^2}$ を正確に取り扱う必要があり、計算はさらに複雑となっている。ここではその結果だけを書いておこう。

2.1.4　Z^0-boson による電子の $g-2$

まず電子の $g-2$ に対する Z^0-boson の Vertex Corrections を計算するとこれは

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_e}{M_Z}\right)^2 \sim 10^{-13} \tag{2.11}$$

となっている．ここで α_z は Z^0-boson とレプトンとの弱い相互作用の結合定数である．この値は弱い相互作用の実験から決められていて

$$\alpha_z \simeq 2.7 \times 10^{-3} \tag{2.12}$$

程度である。この場合，式 (2.11) から、電子の $g-2$ に対する補正は非常に小さい事が分かる。そしてこれは観測値と矛盾してはいない．

2.1.5　Z^0-boson によるミューオンの $g-2$

一方，ミューオンの $g-2$ に対する Z^0-boson の Vertex Corrections を計算すると

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu \simeq \frac{7\alpha_z}{12\pi}\left(\frac{m_\mu}{M_z}\right)^2 \simeq 0.86 \times 10^{-9} \tag{2.13}$$

と求まっている．この値は最近の Fermilab によるミューオンの $g-2$ の実験値と比較する事が出来る．驚いたことに，この理論値は実験値と大きさでは一致している事が分かっている．しかしながら、これは非常に小さな物理量でもあり，今後，さらなる高精度の実験が行われる事を期待しよう。また α_z の値にはまだ任意性があると考えられている。従って、この点での改良も必要であろう。

第3章　弱い相互作用の理論

この章では弱い相互作用の理論を簡単に解説しよう。これはレプトンの g-2 計算において Weak Vector Boson の伝搬関数を求める事が必要となっているからである。従って、ここでは弱い相互作用の理論に関して最小限の解説をしているので、詳細は教科書 [1] を参照して頂く事にしよう。

3.1　弱い相互作用の Lagrangian 密度

CVC 理論 [6] においては、荷電カレントを考えて弱い相互作用の模型が造られたのであるが，これに対して、この模型には理論的な整合性と言う点である問題点が指摘されていた．それは、この相互作用 Hamiltonian において２次の摂動計算を行うと２次発散が出てきてしまうと言う欠陥であった。このため、どうしても中間状態に Weak Vector Bosons を導入する事が必要であり、この点を考慮した模型を考える事が必須でもあったのである。

それでここでは SU(2) の Weak Vector Bosons を考慮した弱い相互作用の模型を考えて行こう．これは，結果的に標準模型 (Weinberg-Salam 模型 [7, 8]) の最終的な Lagrangian 密度に対応している．但し、Higgs Boson は最初から必要ないのでここでは考えてはいない。この場合，Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_\ell (i\partial_\mu \gamma^\mu - m^a)\Psi_\ell - gJ^a_\mu W^{\mu,a} + \frac{1}{2}M_a^2 W^a_\mu W^{\mu,a} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a} \tag{3.1}$$

と書かれている．ここで W^a_μ は SU(2) の Weak Vector Boson を表していて

$$W^a_\mu = (W^+_\mu, Z^0, W^-_\mu) \tag{3.2}$$

である．M_a は Weak Vector Boson の質量を表していて W ボソンの質量は $M_W \simeq 80\ \mathrm{GeV}/c^2$ であり，Z^0-boson は $M_Z \simeq 91\ \mathrm{GeV}/c^2$ である．この式 (3.1) ではハドロン部分のカレントは省略している．

3.1.1　レプトンの状態関数

レプトンの状態関数 Ψ_ℓ は２成分で書かれていて

$$\Psi_\ell = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\nu \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

となっている．ここで ψ_e と ψ_ν は電子とニュートリノの状態関数である．これに対応して，質量行列 m^a も

$$m^a = \begin{pmatrix} m_e & 0 \\ 0 & m_\nu \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となっている．また Fermion Current J_μ^a と Weak Vector Boson の場の強さは

$$J_\mu^a = \bar{\Psi}_\ell \gamma_\mu (1-\gamma_5)\tau^a \Psi_\ell, \qquad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a \tag{3.5}$$

と定義されている．

3.1.2　実験の再現性

この弱い相互作用の模型は弱い相互作用に関連するほとんどすべての実験を非常にうまく再現できている．ここではその議論を行わないが，実験の再現性に優れているのはすでに CVC 理論模型で確認されていた事である．但し，前述したように中性カレント関連の実験は SU(2) を導入した事の成果であることは間違いない．

3.2　弱い相互作用の理論

弱い相互作用による Vertex Corrections を議論するためには Weak Vector Boson のベクトル場 W^μ の伝播関数を求める事が必要である．この場合，まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [1]．ベクトル場 W^μ に対するLagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2 W_\mu W^\mu \tag{3.6}$$

で与えられる．ここで

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \tag{3.7}$$

である．

3.2.1　Lorentz 条件 $(k_\mu \epsilon^\mu = 0)$ の導出

この場合，運動方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M^2 W^\nu = 0 \tag{3.8}$$

となる．ここで，自由粒子の解

$$W^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,\epsilon^\mu(k,\lambda)\left[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{ikx}\right] \tag{3.9}$$

を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式をを求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu\epsilon^\nu)k^\mu = 0 \tag{3.10}$$

となる．この場合，ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロとなることである．すなわち

$$\det\{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu\mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{3.11}$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \tag{3.12}$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0, \qquad \text{(Lorentz 条件)} \tag{3.13}$$

が求められる．これは QED では Lorentz ゲージ固定として良く知られている式である．しかし，前章で見たように QED でもゲージ固定とは無関係に同じ式が求められているが，これがゲージ理論とは関係のない弱い相互作用においても運動方程式から導かれたと言う事実は非常に重要である．この事より、QED におけるゲージ固定では Lorentz ゲージ固定が許されない事が理解されるものである。実際問題として、フォトンの運動方程式を解く事により、確かに Lorentz 条件が求められるからである。当然の事であるが、運動方程式から得られる条件は常に優先順位の高い条件となっている。

3.2.2 ベクトル場 W^μ の自由度の数

ベクトル場 W^μ は元々４個の自由度を持っている．しかしベクトルボソンは粒子として振る舞う場合，その自由度は３である．実際，これは W ボソンとして観測されている．自由度が１個減ったのは勿論，式 (3.13) の Lorentz 条件があるからである．QED の場合は，これにゲージ自由度があるため，もう１個減って，フォトンの自由度は２であった．

有限質量を持つベクトル場 W^μ とフォトンのベクトル場 A^μ との違いはゲージ自由度である。このため、実験的にも確かにフォトンは自由度が２である事が確認されている。これは、フォトンの自由度を考える時はフォトンの場 A^μ を決める必要があるため、ゲージ固定の条件が必要となっていると言う事であろう。しかしながら、それ以外の場合でゲージ固定の条件を使う必要が何処かにあるのかどうかと言う問題に関して、実は著者にはその答えがあまり良くわかってはいない。経験的に言えば、原子における準位間の状態遷移においてフォトンを放出する物理過程においては、偏極ベクトルの平均値を決める必要が出て来るので、この場合はクーロンゲージ固定を課すことが必要であると考えている。これは電子が束縛状態にあるため、その情報がフォトンの偏極ベクトルに影響して、このためゲージ固定が必要なのであろう。しかしながら、自由電子からのフォトン生成 (virtual photon) の場合、このフォトンの偏極ベクトルには制限がつかない気がしているのであるが、どうであろうか？

この物理的な理由として考えられるのは、電子とフォトンの相互作用の性質であろう。この $H' = -\int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}\, d^3x$ 相互作用において、自由電子とフォトンの散乱では運動量保存は考慮される必要があるが、角運動量保存は必要としていない。これに対して、原子に束縛されている電子とフォトンの相互作用の場合、角運動量が保存される必要がある。そしてこれはまさに偏極ベクトルへの制限となっている。しかしこれは直感的な描像であり、もう少しきちんと見て行く必要があると思われる。

3.3　有限質量ベクトルボソン場の伝播関数

次に，有限質量をもつベクトルボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ベクトルボソン場の伝播関数を決定しよう．出発点となるのは S 行列の計算であり，この場合，複数個のベクトルボソン場の T-積が問題となる．ここで，２個のベクトルボソン場の T-積は

$$< 0|T\{W^{\mu}(x_1)W^{\nu}(x_2)\}|0 >= i\sum_{\lambda=1}^{3}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda)\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-M^2-i\varepsilon} \tag{3.14}$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda)$ の形は Lorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^{\mu}(k,\lambda)\epsilon^{\nu}(k,\lambda) = -\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right) \tag{3.15}$$

と決定される．従って，質量 M のベクトルボソン場の伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}}{k^2-M^2-i\varepsilon} \tag{3.16}$$

と一義的に決定される事がわかる．

3.3.1　Green 関数による伝播関数

残念ながら，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものであり，これは Lorentz 条件を満たしていない．何故，このような基本的なところで間違えていたであろうか？この点に関して，詳しい解説はここでは行わない．恐らくその理由としては，これまでの教科書では Green 関数の手法により伝搬関数を決めていたからであろう．しかしながら，複数の変数がある場合においては Green 関数の手法が正しい答えを与えるとは限らない事がわかっており、このために人々は間違った伝播関数を求めてしまったのであろう．

第4章 Basic Notations in Field Theory

In field theory, one often employs special notations which are by now commonly used. In this Appendix, we explain some of the notations which are particularly useful in field theory calculations.

4.1 Natural Units and Constants

Here, we employ the natural units because of its simplicity

$$c = 1, \quad \hbar = 1. \tag{4.1.1}$$

If one wishes to get the right dimensions out, one should use

$$\hbar c = 197.33 \ \text{MeV} \cdot \text{fm}. \tag{4.1.2}$$

For example, pion mass is $m_\pi \simeq 140$ MeV/c^2. Its Compton wave length is

$$\frac{1}{m_\pi} = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} = \frac{197 \ \text{MeV} \cdot \ \text{fm}}{140 \ \text{MeV}} \simeq 1.4 \ \text{fm}.$$

Fine structure constant: $\quad \alpha = e^2 = \dfrac{e^2}{\hbar c} = \dfrac{e^2}{4\pi} = \dfrac{e^2}{4\pi\hbar c} = \dfrac{1}{137.036}\,.$

Some constants:

$$\begin{cases} \textbf{Electron mass}: & m_e = 0.511 \ \ \text{MeV}/c^2 \\ \textbf{Muon mass}: & m_\mu = 105.66 \ \ \text{MeV}/c^2 \\ \textbf{Proton mass}: & M_p = 938.28 \ \ \text{MeV}/c^2 \\ \textbf{Bohr radius}: & a_0 = \dfrac{1}{m_e e^2} = 0.529 \times \ \ 10^{-8} \ \ \text{cm} \end{cases}$$

Gravitational constant: $G = 5.906 \times 10^{-39} \quad \frac{1}{M_p^2}$

Weak coupling Constant: $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \quad (\text{GeV})^{-2}$

$$\textbf{Magnetic moments :} \left(\begin{array}{lll} \textbf{Electron}: & \mu_e = 1.00115965219 & \dfrac{e\hbar}{2m_e c} \\ \textbf{Muon}: & \mu_\mu = 1.001165920 & \dfrac{e\hbar}{2m_\mu c} \end{array} \right.$$

$$\textbf{Weak bosons :} \left\{ \begin{array}{l} W^\pm - \textbf{boson}: M_W = 80.4 \quad \text{GeV}/c^2, \qquad \alpha_W \simeq 4.3 \times 10^{-3} \\ Z^0 - \textbf{boson} \ : \quad M_z = 91.2 \quad \text{GeV}/c^2, \qquad \alpha_Z \simeq 2.73 \times 10^{-3} \end{array} \right.$$

4.2 Hermite Conjugate and Complex Conjugate

For a complex c-number A

$$A = a + bi \ \ (a, b: \ \text{real}). \tag{4.2.1}$$

Its complex conjugate A^* **is defined as**

$$A^* = a - bi. \tag{4.2.2}$$

Matrix A **:**

If A **is a matrix, one defines the hermite conjugate** $A^\dagger$

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}. \tag{4.2.3}$$

Differential Operator $\hat{A}$ **:**

If $\hat{A}$ **is a differential operator, then the hermite conjugate can be defined only when the Hilbert space and its scalar product are defined. For example, suppose** $\hat{A}$ **is written as**

$$\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{4.2.4}$$

In this case, its hermite conjugate $\hat{A}^\dagger$ becomes

$$\hat{A}^\dagger = -i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^T = i \frac{\partial}{\partial x} = \hat{A} \tag{4.2.5}$$

which means $\hat{A}$ is Hermitian. This can be easily seen in a concrete fashion since

$$\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)\, dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger(x) \right) \psi(x)\, dx = \langle \hat{A}\psi | \psi \rangle, \tag{4.2.6}$$

where $\psi(\pm\infty) = 0$ is assumed. The complex conjugate of $\hat{A}$ is simply

$$\hat{A}^* = -i \frac{\partial}{\partial x} \neq \hat{A}. \tag{4.2.7}$$

Field ψ :

If the $\psi(x)$ is a c-number field, then the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$ is just the same as the complex conjugate $\psi^*(x)$. However, when the field $\psi(x)$ is quantized, then one should always take the hermite conjugate $\psi^\dagger(x)$. When one takes the complex conjugate of the field as $\psi^*(x)$, one may examine the time reversal invariance.

4.3 Scalar and Vector Products (Three Dimensions) :

Scalar Product :

For two vectors in three dimensions

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3) \tag{4.3.1}$$

the scalar product is defined

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k \equiv x_k p_k, \tag{4.3.2}$$

where, in the last step, we omit the summation notation if the index k is repeated twice.

Vector Product :

The vector product is defined as

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv (x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1). \tag{4.3.3}$$

This can be rewritten in terms of components,

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k, \tag{4.3.4}$$

where ϵ_{ijk} **denotes anti-symmetric symbol with**

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, \quad \text{otherwise} = 0.$$

4.4 Scalar Product (Four Dimensions)

For two vectors in four dimensions,

$$x^\mu \equiv (t, x, y, z) = (x_0, \boldsymbol{r}), \quad p^\mu \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = (p_0, \boldsymbol{p}) \tag{4.4.1}$$

the scalar product is defined

$$x \cdot p \equiv Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} = x_0p_0 - x_kp_k. \tag{4.4.2}$$

This can be also written as

$$x_\mu p^\mu \equiv x_0p^0 + x_1p^1 + x_2p^2 + x_3p^3 = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} = x \cdot p, \tag{4.4.3}$$

where x_μ **and** p_μ **are defined as**

$$x_\mu \equiv (x_0, -\boldsymbol{r}), \quad p_\mu \equiv (p_0, -\boldsymbol{p}). \tag{4.4.4}$$

Here, the repeated indices of the Greek letters mean the four dimensional summation $\mu = 0, 1, 2, 3$**. The repeated indices of the roman letters always denote the three dimensional summation throughout the text.**

Metric Tensor :

It is sometimes convenient to introduce the metric tensor $g^{\mu\nu}$ which has the following properties

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.4.5}$$

In this case, the scalar product can be rewritten as

$$x \cdot p = x^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}. \tag{4.4.6}$$

4.5 Four Dimensional Derivatives ∂_μ

The derivative ∂_μ is introduced for convenience

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right), \tag{4.5.1}$$

where the lower index has the positive space part. Therefore, the derivative ∂^μ becomes

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla} \right). \tag{4.5.2}$$

4.5.1 $\hat{p}^\mu$ and Differential Operator

Since the operator $\hat{p}^\mu$ becomes a differential operator as

$$\hat{p}^\mu = (\hat{E}, \hat{\boldsymbol{p}}) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, \ -i\boldsymbol{\nabla} \right) = i\partial^\mu$$

the negative sign, therefore, appears in the space part. For example, if one defines the current j^μ in four dimension as

$$j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j}),$$

then the current conservation is written as

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{1}{i} \hat{p}_\mu j^\mu = 0. \tag{4.5.3}$$

4.5.2 Laplacian and d'Alembertian Operators

The Laplacian and d'Alembertian operators, Δ and $\Box$ are defined as

$$\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$
$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

4.6 γ-Matrix

Here, we present explicit expressions of the γ-matrices in two and four dimensions. Before presenting the representation of the γ-matrices, we first give the explicit representation of Pauli matrices.

4.6.1 Pauli Matrix

Pauli matrices are given as

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.6.1}$$

Below we write some properties of the Pauli matrices.

Hermiticity :

$$\sigma_1^\dagger = \sigma_1, \quad \sigma_2^\dagger = \sigma_2, \quad \sigma_3^\dagger = \sigma_3.$$

Complex Conjugate :

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \sigma_2^* = -\sigma_2, \quad \sigma_3^* = \sigma_3.$$

Transposed :

$$\sigma_1^T = \sigma_1, \quad \sigma_2^T = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \sigma_3 \quad (\sigma_k^T = \sigma_k^*).$$

Useful Relations :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{4.6.2}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{4.6.3}$$

4.6.2 Representation of γ-matrix :

(a) Two dimensional representations of γ-matrices

Dirac : $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

Chiral : $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(b) Four dimensional representations of gamma matrices

Dirac : $\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Chiral : $\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

where $\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4.6.3 Useful Relations of γ-Matrix

Here, we summarize some useful relations of the γ-matrices.

Anti-commutation relations :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0. \tag{4.6.4}$$

Hermiticity :

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 \ \ (\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \ \ \gamma_k^\dagger = -\gamma_k), \qquad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \tag{4.6.5}$$

Complex Conjugate :

$$\gamma_0^* = \gamma^0, \quad \gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2, \quad \gamma_3^* = \gamma_3, \qquad \gamma_5^* = \gamma_5. \tag{4.6.6}$$

Transposed :

$$\gamma_\mu^T = \gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0, \quad \gamma_5^T = \gamma_5. \tag{4.6.7}$$

4.7 Transformation of State and Operator

When one transforms a quantum state $|\psi\rangle$ by a unitary transformation U which satisfies

$$U^\dagger U = 1$$

one writes the transformed state as

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \tag{4.7.1}$$

The unitarity is important since the norm must be conserved, that is,

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1.$$

In this case, an arbitrary operator $\mathcal{O}$ is transformed as

$$\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}. \tag{4.7.2}$$

This can be obtained since the expectation value of the operator $\mathcal{O}$ must be the same between two systems, that is,

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle. \tag{4.7.3}$$

Since

$$\langle\psi'|\mathcal{O}'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger\mathcal{O}'U|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$$

one finds

$$U^\dagger\mathcal{O}'U = \mathcal{O}$$

which is just eq.(4.7.2).

4.8 Fermion Current

We summarize the fermion currents and their properties of the Lorentz transformation. We also give their nonrelativistic expressions since the basic behaviors must be kept in the nonrelativistic expressions. Here, the approximate expressions are obtained by making use of the plane wave solutions for the Dirac wave function.

$$\text{Fermion currents}: \begin{cases} \text{Scalar}: & \bar\psi\psi \simeq 1 \\ \text{Pseudoscalar}: & \bar\psi\gamma^5\psi \simeq \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m} \\ \text{Vector}: & \bar\psi\gamma^\mu\psi \simeq \left(1, \dfrac{\boldsymbol{p}}{m}\right) \\ \text{Axialvector}: & \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi \simeq \left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m}, \boldsymbol{\sigma}\right) \end{cases} \tag{4.8.1}$$

Therefore, under the parity $\hat{P}$ and time reversal $\hat{T}$ transformation, the currents behave

$$\text{Parity } \hat{P} \quad : \begin{cases} \bar\psi'\psi' = \bar\psi\hat{P}^{-1}\hat{P}\psi = \bar\psi\psi \\ \bar\psi'\gamma_5\psi' = \bar\psi\hat{P}^{-1}\gamma_5\hat{P}\psi = -\bar\psi\gamma_5\psi \\ \bar\psi'\gamma_k\psi' = \bar\psi\hat{P}^{-1}\gamma_k\hat{P}\psi = -\bar\psi\gamma_k\psi \\ \bar\psi'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar\psi\hat{P}^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat{P}\psi = \bar\psi\gamma_k\gamma_5\psi \end{cases} \tag{4.8.2}$$

$$\text{Time Reversal } \hat{T}: \begin{cases} \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\hat{T}\psi = \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_5\hat{T}\psi = \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\psi \\ \bar{\psi}'\gamma_k\gamma_5\psi' = \bar{\psi}\hat{T}^{-1}\gamma_k\gamma_5\hat{T}\psi = -\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi \end{cases} \tag{4.8.3}$$

4.9 Trace in Physics

4.9.1 Definition

The trace of $N \times N$ matrix A is defined as

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{N} A_{ii}. \tag{4.9.1}$$

It is easy to prove

$$\mathrm{Tr}[AB] = \mathrm{Tr}[BA]. \tag{4.9.2}$$

4.9.2 Trace in Quantum Mechanics

The trace of the Hamiltonian H becomes

$$\mathrm{Tr}[H] = \mathrm{Tr}[UHU^{-1}] = \sum_{n=1} E_n, \tag{4.9.3}$$

where U is a unitary operator, and E_n denotes the energy eigenvalue of the Hamiltonian.

4.9.3 Trace in $SU(N)$

In $SU(N)$, the element U^a can be described in terms of the generator T^a

$$U^a = e^{i\alpha T^a} \tag{4.9.4}$$

where the generator must be hermitian and traceless since

$$\mathrm{det}U^a = \exp\left(\mathrm{Tr}\left[\ln U^a\right]\right) = \exp\left(i\alpha\,\mathrm{Tr}\left[T^a\right]\right) = 1 \tag{4.9.5a}$$

$$\mathrm{Tr}\,[T^a] = 0. \tag{4.9.5b}$$

The generators of $SU(N)$ group satisfy the following commutation relations

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c, \tag{4.9.6}$$

where C^{abc} denotes a structure constant. The generators are normalized such that

$$\mathrm{Tr}\,[T^aT^b] = \frac{1}{2}\,\delta^{ab}. \tag{4.9.7}$$

4.9.4 Trace of γ-Matrices and $\not{p}$

Trace of γ-matrices :

$$\mathrm{Tr}\,[1] = 4, \quad \mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu] = 0, \quad \mathrm{Tr}\,[\gamma_5] = 0. \tag{4.9.8}$$

Symbol $\not{p}$: $\qquad \not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$

Useful Relations:

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \tag{4.9.9}$$

$$\not{p}\not{q} = p\cdot q - i\sigma_{\mu\nu}p^\mu q^\nu \tag{4.9.10}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not{p}\not{q}] = 4p\cdot q \tag{4.9.11}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5\not{p}\not{q}] = 0 \tag{4.9.12}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = 4\Big\{(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\Big\} \tag{4.9.13}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma^5\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] = -4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\ p_1^\alpha\ p_2^\beta\ p_3^\gamma\ p_4^\delta \tag{4.9.14}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\gamma^5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5}\gamma_{\mu_6}] &= -4i\,[g_{\mu_1\mu_2}\varepsilon_{\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6} - g_{\mu_1\mu_3}\varepsilon_{\mu_2\mu_4\mu_5\mu_6} \\ &+ g_{\mu_2\mu_3}\varepsilon_{\mu_1\mu_4\mu_5\mu_6} + g_{\mu_4\mu_5}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_6} - g_{\mu_4\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_5\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}]\end{aligned} \tag{4.9.15}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_{\mu'} & \delta^\mu{}_{\nu'} & \delta^\mu{}_{\alpha'} & \delta^\mu{}_{\beta'} \\ \delta^\nu{}_{\mu'} & \delta^\nu{}_{\nu'} & \delta^\nu{}_{\alpha'} & \delta^\nu{}_{\beta'} \\ \delta^\alpha{}_{\mu'} & \delta^\alpha{}_{\nu'} & \delta^\alpha{}_{\alpha'} & \delta^\alpha{}_{\beta'} \\ \delta^\beta{}_{\mu'} & \delta^\beta{}_{\nu'} & \delta^\beta{}_{\alpha'} & \delta^\beta{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{4.9.16}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu'\alpha'\beta'} = -\begin{vmatrix} \delta^{\nu}{}_{\nu'} & \delta^{\nu}{}_{\alpha'} & \delta^{\nu}{}_{\beta'} \\ \delta^{\alpha}{}_{\nu'} & \delta^{\alpha}{}_{\alpha'} & \delta^{\alpha}{}_{\beta'} \\ \delta^{\beta}{}_{\nu'} & \delta^{\beta}{}_{\alpha'} & \delta^{\beta}{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{4.9.17}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = -2\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}{}_{\alpha'} & \delta^{\alpha}{}_{\beta'} \\ \delta^{\beta}{}_{\alpha'} & \delta^{\beta}{}_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{4.9.18}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta'} = -6\delta^{\beta}{}_{\beta'} \tag{4.9.19}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -24 \tag{4.9.20}$$

4.10 Lagrange Equation

In classical field theory, the equation of motion is most important, and it is derived from the Lagrange equation. Therefore, we review briefly how we can obtain the equation of motion from the Lagrangian density.

4.10.1 Lagrange Equation in Classical Mechanics

Before going to the field theory treatment, we first discuss the Lagrange equation (Newton equation) in classical mechanics. In order to obtain the Lagrange equation by the variational principle in classical mechanics, one starts from the action S as defined

$$S = \int L(q, \dot{q})\, dt, \tag{4.10.1}$$

where the Lagrangian $L(q, \dot{q})$ depends on the general coordinate q and its velocity $\dot{q}$. At the time of deriving equation of motion by the variational principle, q and $\dot{q}$ are independent as the function of t. This is clear since, in the action S, the functional dependence of $q(t)$ is unknown and therefore one cannot make any derivative of $q(t)$ with respect to time t. Once the equation of motion is established, then one can obtain $\dot{q}$ by time differentiation of $q(t)$ which is a solution of the equation of motion. The Lagrange equation can be obtained by requiring that the action S should be a minimum with respect to the variation of q and $\dot{q}$.

$$\delta S = \int \delta L(q, \dot{q})\, dt = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta \dot{q} \right) dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt = 0, \tag{4.10.2}$$

where the surface terms should vanish. Thus one obtains the Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{4.10.3}$$

Hamiltonian in Classical Mechanics

The Lagrangian must be invariant under the infinitesimal time displacement ϵ of $q(t)$ as

$$q(t+\epsilon) \to q(t) + \dot{q}\epsilon, \quad \dot{q}(t+\epsilon) \to \dot{q}(t) + \ddot{q}\epsilon + \dot{q}\,\frac{d\epsilon}{dt}\,. \tag{4.10.4}$$

Therefore, one finds

$$\delta L(q,\dot{q}) = L(q(t+\epsilon), \dot{q}(t+\epsilon)) - L(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q}\epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q}\frac{d\epsilon}{dt} = 0. \tag{4.10.5}$$

Since the surface term vanishes, one obtains

$$\delta L(q,\dot{q}) = \left[\frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} \right) \right] \epsilon = \left[\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} \right) \right] \epsilon = 0 \tag{4.10.6}$$

where the term in bracket is a conserved quantity, and thus the Hamiltonian H is defined as

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L. \tag{4.10.7}$$

4.10.2 Lagrange Equation for Fields

The Lagrange equation for fields can be obtained almost in the same way as the particle case. For fields, we should start from the Lagrangian density $\mathcal{L}$ and the action is written as

$$S = \int \mathcal{L}\left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) d^3r\, dt, \tag{4.10.8}$$

where $\psi(x)$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ and $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$ are independent functional variables. Hereafter, we use the notation of $\dot{\psi}(x) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}$. The Lagrange equation can be obtained by requiring that the action S should be a minimum with respect to the variation of ψ, $\dot{\psi}$ and $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$,

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}\left(\psi, \dot{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right) d^3r\, dt = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\,\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\,\delta\dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_k})}\,\delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)\right) d^3r\, dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_k})}\right)\delta\psi\, d^3r\, dt = 0, \tag{4.10.9}$$

where the surface terms are assumed to vanish. Therefore, one obtains

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_k})}, \tag{4.10.10}$$

which can be expressed in the relativistic covariant way as

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right). \tag{4.10.11}$$

4.11 Noether Current

If the Lagrangian density is invariant under the transformation of the field with a continuous variable, then there is always a conserved current associated with this symmetry. This is called *Noether current* and can be derived from the invariance of the Lagrangian density and the Lagrange equation.

4.11.1 Global Gauge Symmetry

The Lagrangian density which is discussed in this textbook should have the following functional dependence in general

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_I\left\{\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right\}$$

which is obviously invariant under the global gauge transformation

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \psi'^{\dagger} = e^{-i\alpha}\psi^{\dagger}, \tag{4.11.1}$$

where α ia a real constant. Therefore, the Noether current is conserved in this system. To derive the Noether current conservation for the global gauge

transformation, one can consider the infinitesimal global transformation, that is, $|\alpha| \ll 1$

$$\psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = i\alpha\psi. \tag{4.11.2a}$$

$$\psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} + \delta\psi^{\dagger}, \quad \delta\psi^{\dagger} = -i\alpha\psi^{\dagger}. \tag{4.11.2b}$$

Invariance of Lagrangian Density

Now, it is easy to find

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi', \psi'^{\dagger}, \partial_\mu\psi', \partial_\mu\psi'^{\dagger}) - \mathcal{L}(\psi, \psi^{\dagger}, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^{\dagger}) = 0 \tag{4.11.3a}$$

which becomes

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\,\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\delta\left(\partial_\mu\psi\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\dagger}}\delta\psi^{\dagger} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\delta\left(\partial_\mu\psi^{\dagger}\right) \\
&= i\alpha\left[\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\partial_\mu\psi - \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\right)\psi^{\dagger} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\partial_\mu\psi^{\dagger}\right] \\
&= i\alpha\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\psi^{\dagger}\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.11.3b}$$

where the equation of motion for ψ **is employed.**

Current Conservation

Therefore, one defines the current j^μ **as**

$$j^\mu \equiv -i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^{\dagger})}\,\psi^{\dagger}\right] \tag{4.11.4}$$

and one has the current conservation

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{4.11.5}$$

For Dirac fields, one finds the conserved current

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{4.11.6}$$

4.11.2 Chiral Symmetry

When the Lagrangian density is invariant under the chiral transformation,

$$\psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{4.11.7}$$

then there is another Noether current. Here, $\delta\psi$ as defined in eq.(4.11.2) becomes

$$\delta\psi = i\alpha\gamma_5\psi. \tag{4.11.8}$$

Therefore, a corresponding conserved current for massless Dirac fields becomes

$$j_5^\mu = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{4.11.9}$$

and we have

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0. \tag{4.11.10}$$

The conservation of the axial vector current holds for massless field theory models.

4.12 Hamiltonian Density

The Hamiltonian density $\mathcal{H}$ is constructed from the Lagrangian density $\mathcal{L}$. If the Lagrangian density is invariant under the translation a^μ, then there is a conserved quantity which is the energy momentum tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$. The Hamiltonian density is constructed from the energy momentum tensor of $\mathcal{T}^{00}$.

4.12.1 Hamiltonian Density from Energy Momentum Tensor

Now, the Lagrangian density is given as $\mathcal{L}\left(\psi_i, \partial_0\psi_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right)$. If one considers the following infinitesimal translation a^μ of the field ψ_i and $\psi_i^\dagger$

$$\psi_i' = \psi_i + \delta\psi_i, \quad \delta\psi_i = (\partial_\nu\psi_i)a^\nu,$$

$$\psi_i^{\dagger\prime} = \psi_i^\dagger + \delta\psi_i^\dagger, \quad \delta\psi_i^\dagger = (\partial_\nu\psi_i^\dagger)a^\nu,$$

then the Lagrangian density should be invariant

$$\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\psi_i', \partial_\mu\psi_i') - \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu\psi_i)$$

$$= \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i}\, \delta\psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)}\, \delta(\partial_\mu \psi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i^\dagger}\, \delta\psi_i^\dagger + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i^\dagger)}\, \delta(\partial_\mu \psi_i^\dagger) \right] = 0. \tag{4.12.1}$$

Making use of the Lagrange equation, one obtains

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i}\, (\partial_\nu \psi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)}\, (\partial_\mu \partial_\nu \psi_i) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)}\, \partial_\nu \psi_i \right) \right] a^\nu$$

$$+ \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i^\dagger}\, (\partial_\nu \psi_i^\dagger) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i^\dagger)}\, (\partial_\mu \partial_\nu \psi_i^\dagger) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i^\dagger)}\, \partial_\nu \psi_i^\dagger \right) \right] a^\nu$$

$$= \partial_\mu \left[\mathcal{L} g^{\mu\nu} - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)}\, \partial^\nu \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i^\dagger)}\, \partial^\nu \psi_i^\dagger \right) \right] a_\nu = 0. \tag{4.12.2}$$

Energy Momentum Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$

Therefore, if one defines the energy momentum tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ by

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)}\, \partial^\nu \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i^\dagger)}\, \partial^\nu \psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \tag{4.12.3}$$

then, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ is a conserved quantity, that is

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0.$$

This leads to the definition of the Hamiltonian density $\mathcal{H}$ in terms of $\mathcal{T}^{00}$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{T}^{00} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_i)}\, \partial^0 \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_i^\dagger)}\, \partial^0 \psi_i^\dagger \right) - \mathcal{L}. \tag{4.12.4}$$

4.12.2 Hamiltonian Density for Free Dirac Fields

For a free Dirac field with its mass m, the Lagrangian density becomes

$$\mathcal{L} = \psi_i^\dagger \dot{\psi}_i + \psi_i^\dagger \left[i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m\gamma^0 \right]_{ij} \psi_j. \tag{4.12.5}$$

Therefore, we find the Hamiltonian density as

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}^{00} = \bar{\psi}_i \left[-i\gamma_k \partial_k + m \right]_{ij} \psi_j = \bar{\psi} \left[-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m \right] \psi. \tag{4.12.6}$$

Hamiltonian for Free Dirac Fields

The Hamiltonian H is obtained by integrating the Hamiltonian density over all space

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3r = \int \bar{\psi}\, [-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m]\, \psi\, d^3r. \qquad (4.12.7)$$

In classical field theory, this Hamiltonian is not an operator but is just the field energy itself. However, this field energy cannot be evaluated unless one knows the shape of the field $\psi(x)$ itself. Therefore, one should determine the shape of the field $\psi(x)$ by the equation of motion in the classical field theory.

4.12.3 Role of Hamiltonian

The classical field Hamiltonian itself is not useful. This is similar to the classical mechanics case in which one has to derive the Hamilton equations in order to calculate physical properties of the system, and the Hamilton equations are equivalent to the Lagrange equations in classical mechanics.

Classical Field Theory

In classical field theory, the situation is just the same as the classical mechanics case. If one stays in the classical field theory, then one should derive the field equation from the Hamiltonian by the functional variational principle.

Quantized Field Theory

The Hamiltonian of the field theory becomes important when the fields are quantized. In this case, the Hamiltonian becomes an operator, and thus one has to solve the eigenvalue problem for the quantized Hamiltonian $\hat{H}$

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \qquad (4.12.8)$$

where $|\Psi\rangle$ is called *Fock state* and should be written in terms of the creation and annihilation operators of fermion and anti-fermion. The space spanned by the Fock states is called *Fock space*. In normal circumstances of the field theory models such as QED and QCD, it is practically impossible to find the eigenstate of the quantized Hamiltonian. The difficulty of the quantized field theory comes mainly from two reasons. Firstly, one has to construct the vacuum state which is composed of infinite many negative energy particles interacting with each other. The vacuum state should be the eigenstate of the Hamiltonian

$$\hat{H}|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle,$$

where E_Ω denotes the energy of the vacuum and it is in general infinity with the negative sign. The vacuum state $|\Omega\rangle$ is composed of infinitely many negative energy particles

$$|\Omega\rangle = \prod_{\boldsymbol{p},s} b^{\dagger(s)}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle\rangle,$$

where $|0\rangle\rangle$ denotes the null vacuum state. In the realistic calculations, the number of the negative energy particles must be set to a finite value, and this should be reasonable since physical observables should not depend on the deep negative energy particles.

4.13 Variational Principle in Hamiltonian

Now, one can derive the equation of motion by requiring that the Hamiltonian should be minimized with respect to the functional variation of the state $\psi(\boldsymbol{r})$.

4.13.1 Schrödinger Field

When one minimizes the Hamiltonian

$$H = \int \left[-\frac{1}{2m}\psi^\dagger \boldsymbol{\nabla}^2\psi + \psi^\dagger U \psi \right] d^3r \tag{4.13.1}$$

with respect to $\psi(\boldsymbol{r})$, then one can obtain the static Schrödinger equation.

Functional Derivative

First, one defines the functional derivative for an arbitrary function $\psi_i(\boldsymbol{r})$ by

$$\frac{\delta\psi_i(\boldsymbol{r}')}{\delta\psi_j(\boldsymbol{r})} = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{4.13.2}$$

This is the most important equation for the functional derivative, and once one accepts this definition of the functional derivative, then one can evaluate the functional variation just in the same way as normal derivative of the function $\psi_i(\boldsymbol{r})$.

Functional Variation of Hamiltonian

For the condition on $\psi(\boldsymbol{r})$, one requires that it should be normalized according to

$$\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\, d^3r = 1. \tag{4.13.3}$$

In order to minimize the Hamiltonian with the above condition, one can make use of the Lagrange multiplier and make a functional derivative of the following quantity with respect to $\psi^\dagger(\boldsymbol{r})$

$$\begin{aligned} H[\psi] = & \int \left[-\frac{1}{2m}\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}'^2\psi(\boldsymbol{r}') + \psi^\dagger(\boldsymbol{r}')U\psi(\boldsymbol{r}') \right] d^3r' \\ & -E\left(\int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\, d^3r' - 1 \right), \end{aligned} \tag{4.13.4}$$

where E denotes a Lagrange multiplier and just a constant. In this case, one obtains

$$\frac{\delta H[\psi]}{\delta\psi^\dagger(\boldsymbol{r})} = \int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \left[-\frac{1}{2m}\, \boldsymbol{\nabla}'^2\psi(\boldsymbol{r}') + U\psi(\boldsymbol{r}') - E\psi(\boldsymbol{r}') \right] d^3r' = 0. \tag{4.13.5}$$

Therefore, one finds

$$-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\boldsymbol{r}) + U\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{4.13.6}$$

which is just the static Schrödinger equation.

4.13.2 Dirac Field

The Dirac equation for free field can be obtained by the variational principle of the Hamiltonian eq.(4.12.7). Below, we derive the static Dirac equation in a concrete fashion by the functional variation of the Hamiltonian.

Functional Variation of Hamiltonian

For the condition on $\psi_i(\boldsymbol{r})$, one requires that it should be normalized according to

$$\int \psi_i^\dagger \psi_i(\boldsymbol{r})\, d^3r = 1. \tag{4.13.7}$$

Now, the Hamiltonian should be minimized with the condition of eq.(4.13.7)

$$H[\psi_i] = \int \psi_i^\dagger(\boldsymbol{r}) \left[-i(\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla})_{ij} + m(\gamma^0)_{ij} \right] \psi_j(\boldsymbol{r})\, d^3r$$

$$-E \left(\int \psi_i^\dagger(\boldsymbol{r}) \psi_i(\boldsymbol{r})\, d^3r - 1 \right), \tag{4.13.8}$$

where E is just a constant of the Lagrange multiplier. By minimizing the Hamiltonian with respect to $\psi_i^\dagger(\boldsymbol{r})$, one obtains

$$(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta)\, \psi(\boldsymbol{r}) - E\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{4.13.9}$$

which is just the static Dirac equation for free field.

関連図書

[1] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[2] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[3] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[4] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[5] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[6] R. Feynman and M. Gell-Mann, “Theory of the Fermi Interaction,” Phys. Rev. vol. 109, pp. 193−198, Jan. 1958.

[7] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” Phys. Rev. Lett. vol. 19, pp. 1264−1266, Nov. 1967.

[8] A. Salam, In Elementary particle physics (Nobel Symposium No. 8), Ed. N. Svartholm; Almqvist and Wilsell, Stockholm (1968)