物理学講義　：　普通の物理学

藤田　丈久

(All Physics Institute)

はじめに

現在，科学 (物理) 関連の紙媒体の出版が難しくなっているということは事実であろう．特に，良い本を出版しようとしても，それがあまり売れない可能性が高く，ますます中身の濃い科学本の出版に二の足を踏む出版社が多い事は理解できない事ではない．その分，どうしても悪書を出版する事になりがちであるが，しかしそれを続けていると，長期的にみればそれは読者を失う事になると思われる．このディレンマをどう解決すれば良いかという問題は難しすぎて，その解決の方向はまだ見えてはいない．

また物理関連の映像を作成しているマスコミ関係の科学担当者にとって，現在，その指針を何処に持ってきたらよいのか分からないため深刻な混乱状態となっていると思われる．このため，何処かの有名 (大学) 教授の意見を参考にした映像作りに走らざるを得ない状況になっているが，こうした大学教授の大半が物理音痴であるため，混乱に拍車を掛けた状態が続いている．

この数年，物理関連の報道は素人さえも首を傾げたくなるレベルが続き，これはどうにもしようがない状態となっている．実際，しばらく前にはニュートリノが光速よりも速いという特集を組む羽目になってしまったマスメディアもあったが，宇宙論ではほとんど SF まがいの内容の CG の映像が依然として出回っている．

現在，この様な状況を何とか改善して行く必要に迫られている．それでここでは，科学関連の出版社やマスコミ関連の科学担当者で地道な努力をしている人達のために，今後の物理関連の方向性について講義形式で簡単な解説をして行こうと思う．そしてまずは各自が物理学における基礎的な考え方をしっかりと会得する必要がある．たとえ４０歳代後半になっていても，これから基礎的な考え方と正しい知識を自分のものにして行けば，新たな展開が可能になる事は十分，あり得る

と思われる．そうすれば知識だけで言葉を発している「専門家」の意見を鵜呑みにしないで，自分の言葉で物理学上の問題点を判断できるようになるものと思っている．

この講義ノートの読者は物理学科４年次の物理力を持っておられるものと仮定している．読者の中には、昔はその実力があったけど，今はなくなったと言う人がいるかも知れないが，この場合，昔の力を再び付け直すように勉強して頂く事になる．その力さえあれば必ず理解できるようにと最大限の努力をして書いているので，頑張って理解して，自分のものにして頂きたいと思っている．

物理学では数学を言語として使用している．分からない数学 (言語) がでてきた場合，誰かに質問する事が一番良い方法である． この講義ノートの中には宿題が出ている．これを自分で解いてみる事が物理を深く理解する唯一の方法であり，必ず実行する事が必要である．

(２０１９年３月)

[備考]　一般相対性理論が物理的には無意味な理論であると言う事が厳密に証明されている。それで、この関連の問題を第６章と第７章に入れてある。これは易しいとは言えないが、しかしよく考えれば理解できるものと思っている。

なお、この講義ノートの中の宿題に関して、それ程易しいとは言えないであろう。そして疑問点がある場合、よろず研(https://allphysics.org/)のメンバーに質問する事がベストであろうと考えている.

(２０２５年５月)

目 次

第１章　相対性理論 **2**

1.1 空間 2

1.2 座標系 2

1.2.1 座標の原点 3

1.2.2 デカルト座標系 3

1.3 時間 4

1.3.1 時間の原点 4

1.3.2 時間依存性 4

1.4 相対性理論の基礎 5

1.4.1 Lorentz 変換 5

1.4.2 相対性理論の重要性 6

1.4.3 相対性理論の検証 6

1.5 一般相対性理論 7

1.5.1 超・簡単化された Einstein 方程式 7

1.5.2 一般相対性理論と重力理論の関係 7

1.5.3 一般相対性理論は物理的には無意味 8

1.6 Homework Problems 9

1.6.1 問題 1 9

1.6.2 問題 2 9

1.6.3 問題 3 9

1.6.4 問題 4 10

1.6.5 問題 5 10

第２章　電子の物理学 **11**

2.1 量子論 11

2.1.1 原子 11

2.1.2 Schrödinger 方程式 12

2.1.3 時間に依らない Schrödinger 方程式 12

2.1.4 Ehrenfest の定理 14
2.1.5 フェルミオンとボソン 15
2.1.6 自由電子 16
2.1.7 周期的境界条件 17
2.2 電子と電磁場 18
2.2.1 静電気 18
2.2.2 クーロン力 18
2.2.3 圧電効果 18
2.2.4 電流と電池 19
2.2.5 Maxwell 方程式 19
2.2.6 電子と電磁場の相互作用 20
2.2.7 Lorentz 力 22
2.2.8 モーター 22
2.3 電流：導体と半導体 23
2.3.1 導体 23
2.3.2 半導体 23
2.3.3 磁化と磁石 24
2.4 電子の物理学：まとめ 25
2.4.1 電荷とは何か？ 25
2.4.2 電流とは何か？ 25
2.5 Homework Problems 27
2.5.1 問題 1 27
2.5.2 問題 2 27
2.5.3 問題 3 27
2.5.4 問題 4 27
2.5.5 問題 5 28
2.5.6 問題 6 28
2.5.7 問題 7 28
2.5.8 問題 8 28
2.5.9 問題 9* 28
2.5.10 問題 10 29
2.5.11 問題 11 29
2.5.12 問題 12 29
2.5.13 問題 13 29
2.5.14 問題 14 29

2.5.15 問題 15 29
2.5.16 問題 16 30
2.5.17 問題 17* 30
2.5.18 問題 18 30

第３章　電磁波の物理学 31
3.1 電磁波 31
3.1.1 光の理論 33
3.1.2 フォトン (光子) 33
3.1.3 電子と電磁場の相互作用 34
3.1.4 フォトンの状態関数 34
3.1.5 電磁波の発振機構 35
3.2 光と波 36
3.2.1 光のドップラー効果 36
3.2.2 音波 37
3.2.3 音のドップラー効果 38
3.2.4 地震波 38
3.3 フォトンの性質：波長と偏極ベクトル 39
3.3.1 空の青さと光の散乱 39
3.3.2 Rayleigh 散乱 40
3.3.3 黒体輻射 41
3.3.4 太陽光発電 42
3.3.5 電子レンジ (Microwave oven) 42
3.4 Homework Problems 44
3.4.1 問題 1 44
3.4.2 問題 2 44
3.4.3 問題 3 44
3.4.4 問題 4 44
3.4.5 問題 5 44
3.4.6 問題 6 44
3.4.7 問題 7 45
3.4.8 問題 8 45
3.4.9 問題 9* 45
3.4.10 問題 10 45
3.4.11 問題 11 45
3.4.12 問題 12 45

3.4.13 問題 13 46
3.4.14 問題 14 46
3.4.15 問題 15 46
3.4.16 問題 16 46
3.4.17 問題 17* 46
3.4.18 問題 18 47

第４章　重力のお話 48
4.1 重力 48
4.1.1 重力は常に引力 48
4.1.2 慣性質量と重力質量 49
4.2 電磁気学との関連性 50
4.2.1 電磁場と重力場の相互作用 50
4.2.2 一般相対性理論の影響 51
4.3 惑星の運動 53
4.3.1 平面運動 53
4.3.2 軌道は楕円 53
4.3.3 観測量は周期 54
4.3.4 水星と他の惑星との相互作用 54
4.3.5 太陽系外小惑星 (1I/2017 U1) 55
4.3.6 天の川銀河とアンドロメダとの衝突時期 56
4.4 新しい重力理論 57
4.4.1 重力場の Poisson 方程式 58
4.4.2 地球公転の周期 59
4.4.3 重力波 60
4.5 宇宙論 61
4.5.1 宇宙の構成粒子 61
4.5.2 星 61
4.5.3 銀河系 62
4.5.4 超銀河宇宙 62
4.5.5 無限宇宙 64
4.6 Homework Problems 65
4.6.1 問題 1 65
4.6.2 問題 2 65
4.6.3 問題 3 65
4.6.4 問題 4 65

4.6.5 問題 5 65
4.6.6 問題 6 66
4.6.7 問題 7 66
4.6.8 問題 8 66
4.6.9 問題 9* 66
4.6.10 問題 10 66
4.6.11 問題 11 66
4.6.12 問題 12 67
4.6.13 問題 13 67
4.6.14 問題 14 67
4.6.15 問題 15 67
4.6.16 問題 16 67
4.6.17 問題 17 68
4.6.18 問題 18 68

第 5 章 ブラックホールのお話 69
5.1 ブラックホールとは何か？ 69
5.1.1 M87 銀河の核 70
5.1.2 科学担当者の責任か？ 71
5.1.3 ブラックホールと中性子星 71
5.1.4 宇宙の話とロマン 71
5.2 ブラックホールの物理 72
5.2.1 中性子星 72
5.2.2 銀河の核 72
5.2.3 ブラックホールの表面 72
5.2.4 空間の歪みは物理音痴の戯言 73
5.3 一般相対性理論のお話とアインシュタイン 74
5.3.1 相対性理論とその重要性 74
5.3.2 物理学の基本方程式 75
5.3.3 アインシュタインの物理センスについて 75
5.4 物理学と職人 76
5.4.1 職人の重要性 76
5.4.2 理論物理職人の激減 76

第６章　何故、一般相対性理論は無意味か？ **77**
6.1　相対性理論 77
6.1.1　Lorentz 変換 77
6.1.2　Lorentz 不変量 78
6.1.3　Minkowski 空間 78
6.2　一般化の危険性 79
6.2.1　$(ds)^2$ の不変性 79
6.2.2　$(ds)^2$ の一般化表現の意味 79
6.2.3　$g^{\mu\nu}$ の物理的な意味 79
6.3　一般相対性理論 80
6.4　負の遺産 80

第７章　力学の相対論効果 **81**
7.1　重力付加ポテンシャル 81
7.1.1　非可積分ポテンシャル 82
7.1.2　軌道の式がデカルト座標に戻せない！ 83
7.1.3　軌道の不連続性 83
7.1.4　軌道の不連続性と水星近日点 84
7.2　非可積分ポテンシャルの摂動計算 85
7.2.1　摂動計算の最低次項 86
7.2.2　摂動計算の高次項 86
7.3　新しい重力理論の予言 87
7.3.1　重力付加ポテンシャルによる周期のズレ 87
7.3.2　地球公転周期のズレ（うるう秒） 88
7.3.3　うるう秒の起源 88

第１章　相対性理論

物理学は自然現象を理解する事を目的とした学問である．どの理論体系にしても，これは対応する自然現象を理解する事が目標であり，そしてそれがすべてである．従って，理論模型が自然現象と遊離して一人歩きしたら非常に危険なことである．現在までのところ基礎的な場の理論模型はすべて正常な理論体系をなしている．しかしながら一般相対性理論だけが対応する自然現象が存在していない理論となっている．それはその方程式が座標系に対する方程式となっているからである．

1.1　空間

自然現象は空間内で起こっている．この場合，大半の読者は空間とは何かと考えた事があるものと思う．しかしながら空間とは物質が存在しない限り，認識が出来ないものである．物理学においてはこのため，空間に座標系を導入する．そしてそれぞれの軸を x 軸, y 軸, z 軸と定義する．この座標系が空間をあらわし，この系により自然現象を記述する事になる．

1.2　座標系

物理学においては空間に座標系を導入して質点の運動を記述することになる．座標系とは人が空間に仮想的に軸を設けて，それにより質点の運動を記述する事になっている．その座標系の中の１点の座標を (x, y, z) で表している．これを $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$ と書いた方が便利であるため，良くこのベクトル表示を取っている．しかし場の理論における計算では，むしろ成分 x_i で書いた方が計算が楽になるため成分表示が一般的である．結局，どれが便利であるかと言う問題である．

1.2.1　座標の原点

座標系を導入する場合，その原点を決める必要がある．何処にしたら良いのであろうか？一瞬，原点の取り方によって，自然現象の記述が変わってしまったらどうしようと言う不安を持つ人がいたら，それは非常に正常な反応と言う事になる．例えば，地球の公転運動を記述しようとしたら太陽を原点にしないとうまく行かないないのではないかと考えるのは不思議な疑問ではない．実際問題としては，太陽を原点に取った方が簡単にはなっているが，別に何処を原点に取っても地球の公転運動は正しく記述される．この原因は物理学におけるすべての力が平行移動に対して不変である事に拠っている．結論として，座標の原点は何処にとっても構わないが，なるべく記述が便利なように選択するのがよい．例えば，地球の公転を記述したい時は太陽を原点に取ればよく，また地球の自転を議論したい場合は地球の中心を原点に取ればよいと言う事である．

1.2.2　デカルト座標系

座標系は数学の基本である．座標系を導入する事により様々な記述が可能になり，言語としては最高に便利である．座標系の基本はデカルト座標 (x, y, z) であり，これがすべての出発点である．この場合，座標は自然に定義されるし最もわかり易い事は事実である．しかし物理の方程式を解こうとする場合，ポテンシャルが極座標表示で書かれている場合が多いため，極座標表示も重要になる．

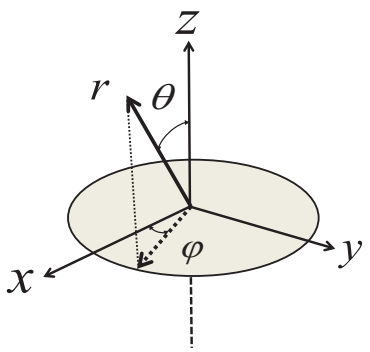

図 1.1: 座標系

- **極座標：** (r, θ, φ) **と書いて** $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ **である．**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdydz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

1.3　時間

時間とは何かと言う疑問に対しては，物理屋が答える事は出来ない．時間の流れは地球の公転により測定したり，原子の放出する光の周波数によって時間を測ったりしているが，これは「時間とは何か？」が分かったわけではない．この場合，人間が時系列を作成して，その時間を記述しているからであり時系列を認識している事は確かではある．しかしそれは時系列を通して時間を認識している事になっていて，時間そのものを認識できているわけではない．

時間は一様に流れていると仮定されている．そしてそれと矛盾する現象は現在まで見つかってはいない．この時間の一様性はエネルギー保存と関係している事を見ても，厳密に成り立っていると考えられている．ちなみに，空間の一様性 (平行移動による不変性) は運動量保存と関係している．

1.3.1　時間の原点

時間の原点はどのように選んだらよいのであろうか？これは今考えている現象に対して，適当に時間の始点を選べばよい．物理学においては，質点の時間発展を求める場合があるが，この場合，観測者が考えている時間の始点から質点の時間発展を計算すれば十分である．

1.3.2　時間依存性

物理学においては「物理量」が時間によっているかどうかは非常に重要な点である．もしその物理量が時間に拠っていなければ，それはずっと同じでいる事になり保存量であると言う言い方をする．例えば，地球は太陽の周りを楕円運動しているが，その軌道は平面上にある．何故，地球が平面上を運動するのかと言う問題は地球が持っている角運動量の保存則と密接な関係にある．この角運動量が保存しているため，この角運動量の方向を決める事ができる．そうすると地球の運動はこの角運動量と直交することが簡単に証明できるため，地球の運動が平面になる事が証明できるのである．

1.4 相対性理論の基礎

物理学の基礎方程式はすべてこの時間と空間の中での自然界の運動を記述しようとする学問である．この場合，前述したように座標系を指定するが，ここで重要な原理が存在している．今，A と言う座標系に対して B と言う座標系が等速直線運動をしているとしよう．この時，すべての物理的な観測量は A 系と系 B で同じであると言う事が仮定されている．これを相対性原理と言う．これが成り立たないと，地球上で発展させてきた理論体系が他の宇宙の星では成り立たない可能性がある．これでは折角頑張って理論体系を作ると言う意味がなくなってしまう事になっている．現在までの膨大な検証結果，この相対性原理と矛盾する現象は見つかってはいない．

それでは A 系と系 B の間にどのような関係式を仮定すれば，相対性原理に矛盾しなくてすむのであろうか？これは良く知られており，Lorentz 変換と呼ばれる変換に対して運動方程式が不変になっていれば良いと言う事である．この Lorentz 変換は座標系間の変換となっていて，この場合，変換を行う空間の事が Minkowski 空間と呼ばれているものである．但し，これは４次元空間ではない．我々の空間は勿論，３次元であり，時間を空間の一部と同一視とすることは出来ない． Lorentz 変換はこの Minkowski 空間で $s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ と言う量を不変にしている．しかしこれは十分条件ではあるが必要条件とはなっていない．ここで c は光速である．

1.4.1 Lorentz 変換

今，B 系に対して A 系が一定速度で x 軸に沿って運動している場合を考えよう．この場合，A 系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている．今の場合，B 系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時，A 系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり，時間は別のものになる．それは観測者の時間と考えればよい．この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{1.1}$$

であり， γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式は Maxwell 方程式が A 系でも B 系でも同じ形の微分方程式になる要請を充たすように求められたものである．この Lorentz 変換は『どの慣性系においても観測量が同じである』と言う相対性理論の基礎に対して必要十分条件となっている．

式 (1.1) で，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \tag{1.2}$$

となり，Galilei 変換の式と一致している．従って，普段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱っても間違える事は無い．実際，地球の公転速度 v が一番速いが，これは $v \simeq 10^{-4}\,c$ であり，光速より十分遅い事がわかる．

1.4.2　相対性理論の重要性

この Lorentz 変換自体は極めて単純であり，誰でも簡単にチェックできる式である．しかしこの物理を深く理解することは結構，難しいものとなっている．余程，しっかり考えないと何を言っているか分からない可能性がある．結局，Lorentz 変換は Maxwell 方程式がどの系でも同じになると言う要請から来ている事は前述した通りである．ここでしっかり考える必要があるのは「どの系でも物理的な観測量は同じである」と言う要請である．この「物理的観測量とは何か？」と言う問いかけは極めて重要であり，きちんと自分の言葉で理解しておく必要がある．この講義では少しずつ，物理的観測量とは何かと言う問題に触れて，解説して行こう．

1.4.3　相対性理論の検証

相対性理論というとどうしても歴史的に説明している場合が大半であろうが，勿論，それも重要ではある．しかしここでの講義では科学史的に解説をするというスタンスは取らないで科学の論理として合理性の観点から解説を試みている．

現在，物理学で扱っているすべての自然現象は場の理論の形式で理解されている．そしてこの場の理論は必ず Lorentz 変換に対する不変性を持っている．どの理論形式も Lorentz 不変である事は絶対条件である．その意味において，系の相対性は現代物理学の基礎であり，これと矛盾するいかなる理論も受け入れる事は出来ない．実験的にも系の相対性は膨大な検証の下に確立している．この事をしっかり理解する必要がある．例外が存在しない事ぐらい，しっかり考えられる人ならば，誰でも理解できる事であろう．

1.5 一般相対性理論

Einstein が一般相対性理論に関する論文を発表したのは１世紀近く前のことである．この方程式は星が分布していると計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が変更を受けるだろうと言う方程式である．しかしながらその変更の物理的な理由や原因はすべて仮定されたものであり，自然界からの要請ではない．

1.5.1 超・簡単化された Einstein 方程式

Einstein 方程式とは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式であり，微分幾何の言葉で書かれているため，見かけ上は複雑になっている．ここではこの方程式を時間と空間１次元と近似して方程式を書いておこう．すなわち $g_0(x),\ g_1(t)$ に対する 2 回の微分方程式のことである．このうちで $g_0(x)$ に対する方程式を

$$\frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} = 2G\varrho_0(x) \tag{1.3}$$

と書こう．これは超簡単化された方程式ではあるが，その基本構造は４次元の Einstein 方程式と同じである．$\varrho_0(x)$ は質量 M の物質により生じた物理的な作用である．これは４次元の Einstein 方程式ではエネルギー・運動量テンソルに対応していて，基本的には星の質量分布である．

- 質量分布記述の座標系： ここで問題なのは $\varrho_0(x)$ を記述する座標系は古い座標系と考えられるが，これはどこで設定されたのであろうか？質量分布があると座標系の計量が変化を受けるとしても，それと $\varrho_0(x)$ を記述する座標系との関係が良くわからない．これは因果律を破っていると考えられている．

1.5.2 一般相対性理論と重力理論の関係

一般相対性理論がこれまで信じられてきた主な理由は Einstein 方程式から重力場のポアソン型方程式が導出されると考えられていたからである．ところがこの導出を証明することは実は不可能である．その証明には物理的に正当化できない方程式が仮定されているからである．その式とは

$$g_0(x) \simeq 1 + 2\phi_g \tag{1.4}$$

である．こうすると確かに，1 次元の重力ポアソン型方程式が導出されることが簡単に確かめられる．これは３次元重力場でも同じである．

● 力学変数と座標系：　ところが，この仮定の式 (1.4) は物理的に無意味である事がすぐにわかる．それは，計量テンソルは座標系であるのに対して，重力場 ϕ_g は無次元ではあるが，力学変数である事に依っている．これは異なるカテゴリーを足し算しているため，どのように頑張っても物理学の式として承認することには無理がある．

● 一般相対性理論は相対性理論か？：　これまで見てきたように，一般相対性理論は計量テンソルを決める方程式である．しかし星が分布していたらそこの計量が座標の関数として決まるという事は相対性理論ではない．むしろ系の相対性とは矛盾してしまうのであるが，人々は何故，これでよいと思ったのであろうか？

● 重力理論の今後：　上記に見たように，一般相対性理論が重力理論と無関係であることが証明されている．それでは今後，重力理論はどうなるのであろうか？ この疑問に対しては，幸い新しい重力理論が提案されており，これまでの重力関係のすべての観測結果はこの新しい重力理論により矛盾なく説明されることがわかっている．とくに慣性質量と重力質量の等価性が自然な形で証明された事実が非常に重要である [5]．

1.5.3　一般相対性理論は物理的には無意味

現在、一般相対性理論は物理的には無意味である事が厳密に証明されている。それで、その証明を第６章に書き足しているので参考にして欲しいと思う。Einstein 方程式は数学的には間違っていると言うわけでは無いが、自然界とは無関係な方程式であったと言う事である。

1.6 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事．

1.6.1 問題 1

Lorentz 変換の式 (1.1) により，s^2 を計算してこれがどの系でも同じになる事を確めよ．具体的には $s^2 = s'^2$ を示せばよい．

1.6.2 問題 2

座標の微分量として

$$dx^\mu \equiv (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \equiv (cdt, dx, dy, dz) \tag{1.5}$$

$$dx_\mu \equiv (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{1.6}$$

を導入しよう．この上付き，下付きの書き方は Bjorken-Drell が便利さのために導入したシンボルである．例えば スカラーの定義は

$$dx_\mu dx^\mu \equiv dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 \tag{1.7}$$

$$\equiv (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{1.8}$$

となっている．このように μ が繰り返しでてきたら，これは
$\mu = 0, 1, 2, 3$ の和を意味するように約束をした事になっている．ただそれだけの事である．ここで Minkowski は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1.9}$$

によって導入した．この場合，$g^{\mu\nu}$ はどう書けているか？

1.6.3 問題 3

Einstein は一般相対性理論でこの計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時間・空間の関数であるとした．この時，$(ds)^2$ の Lorentz 不変性はどうなると思うか考えよ．

1.6.4　問題 4

真空中を古典的な波が伝播したとしたら，それは系の相対性と矛盾している．重力波を主張する人々はどのように伝播したと思っているのか，各自，自分の言葉で考えて見よ．

1.6.5　問題 5

音波は媒質 (空気や水) の振動により伝播している．この場合，音源 (例えば救急車) と観測者の間の相対性はどうなっていると思うか？

(注) 音波のドップラー効果の式の導出が難しいのは，系の相対性と関係している．それに対して，光のドップラー効果の式の導出は非常に簡単である．これは後の講義で解説しよう．

第２章　電子の物理学

ミクロの世界の自然現象は基本的に電子の運動により支配されている．その運動は量子力学によって理解する事ができるので，まずは量子力学の基本を正確に理解する事が大切な作業となっている．この量子力学においては何が観測量になるかと言う問いかけが重要であり，それを自分の言葉で理解する必要がある．

日常生活における物理現象の大半はやはり電子の運動によって支配されている．この場合，マクロスケールの数の電子が関与していると，これは電磁気学の問題となっている．但しその時に現れる電流などは量子力学の問題でもあり，さらに多体問題としての複雑さもある．このため，まだきちんとは理解できていない現象が多数，存在している．またマクロスケールな自然現象では重力の影響を受ける場合があり，特に溶液における物理現象を理解するためには重力が何らかの役割をしていると考えられる．

2.1　量子論

量子論はミクロの世界を記述する理論体系であり，非常に信頼できるものである．現在までのところ，この量子論と矛盾する現象は見つかっていない．これは電磁気学と並んで自然界を記述する上での基礎理論体系としては最も重要である．

2.1.1　原子

原子の中心には原子核があり，その原子核は陽子と中性子で構成されている．その陽子と中性子は核子と呼ばれており，この核子間には強い相互作用が働いている．この核力により核子は強く束縛されていて，その束縛エネルギーは電子が原子に束縛されている場合 (数 eV) の約百万倍 (数 MeV) はある．

一方，原子の性質は原子核の周りに束縛されている電子によって決められている．最も小さな原子は水素原子であり，これはその中心に陽子が 1 個あり，電子が 1 個束縛されている．この時の相互作用はクーロン力であり，この電子の振る舞いを記述する方程式が Schrödinger 方程式と呼ばれている量子力学の基本方程式である．

2.1.2　Schrödinger 方程式

ここに Schrödinger 方程式を書いて解説するが，しかしこれを読んでいる読者に取っては簡単に理解できるところではないと思っている．特に，この方程式を解くには非常に多くの数学的な技術が必要であり，物理の専門家を目指さない限り「その解法」を覚える事が必須とは言えない．しかしこの方程式は非常に重要であり，その関連ででてくる考え方そのものをしっかり理解して各自の考える力をより高いレベルのものにして欲しいと考えている．特に，状態関数という物理量が量子力学の中心的な役割を果たしているので，これが物理的にどういう事なのかを自分で問いかけながら読み進めて欲しいと思う．

電子の運動は状態関数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ で記述される．量子力学の根本はこの状態関数によって物理的な観測量，例えばエネルギー固有値などを計算する事である．その状態関数に対する方程式が Schrödinger 方程式であり

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\hat{H}\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.1}$$

と書かれる．$\hat{H}$ はハミルトニアンと呼ばれ２階の微分を含む空間座標の関数である．この式 (2.1) の左辺に複素数「i」が現れているが，これは方程式が時間反転 $(t\to -t)$ に対して不変性を保つためである．一般に電子の束縛状態を取り扱う場合 $\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(\boldsymbol{r})}$ と置いて時間依存性をはずして議論する．

2.1.3　時間に依らない Schrödinger 方程式

この場合 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対する Schrödinger 方程式は

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}),\qquad \text{但し}\qquad \hat{H}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+U(r)\right] \tag{2.2}$$

となっていて，$\psi(\boldsymbol{r})$ は時間によっていない．ここでこのハミルトニアン $\hat{H}$ は１粒子系のものと仮定している．m は電子の質量，$U(r)$ は電子が感じるポテンシャルである．E は電子状態のエネルギーであり，これをエネルギー固有値と呼んでいる．ハミ

ルトニアン $\hat{H}$ はエルミート演算子であり，従ってその固有値 E は常に実数である．この微分方程式を解くと波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ とエネルギー固有値 E が同時に求まる事になっている．その時に状態を指定する量子数 n が現われてくる．そしてこの量子数 n によって指定されるために，状態関数に n をくっ付けて $\psi_n(\boldsymbol{r})$ で表している．エネルギー固有値も同じで量子数 n によって指定されるので E_n と書くのが一般的である．

● ポテンシャル $U(r)$ は他の粒子との相互作用： $U(r)$ は電子が感じるポテンシャルであり，座標 r はポテンシャルを生み出す中心から測られている．このポテンシャル $U(r)$ は電子以外の何者か，例えば，水素原子では陽子が作っているものである．この場合のポテンシャルはクーロン力 $(U(r) = -\frac{e^2}{r})$ であり，この引力で電子は陽子に束縛されている．この時，陽子は止まっているとしているが陽子は電子と比べて約２０００倍重いから充分良い近似である．

● 量子数： 量子力学で最も重要な概念が量子数であり，これが状態を指定している．人間を識別する場合，身長や性別を用いる場合があるが，多少の類似性はある．電子の場合，それ自体を識別する方法はないし，一般的には識別する理由もない．しかし原子の中に幾つかの電子が存在する場合，どの電子が外場 (例えば光) との反応にアクティブなのかを知っておく必要があり，それを他の電子から識別する必要がある．この場合，その電子の状態関数に量子数を指定しておけば，確かに識別できるわけである．従って，この電子は $3s$ 電子であるなどと量子数をもって記述している．

2.1.4 Ehrenfest の定理

量子力学の方程式から Newton 方程式を導出する方法のことを古典力学極限と言う．それには $\hbar \to 0$ の極限をとる方法などが知られているが，ここでは Ehrenfest の定理を紹介しよう．Schrödinger 方程式から Newton 方程式を導出したのが Ehrenfest の定理と呼ばれるものである．この定理を紹介する前に，念のため期待値について簡単な解説をして置こう．

● 期待値：　あるオペレータ (演算子) $\hat{\mathcal{O}}$ (基本的には r と p の関数) の期待値とはこの演算子を状態関数で挟んで積分することである．式で書くと

$$\langle \Psi | \hat{\mathcal{O}} | \Psi \rangle \equiv \int \Psi^\dagger(\boldsymbol{r}) \hat{\mathcal{O}} \Psi(\boldsymbol{r}) d^3 r \tag{2.3}$$

である．左辺はブラ・ケット表示と呼ばれているが，これは簡便さのためであり物理的な理由は全くない．この場合，期待値は内積の振る舞いをするため，左辺の表示は使い勝手が良いことは確かである．

● 時間発展の方程式：　今，演算子を $\hat{\mathcal{O}}$ としてその期待値の時間発展をみて行こう．Schrödinger 方程式はハミルトニアンを $\hat{H}$ とすると

$$i\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\boldsymbol{r},t), \qquad -i\frac{\partial \Psi^\dagger(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi^\dagger(\boldsymbol{r},t) \tag{2.4}$$

である．この場合，演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値 $\langle \Psi | \hat{\mathcal{O}} | \Psi \rangle$ に対する時間微分を行うと

$$i\frac{d}{dt}\langle \Psi | \hat{\mathcal{O}} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{\mathcal{O}} H | \Psi \rangle - \langle \Psi | H \hat{\mathcal{O}} | \Psi \rangle = \langle \Psi | [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}] | \Psi \rangle \tag{2.5}$$

である事がすぐに確かめられる．但し $\boxed{[A,B] \equiv AB - BA}$ である．

● Newton 方程式：　ここで最も簡単な場合として，$\hat{H}$ が

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + U(r) \tag{2.6}$$

で与えられる１粒子系を考えよう．$\hat{\mathcal{O}}$ として座標 r の時は式 (2.5) から

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi | \boldsymbol{r} | \Psi \rangle = \frac{1}{m}\langle \Psi | \hat{\boldsymbol{p}} | \Psi \rangle, \qquad (\text{但し } \hat{\boldsymbol{p}} \equiv -i\hbar\boldsymbol{\nabla}) \tag{2.7}$$

となる．また，運動量 $\hat{p}$ についても同じ計算を実行すると

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi | \hat{\boldsymbol{p}} | \Psi \rangle = -\langle \Psi | \boldsymbol{\nabla} U | \Psi \rangle \tag{2.8}$$

と求まる．古典力学との対応を見やすくするために，古典的な物理量を

$$\boldsymbol{r} \equiv \langle\Psi|\boldsymbol{r}|\Psi\rangle, \qquad \boldsymbol{p} \equiv \langle\Psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\Psi\rangle, \qquad \boldsymbol{\nabla}U(r) \equiv \langle\Psi|\boldsymbol{\nabla}U|\Psi\rangle \tag{2.9}$$

と定義しよう．この時，運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}U(r) \tag{2.10}$$

となり，これは Newton 方程式そのものである．式 (2.9) から明らかなように古典力学の $\boldsymbol{r}$ の時間依存性はすべて Ψ から来ている．

● 力とポテンシャル： Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導出された事には物理的に重要な意味がある．それは量子力学ではポテンシャル $U(r)$ により全て記述されていて，力 $\boldsymbol{F}$ は基本的な物理量ではないことである．従って，古典力学においても力はポテンシャルの微分として捉えるべきである．それでは様々な形の力は何故でてきたのであろうか？これは実は多体系の問題を１体問題に無理やり帰着させると，複雑なポテンシャルが現われるからである．

2.1.5 フェルミオンとボソン

電子はフェルミオンであり，フォトン (電磁波) はボソンである．フェルミオンはスピンと言う自由度を持っていて，それは $\frac{1}{2}$ である．安定なフェルミオンは電子，核子 (陽子と中性子，但し中性子は原子核中でのみ安定) そしてニュートリノである．一方，安定なボソンはフォトンだけである．ところがこのフォトンには静止系が存在しないため，理論的な取り扱いは容易ではない．不安定なボソンとしてウィークボソン ($W^{\pm},\ Z^0$) がある．フォトンと同様，ベクトル粒子であり，このためそのスピンは１である．但し，このスピンは角運動量演算子の固有値ではないし，フォトンの状態関数 (偏極ベクトル) は角運動量の固有関数ではない．しかし回転群の表現からスピン１として扱って良い事がわかっている．

● Pauli 原理： フェルミオンには非常に重要な性質がある．それは Pauli 原理と呼ばれているもので，一つの状態には１個のフェルミオンしか占有できないと言うものであり，これは厳密に成り立っている．この原理はフェルミオン場を反交換関係により量子化することにより導出される事が分かっているため，その意味では現在は原理と言うよりも法則となっている．

● Bose 凝縮： Bose 凝縮と言う言葉があるが，これは単に理論的な主張であり現実の問題に当てはまる現象は存在していない．この理由として，安定な基本粒子と

してはフォトンしか存在していないからである．ウィークベクトルボソンが確かに存在しているが安定な粒子ではない．このためこの粒子の統計的な性質を検証しようがない．さらにフォトンには静止系が存在しないため，統計的な性質は Planck 分布を議論する時に必要になる程度である．一方，複合粒子 (例えば原子) に対して，そのスピンが整数だと Bose 統計に従うはずであると言う主張がある．ところが，この複合粒子に対する Bose 統計と言う考え方に対して，理論的根拠は存在しないし実験的な確証はさらにない．

2.1.6　自由電子

量子力学において自由電子状態をきちんと理解する事はかなり難しく，物理学科の４年次の力では一般的には無理であろう．しかし非常に重要なのでここで解説をしておこう．自由粒子は束縛状態ではないので，その粒子は何処に存在しても構わない事になる．しかしその粒子が「月に存在する可能性」を議論する事は馬鹿げているし，実際には局在している電子を考えて充分である．このため，自由粒子を箱の中に閉じ込めた描像を取るのが正しい手法である．

● 自由粒子のシュレディンガー方程式：　質量 m の質点が自由粒子の場合，そのシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.11}$$

である．自由粒子なのでエネルギー E は正であることに注意しよう．ここで波数 k を $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ と定義すると式 (2.11) は

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.12}$$

と書ける．この微分方程式 (2.12) はすぐに解けて，その一般解は

$$\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + Be^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.13}$$

と書けている．ここで１個条件をつけることが必要となる．

● 運動量演算子の固有状態：　自由粒子は運動量 $\hat{p}$ の固有状態となっている必要がある．それは自由粒子のハミルトニアンと運動量 $\hat{p}$ が交換するため，$\psi(\boldsymbol{r})$ はその同時固有関数になっているからである．よって

$$\hat{\boldsymbol{p}}\psi(\boldsymbol{r}) = \hbar\boldsymbol{k}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.14}$$

である．この場合，この条件式から $A = 0$ か $B = 0$ である事がわかる．ここでは $B = 0$ としよう．この時，式 (2.13) は $\boxed{\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}$ となる．この状態関数の採用によって解の一般性が失われる事はない．

2.1.7 周期的境界条件

固有値を求めるためには境界条件が必要である．自由粒子の場合，粒子を箱の中に閉じ込めて，さらにそこに周期的境界条件を課している．今の場合，粒子を一辺が L の箱に閉じ込めたとして

$$\psi(x,y,z) = \psi(x+L, y+L, z+L) \tag{2.15}$$

が周期的境界条件である．この式に $\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ を代入すると $\boldsymbol{k}$ が

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}, \quad (n_x = 0, \pm1, \pm2, \cdots,\ n_y = 0, \pm1, \pm2, \cdots,\ n_z = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

と求められる．

● 固定端の境界条件： 媒質を伝わる波の波動関数は実数 (sin と cos) である．この場合，境界条件として固定端の境界条件を使っている．媒質の振動は波の存在確率とは無関係であるため，その振動がゼロになっていても不思議な事ではない．それに対して量子力学における自由粒子の状態関数は存在確率と関係しているので，状態関数がゼロになる事はない．実際，$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ がゼロになる事は無く，従って周期的境界条件は自然な条件である．

● 規格化条件： 自由粒子の状態 $\psi(\boldsymbol{r})$ は一辺が L で体積 $V = L^3$ の箱の中に閉じ込められている．従ってこの粒子の状態関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は
$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は整数) となっている．この状態関数が規格化条件を満たす事は簡単に示される．

● 自由粒子のエネルギー固有値 E_n： これらの事より，自由粒子の状態のエネルギー固有値 (eigenvalue) E_n は

$$E_n = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2}\boldsymbol{n}^2 \qquad (\boldsymbol{n}\text{ は整数})$$

と書かれている．ここでは，エネルギー固有値 E_n に箱の長さ L が入っている．この場合，実際の世界ではこの L は充分に大きいのでエネルギー固有値 E_n は連続スペクトルになっている．エネルギー固有値 E_n に L が現れるのは不思議に思われるかもしれないが，物理的な観測量はこの L には依存していない事がわかっている．

2.2　電子と電磁場

電子がマクロスケールの数で存在する場合，その物理的な性質は主に電磁気学の法則に支配される事になり，従ってその振る舞いは電磁気的な相互作用により理解する事ができる．

2.2.1　静電気

電気はすでに紀元前から知られていた．琥珀 (樹脂化石) を毛布で擦ると電気が起こる事がわかっており，従ってこれが Electron (ギリシャ語の琥珀) の起源である事は良く知られている．

- 摩擦帯電：　ある種の物質 (誘電体) は摩擦により帯電する．これは幼い頃に誰でも経験した事だと思う．静電気によってビリッと来たと言う事である．物質間の摩擦でどちらが正に帯電し，どちらが負に帯電するかはその誘電体の性質によっている．この原因は勿論，電子がどちらかの誘電体からは取り去られ，その分がもう一つの物質に移動した事によっている．

2.2.2　クーロン力

静電気を起こしている力はクーロン力である．これは電荷を持っている粒子間に働く力であるが，その力の強さは荷電粒子の数に比例している．また電荷には正と負の状態があり，電子は負の電荷を持っている．正の電荷を持っている粒子は陽子である．同じ電荷同士には斥力が働き，異なる電荷には引力が働いている．

2.2.3　圧電効果

圧電効果とはある種の結晶体に機械的応力（圧力）を掛けるとそれに応じて電気分極が起こり，電束密度が生じる現象である．これは Pierre Curie が１００年以上も前に発見している．この現象は機械的な力が結晶構造の対称性を少し壊すため電気分極が起こり，これが電気現象に直接に結びついているものである．圧電効果は機械的な力と電気力を結びつける現象であるため，この応用は現在では非常に広範囲に渡っている．特に液晶画面に手で触れてそれを電気信号に変換する機構はこの圧電効果の応用そのものである．

2.2.4 電流と電池

電流の発見は Galvani による蛙の筋肉の痙攣実験から始まった事はよく知られている．この現象は異なった金属版の間に塩水を置くと電位差ができ，従ってここに電気力が生じる事により起こったものである．

● 電流： この現象の原因を実験で明確に示したのが Volta である．彼は２種類の金属間に塩水を含む紙などを置くことにより，この間に電位差が生じて電流が流れる事を示したのである．

● 電池： 静電気を集めてもその利用は一瞬の放電でしかない．それに対して電池を作り電流を流してその電気力を利用する場合，電気を定常的に利用できる事になる．このためその利用価値は飛躍的に増大している．そして２種類の金属板の間に塩水を含む紙をはさんだものを単位としてこれを何層か重ねたものが電池の基礎となっている．

2.2.5 Maxwell 方程式

電磁気学を理解するためには Maxwell 方程式を覚える事がどうしても必要である．これは実験的に検証された最も信頼できる理論体系である．しかしながらこの講義ノートの読者にとって Maxwell 方程式を使いこなすことは難しすぎるので，この方程式を覚える事などは特に必要とは言えないであろう．

Maxwell 方程式は次の４個の方程式から成り立っている．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\text{Gauss の法則}) \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad (\text{磁荷がない}) \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{Faraday の法則}) \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j} \qquad (\text{Ampère-Maxwell の法則}) \tag{2.19}$$

ここで ρ と $\boldsymbol{j}$ は電荷密度と電流密度を表し，それらは物質が作っている．この ρ と $\boldsymbol{j}$ が最も複雑で良くわからない物理量である．例えば電流密度を理論的に理解しようとするとこれは量子力学の多体問題を解く事に対応している．

● 未知関数： この方程式は電場 E と磁束密度 B を未知関数としていて，その数は全部で６個 $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ である．従って，Maxwell 方程式は６個の独立した方程式になっている．Gauss の法則が１個，磁荷がない式が１個，Faraday の法

則が２個そして Ampère-Maxwell の法則が２個となっている．Ampère-Maxwell の式は一見３個あるように見えるが，今の場合，連続方程式 $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0}$ が成り立つので２個となる．実際，式 (2.19) の左辺第２項は連続方程式が成り立つように Maxwell により導入された．

● 場の定義：　ここで電場 E と磁束密度 B が「場」であるという意味を解説しておこう．これは単純で，電場も磁束密度もともに時間・空間の関数になっていると言う事である．すなわち，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r})$ であり，それらは場所によっている．従って「場」であり，それ以上の特別な意味はない．これは粒子的描像で座標の時間発展のみを扱う Newton 力学との対比である．実は電荷密度も電流密度ももとを正せば量子力学の波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{r})$ に関係していて「場」で書けている．その意味では電磁気学と量子力学は同じ場の理論であり，さらに重力の問題もやはり同じレベルの定式化の枠組みに入っている．

2.2.6　電子と電磁場の相互作用

電子と電磁場の相互作用ハミルトニアンは

$$H' = -e \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) d^3 r \tag{2.20}$$

と書かれる．ここで $j(r)$ は電子の電流密度を表している．この式は場の理論の表現を用いているが，非相対論的にはハミルトニアンで相互作用を求める方が便利であるので，その方法を紹介しよう．但しこの講義ノートの読者に取っては少し難しすぎるかもしれない．

● 非相対論的電子と電磁場のハミルトニアン：　非相対論的量子力学において荷電粒子と電磁場のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \right]^2 - \frac{Ze^2}{r} \tag{2.21}$$

と書かれている．但し，σ は Pauli 行列と呼ばれている２行２列のエルミート行列であり，次のように書かれている．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで $\hat{p}$ が演算子 ($\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$) である事に注意して数学の公式

$$\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \right]^2 = \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right)^2 - \frac{ie}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{A}$$

を用いてハミルトニアンを書き直すと

$$H = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2mc}(\hat{\boldsymbol{L}} + \hbar\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.22}$$

となる．ここで $\hat{L}$ は角運動量 ($\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{p}}$) であり，磁場 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ と書けている．ここでは一様磁場の場合を仮定している．この右辺第３項の σ の式がスピンの Zeeman 効果に対応する相互作用である．

● 傾斜磁場と MRI：　Zeeman 効果により水素原子中の陽子は分裂エネルギーに対応する電磁波を放出する．この電磁波の波長はかなり長いものであり，その電磁波測定からその電磁波放射の場所を特定する事は不可能である．しかし傾斜磁場の考えを使うと陽子の位置が計測できるという事が簡単に理解される．この考えを応用し発展させた処方が MRI (Magnetic Resonance Imaging) である．ここでその基本原理を簡単に紹介しよう．

● Zeeman 効果のエネルギーと電磁波：　陽子のスピンは $\frac{1}{2}$ であり，磁場を掛けると状態が２個に分裂する．この分裂のエネルギーは $\boxed{\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}}$ であり，このエネルギーに対応して電磁波が放出される．

● 傾斜磁場：　ここで Lauterbur は傾斜磁場という概念を導入した．それは Zeeman 効果で分裂した状態間のエネルギーに対応する電磁波を測定してどこの陽子から放出されたかを特定できる手法である．陽子の Zeeman 分裂のエネルギーに対応するフォトンの振動数は $\boxed{\omega = \frac{eB}{Mc}}$ である．今，外部磁場 B に対してこれが特別な座標依存性を持つように設定しよう．簡単のために，１次元系を考える．この時，例えば B が $0 < x < a$ の範囲内で

$$B = B_0\ x \qquad (0 < x < a) \tag{2.23}$$

のような座標依存性がある場合を想定しよう．この場合，フォトンの振動数 ω と座標 x が一対一の対応をする事がわかる．それは $\boxed{x = \frac{\omega Mc}{eB_0}}$ の式から明らかである．すなわち，ω を測定す事によりその陽子がフォトンを発生する場所 x が特定できる事を意味している．今は１次元での議論であるが，この問題を３次元にうまく拡張できれば，例えば人間の体内における水分子の分布状況がわかる事になり，これが MRI 手法の基本的な機構である．

2.2.7　Lorentz 力

Lorentz 力 $\boldsymbol{F}$ として知られている力は磁場 B によって荷電粒子が受ける力であり，これも相互作用 H' が起源となっている．この Lorentz 力は

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2.24}$$

であり v が荷電粒子の速度を表している．これは古典力学における力であり，従ってマクロスケールな荷電粒子系に対するものである．

2.2.8　モーター

モーターは磁場中に流れる電流が力を受ける事を利用している．Faraday の法則は磁場の時間変化が起電力を生み出すというものであるが，Lorentz 力は荷電粒子と磁場との相互作用を含んだ法則である．電磁気学全体として見たらそれぞれの法則がお互いに絡み合って電磁現象につながっている．モーターの原理に対応する回転力そのものは相互作用によっているが，その相互作用はベクトルポテンシャル A で書けている．その意味において，モーターの動作機構全体としては電磁誘導と関係している．

- モーターの整流子：　磁場 B の下に置かれたコイルに電流を流すとこの電流を担っている電子 (その速度 v) は Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times B$ を受ける事になる．このコイル全体が力を受けて回転できるようにうまく工夫された機器がモーターである．この時，外部電流をコイルの回転方向に応じて切り替え，回転を一定方向に保つために工夫されたものが整流子である．

2.3　電流：導体と半導体

電流とは比較的自由に動ける電子が隣の格子 (原子) に一斉に飛び移る事を繰り返す現象である．従って A 点から B 点までマクロの距離でも電子が一斉に隣に飛び移れば，A 点から B 点まで即座に電流が流れた事になっている．すなわち，電流が A 点から B 点まで流れた（情報の流れ）時間は，大雑把には電子が隣の原子に飛び移る時間であるから，まさに瞬間である．

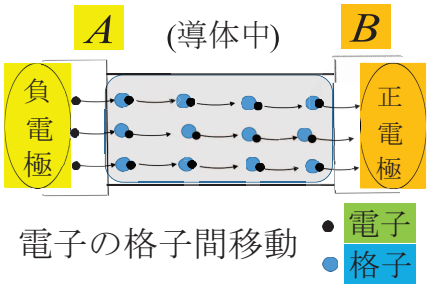

図 2.2: 電流の描像

2.3.1　導体

導体とは銅などの金属でその原子には隣に飛び移れる準自由電子の数が十分多く存在している物質である．

● オームの法則：　オームの法則として知られている式は電流密度 j と電場 E の間に成り立っている $\boxed{j = \kappa E}$ という現象論的な関係式である．ここで κ は電気伝導率と呼ばれていて電流の流れ易さと関係している．従って，導体での電流の流れ易さは，まずは自由に動ける電子の数が多い事が条件になるが，同時に隣に飛び移る時に，その原子または分子を励起状態に持って行く確率にもよっている．しかしこの点でのミクロの理論計算はまだ知られていない．また，オームの法則は時間反転性を破っているため，基本方程式ではない．しかし物質によっては良く成り立っている．

2.3.2　半導体

よく半導体と言う言葉を見かけるがこれはある種の半導体が日常生活品に頻繁に使われているからである．特に半導体ダイオードが整流器に使われてから真空管のかわりに半導体がほとんど取って代わった程である．真空管ダイオードも半導体ダイオードも共に電流が少し流れて，しかも一方方向しか流れないので，整流効果がありよく利用されている．半導体物質としてはゲルマニウムがよくあげられている．

● 水は半導体か？:　それでは水はどうであろうか？例えば純水と海水を見るとこれらの電気抵抗率は

純水： $\sigma \sim 2.5 \times 10^5 \quad \Omega \cdot \mathrm{m}$
海水： $\sigma \sim 2.0 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \mathrm{m}$

である．従って，海水は確かに半導体と言ってよい．この違いは勿論，海水には沢山のイオンが存在しているため，動ける電子の数が格段に多いという事に依っている．海水の伝導率はイオンのモビリティに依っている事が知られているが，これは伝導性電子の数に直接反映しているのであろう．

2.3.3　磁化と磁石

導体とはほぼ自由に近い状態で動ける電子が十分多く存在している物質である．従って外から磁場を掛けるとそれらの準自由電子は円運動をする．

● 磁化：　円電流は磁気双極子に対応しているため，これが内部磁場を生成する．この磁場を全て集めたのが磁化である．磁化は外からの磁場を打ち消すように生成される．これは自然界は必ず物質中の磁場の全エネルギーが最小になるように選択するからである．

● 磁石：　通常の物質は外部からの磁場を取れば内部磁化は消滅する．しかし内部磁場が消滅しない場合がありこれが磁石である．しかし磁荷がないので，磁石のように物質の内部で生成される磁場はすべて磁気双極子によるものである．通常は外部磁場をはずしたら磁気双極子の方向がいずれ揺らぎ始め，最終的には平均すればゼロになるはずである．しかし磁石は何らかの理由で m の方向が揃ったままの状態が半永久的に実現されている．現実の磁石では電子のスピンによる磁気双極子 $(m \simeq \frac{e}{m}s)$ の方が円運動による磁化よりも重要である．従って最初に最外殻の電子のスピンを揃わせるのは外から掛けた磁場であろう．しかし一度揃ってしまうと磁石では何らかの理由でスピンが揃ったままの状態が優先され，ランダムにはならない．しかし，この強磁性体の現象は理論的にはまだほとんど分かっていなく，今後の重要課題の一つである．

2.4 電子の物理学：まとめ

日常生活の様々な現象の大半は電子の動力学によって理解する事ができている．ミクロスケールの物理現象である原子や分子の性質はすべて電子の動力学が正確に計算できれば，基本的なところは理解できている．

2.4.1 電荷とは何か？

電磁気学だけでなく，量子場の理論としてみても「電荷とは何か？」と言う問題をきちんと理解しておく必要がある．恐らく，ほとんどの物理屋はこの問題を正しい意味合いで理解しているとは考えにくいのが現状である．現実問題として，電荷とは何かと質問すると『それは「e」だと思う』と言う答えが大半であろう．しかしそれは勿論，間違いである．「e」は相互作用の強さを表していて電荷ではない．電荷とはその粒子が持っている量子数のことである．

● フェルミオンの電荷の量子数： 例えば，電子は電荷の量子数として「-1」を持っている．一方，陽子は「$+1$」である．これらはフェルミオンであるが，この場合，電磁気的な相互作用をするためには電荷の量子数がゼロとは異なる必要がある．例えば，ニュートリノは電荷の量子数がゼロであり電磁気的な相互作用はしない．中性子の電荷はゼロであるがこれは電磁的な相互作用をしている．実際，中性子には磁気能率が有限である．これはしかし中性子がクォークで構成されている事と関係している．

● ボソンの電荷の量子数： 一方，基本粒子としてのボソンはベクトルボソンのみが知られている．この場合，例えば $W^{\pm}$ は電荷の量子数を持っている．しかしこれは勿論，直接的な電磁相互作用は知られていない．高次項では電磁気的な相互作用をする可能性は指摘されているが，その検証は実験的には難しいであろう．

2.4.2 電流とは何か？

電流とは何か？と言う問いかけに対してこの講義では準自由電子が隣の格子に一斉に飛び移る事であるとしている．従って，電気抵抗とはこの準自由電子が格子と相互作用して何らかの形でエネルギーを失い，格子がそのエネルギーを熱エネルギーとして獲得する現象である．ところが，この理論計算は非常に難しくてまだ第０近似での計算さえも実行されていない．

● 超伝導現象： 電気抵抗が理論的に全く分かっていない段階で，超伝導の現象を理論的に理解する事は容易なことではない．超伝導現象とは電気抵抗がほとんどゼロに

なっている物理現象である．これまでの理論としては BCS 理論が良く知られていて，これは一定以下の温度ではある種の導体においては電子の状態にエネルギーギャップが生じるため，電流が流れて電子が格子と衝突しても励起できないとしている．このため，電流が抵抗なしで流れ続けて，従って超伝導状態になっていると言うものである．しかしこの BCS 理論では散乱問題を計算したわけではなく，相互作用の一部を近似的に計算に取り込んだだけの単純な理論計算である．エネルギーギャップがあれば確かに超伝導現象を説明できるが，これは条件として強すぎるものである．実際，これで超伝導現象が理解できたとはとても言えなく，今後の進展を見てゆく必要があると考えられる．

2.5 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事．特にネット上での物理学関連の「知識」は到底，信用できるとは言えないので，自分の頭でしっかり考えること．

2.5.1 問題 1

状態関数 (波動関数とも言うが同じもの) $\psi(\boldsymbol{r})$ は複素関数となっている．従って $\psi(\boldsymbol{r})$ は観測できない．それで $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ を考えるが，これは確率密度に対応している．何故だと思うか？

ヒント：$\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 d^3r = 1$ である事と関係している．この式を波動関数の規格化と言う．

2.5.2 問題 2

量子力学の方程式を近似する事によって古典力学の方程式が導かれた．この場合，自由度の数がどうなったか述べよ．

2.5.3 問題 3

自由粒子の状態関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は $\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad (\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}$ は整数$, \quad V = L^3)$ となっている．この状態関数が規格化されている事を示せ．

2.5.4 問題 4

Ehrenfest の定理では座標の期待値 $\langle r \rangle$ に対する時間発展から古典力学の方程式が導かれた．期待値が古典論に対応したと言う物理的な理由を各自，自分の言葉で述べよ．

2.5.5　問題 5

量子力学ではハミルトニアン H が重要な役割を果たしている．実際 Schrödinger 方程式は $\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$ であった．但し，ここでは運動量は微分演算子として取り扱われている．一方，古典力学でもハミルトニアン H を使う事があり，実際，ハミルトン方程式は $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}$ と書けている．この場合，ハミルトニアン H の物理的な意味を考察せよ．

2.5.6　問題 6

古典力学のハミルトニアンに現れるポテンシャルの基準点の取り方には任意性がある事が知られている．これは何故だと思うか？量子力学の場合，ポテンシャルの基準点はどのように決められていると思うか考察せよ．

2.5.7　問題 7

フェルミオンには Pauli 原理が働いている．もしフェルミオンの質量がゼロの場合を考えるとその粒子に対する Pauli 原理がどうなるか考察せよ．

ヒント：粒子の質量がゼロだとその慣性系が指定できない．

2.5.8　問題 8

量子力学における自由粒子は単純な１粒子問題であり直線運動となっている．一方，古典的な波である音波などの媒質の振動はその取り扱いが非常に難しいものとなっている．何故，難しいのかその理由を述べよ．

2.5.9　問題 9*

演算子 A, B が交換する場合，すなわち $[A, B] = 0$ の時，A と B は同時固有関数を持つ事を証明せよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

2.5.10 問題 10

雷は雲と雲あるいは雲と地上との間に電流が流れる事によって起こっている現象である．この時，何故，ピカッと光ると思うか答えよ．またゴロゴロとなる音は何の音だと思うか自分の考えを述べよ．

2.5.11 問題 11

Maxwell 方程式は６個の独立した方程式である事を自分の言葉で確めよ．

2.5.12 問題 12

MRI(Magnetic Resonance Imaging) 法において，陽子の分布が測定できるメカニズムについて自分のイメージを作り，解説せよ．

2.5.13 問題 13

電磁波を用いた携帯電話の通信速度と電話回線を用いた固定電話の通信速度がほとんど同じである．これは何故だと思うか？

2.5.14 問題 14

オームの法則 $\boldsymbol{j} = \kappa \boldsymbol{E}$ は時間反転不変性を破っている事を示せ．
(時間反転不変性とは $t \to -t$ で方程式が同じになること．)

2.5.15 問題 15

電流とは最外殻の電子が隣の格子に一斉に飛び移る事だとしたら，電気抵抗とは物理的にどのような現象であると思うか，自分のピクチャーを作れ．

2.5.16　問題 16

モーターにおける整流子のメカニズムを具体的にその図を書いて解説せよ．

2.5.17　問題 17*

ある種の物質に磁場を掛けると円電流が生成されて内部磁場ができる．これを磁化と言う．この磁化は必ず，掛けられた磁場を打ち消すよう生成される．何故，打ち消すように生成されるのだと思うか考えよ．

2.5.18　問題 18

電荷はその粒子が持っている量子数である．ウィークベクトルボソン $W^{\pm}$ は電荷を持っているが通常の電磁的な相互作用はしない．何故だと思うか？
(注：これは希望者のみの宿題)

第３章　電磁波の物理学

電磁波とは質量がゼロの粒子の事であり，このためその性質はその波長によって特徴づけられている．電磁波の事をフォトン (光子) と言うが，これは２個の自由度を持っていてそのスピンは１である．

現実の世界ではマクロスケールの数のフォトンが関与するためこれは光として捉えられている．この場合，光は波としての振る舞いがよく見られることになる．しかしながら，媒質を伝搬するものが波として定義されたとしたら，光は波ではない．光は真空中も伝搬できるからである．

電磁波はその波長によって様々な呼び方がされている．波長が長いと電波と呼ばれ，短くなると赤外線や可視光や紫外線となる．さらに短い波長だとＸ線やγ線と呼ばれる放射線になっている．

3.1　電磁波

光は日常生活で最も身近な存在であり，同時に非常に重要な役割を果たしている．この光には電波，赤外線，背景輻射，γ線などと様々な名前がついているが，それらは波長の違いがあるだけで，すべて同じ光，すなわち電磁波である．その簡単なまとめを下記に書いておこう．

電磁波の波長とその特徴

この表における数字は大雑把な目安として書いてあり，必ずしも正確なものとは言えない．またラムシフトはもともと水素原子における $2s_{\frac{1}{2}}$ と $2p_{\frac{1}{2}}$ のエネルギーレベルの差の事であるが，その差に対応する電磁波の波長を書いている．マイクロ波は電子レンジで使用されている波長領域を書いている．

電磁波	波長 $[\lambda]$	エネルギー	周波数	特徴
MF	$\sim 0.4 \times 10^5$ cm	$\sim 0.4 \times 10^{-8}$ eV	~ 1 MHz	電波
VHF	$\sim 0.4 \times 10^3$ cm	$\sim 0.4 \times 10^{-6}$ eV		電波
UHF	~ 40 cm	$\sim 0.4 \times 10^{-5}$ eV	~ 1 GHz	電波
ラムシフト	40 cm	0.44×10^{-5} eV	1 GHz	電波
マイクロ波	$15 \sim 45$ cm	$\sim 10^{-5}$ eV	$0.9 \sim 2.5$ GHz	電波
背景輻射	0.8 cm	2.5×10^{-4} eV	50 GHz	電波
赤外線	$\geq 10^{-3}$ cm	≤ 0.1 eV	$\leq 2 \times 10^{13}$ Hz	光
赤	0.8×10^{-4} cm	1.6 eV	4×10^{14} Hz	可視光
紫	0.4×10^{-4} cm	3.3 eV	8×10^{14} Hz	可視光
紫外線	$\leq 10^{-5}$ cm	≥ 10 eV	$\geq 2 \times 10^{15}$ Hz	光
X 線	~ 1 Å	~ 10 keV		放射線
γ 線	$\leq 10^3$ fm	≥ 1 MeV		放射線

[注]：放射線の中には α 線，β 線，γ 線が良く知られている．このうち，α 線は He 粒子のビームであり，また β 線は電子ビームである．すなわち，γ 線以外は粒子線である．それ以外にも重粒子線や中性子線が知られている．

3.1.1 光の理論

光を理論的に理解する事は電磁気学の範囲を少し超えているためかなり難しいものと考えて間違いない．大方の電磁気学の教科書では，Maxwell 方程式から電磁波がでてくると言う書き方をしているが，この表現は必ずしも正しいとは言えない．物質がない時のマックスウェル方程式をベクトルポテンシャルで書くと $\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A} = 0}$ と求まり，これは自由フォトンが満たすべき方程式ではある．しかしこの式は電磁波の存在を示唆してはいても電磁波の生成・消滅とは無関係である．電磁波の生成・消滅は場の量子化を行わない限り理解できなく，また電磁波は生まれたり消えたりする事で初めて物理的に意味のある存在となる [3, 4, 5]．

3.1.2 フォトン (光子)

フォトン (photon) は電磁場 (ベクトルポテンシャル場) を量子化する事により，その結果として場が粒子 (フォトン) になったものと考えてよい．場の量子化を実行する時は，まずベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を自由粒子の状態で

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\left[c^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \tag{3.1}$$

と展開する．ここで $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ が偏極ベクトルである．フォトンの状態を理解するためには場を量子化する必要がある．

● 場の量子化： 場の量子化とは係数 $c^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ を演算子と見なす事である．$c^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ が生成・消滅演算子と呼ばれていてこれらは交換関係式 $\boxed{[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',\lambda'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}}$ などを満たしている．この式 (3.1) の右辺の第１項がフォトンを生成させ，第２項が消滅させる項に対応している．光はもはや電場・磁場とは全く関係なく，フォトンを粒子と考え，その振る舞いを波として扱えばよい．

● フォトンのエネルギー, 運動量とその波長： フォトンのエネルギー $E_{\boldsymbol{k}}$ とその角振動数 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ は $\boxed{E_{\boldsymbol{k}} = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}$ と結びついている．また運動量 $\boldsymbol{p}$ と波数 $\boldsymbol{k}$ の関係は $\boxed{\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}}$ となっている．さらに波数と波長 λ の関係を見ると $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ (但し $k = |\boldsymbol{k}|$) となっている．フォトンは波長により特徴づけられていてその波長が長ければ電波と呼び，可視光 ($\lambda \sim 5000$ Å) を中心にして更に短い波長だと X− 線や $\gamma-$ 線と呼ばれている．

3.1.3　電子と電磁場の相互作用

多くの電磁気学の教科書において，フォトンが電場 E と磁場 B と関係していると言う記述が見受けられる．しかしこれまでの議論で明らかなように，これは間違いである．ベクトルポテンシャル A をゲージ固定した後，その場を量子化したものがフォトンである．これはもはや電場や磁場と関係つけられないし，関係つける必要はさらにない．相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -e\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r$$

である．この相互作用から $\boxed{e\text{ が相互作用の強さ}}$ である事が良くわかると思う．この e を結合定数とも言う．ここで重要な事は電磁波の生成・消滅はこの相互作用によってのみ起こっている事である．それはベクトルポテンシャルが式 (3.1) で量子化されている事に依っている．

3.1.4　フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数であるが，フォトンの状態関数は複素数である．これは電磁波の状態関数 $\Psi_{\boldsymbol{k}\lambda}$ が

$$\Psi_{\boldsymbol{k}\lambda} \equiv \langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}(x)|0\rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}}e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.2}$$

と表されている事から理解される．フォトンの偏極ベクトル $\epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}$ には

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \tag{3.3}$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している．従って，フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直交する平面でそれぞれが直交するような２個のベクトルで成り立っている事が分かる．但し，フォトンには静止系が存在しないため偏極ベクトルの描像を正確に作る事は至難の業である．

- フォトンのスピン：　現実問題として，フォトンが電子と相互作用する瞬間のみ，偏極ベクトルが重要となっている．従って，偏極ベクトルの記述は電子の静止系においてのみ物理的に意味がある対象となっている．フォトンのスピンは１であるが，その自由度は２である．そしてフォトンが電子と相互作用する瞬間において，フォトンと電子のスピンに関する保存則が成り立っている．但しフォトンの偏極ベクトルは Lie 代数を満たさないため，スピンとは性質が少し異なる．しかし偏極ベクトルはランク１のテンサーであるため，スピン１の状態とほとんど同じに扱ってもそれ程，間違えることはない．

3.1.5 電磁波の発振機構

電磁波が生成される機構はどうなっているのであろうか？ここでは電磁波の発振機構を解説しよう．電磁波の生成には電磁場と電子との相互作用

$$H_I = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r \tag{3.4}$$

から考える．但し e は j に組み入れてある．この相互作用の時間変化は

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = -\int\left[\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right]d^3r \tag{3.5}$$

となる．ここで電場は $\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}}$ と書けている．よって W は

$$W = -\int\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r + \int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,d^3r \tag{3.6}$$

となる．右辺第２項は電場で書かれており電磁波とは無関係である．よって式 (3.6) の右辺第１項を W_1 として $\boxed{W_1 \equiv -\int\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r}$ を評価しよう．

● Zeeman 効果のハミルトニアン： ここでは非相対論的な量子力学を用いよう．相互作用は Zeeman 効果のハミルトニアンなので

$$H = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{3.7}$$

である．また外場 B_0 は座標 $\boldsymbol{r}$ の関数であるとしている．ここで外場 B_0 を $z-$ 軸方向にとっても一般性を失わないので $\boldsymbol{B}_0 = B_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_z$ としよう．この時，非相対論の量子力学ではカレント j が

$$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{e}{m_e}\psi^\dagger(t,\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{p}}\,\psi(t,\boldsymbol{r}) \tag{3.8}$$

で与えられている．但し，$\hat{\boldsymbol{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ である．これより

$$\frac{\partial\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} = \frac{e}{m_e}\left[\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\hat{\boldsymbol{p}}\psi + \psi^\dagger\hat{\boldsymbol{p}}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] = -\frac{e^2}{2m_e^2}\boldsymbol{\nabla}B_0(\boldsymbol{r}) \tag{3.9}$$

と計算される．従って電磁波を含む単位時間のエネルギー変化率は

$$W_1 = \int\frac{e^2}{2m_e^2}(\boldsymbol{\nabla}B_0(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{A}\,d^3r \tag{3.10}$$

と求められた．電磁波はこの式の最後にある A から発生する．

3.2　光と波

波の問題をきちんと解説することは専門家に対して説明する場合でも非常に難しく，ましてや物理学の素人に解説することは実際問題としては不可能に近い．従って，ここでは音波や地震波を光と対比させながら，その基本的な性質を簡単に説明しよう．光と音波には本質的な相違がある．光子は粒子であり，その状態関数の座標依存性は $\boxed{e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}$ と言う複素関数で記述されている．一方，音波の状態関数は $\boxed{\sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$ などの実関数で表されているが，これは音波が媒質の振動によって伝搬しているからである．ちなみに光の状態関数の絶対値 $|e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}| = 1$ はその粒子の存在確率がゼロにならないことを保証しているが，媒質の振動ではその振幅がゼロになっても不思議ではない．

前述したように，光の状態関数 $\Psi_{\boldsymbol{k}\lambda}$ は $\Psi_{\boldsymbol{k}\lambda} = \frac{\epsilon_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ と表されているが $\boldsymbol{k}$, ω は光の波数ベクトルと角振動数である．光は自由粒子であり，この点で取扱いは単純明快である．さらに光が波の性質 (干渉や回折) を持っていることは式から明らかであろう．

3.2.1　光のドップラー効果

相対性理論の場合，一つの慣性系が光の速度に近い場合，日常我々が持っている常識と矛盾する場合が出てくる．例えば，その慣性系から光を放つと光の速度はやはり光速 c である．ただし，そのエネルギーが変わるため，近づいてくる慣性系から放たれた光はその波長が小さくなり，逆の場合は大きくなるのである．それは，光のドップラー効果としてよく知られている事である．基本的には，音のドップラー効果と同じであるが，音の場合よりもよりシンプルでわかり易い．音波の場合は地球上にある空気という系がすでに指定されているため，音源と音の受け側以外に，もう一つ地上という系があり，これが音のドップラー効果を複雑にしている．それに対して，光の場合は光が粒子として伝播して来るために，常に光源と光の受け側の２つしか系が存在していないので，単純にローレンツ変換式でドップラー効果が理解できるのである．

● ローレンツ変換：　ローレンツ変換の式は粒子の持つエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ に対しても成り立つものである．すなわち

$$p_x{}' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \qquad E' = \gamma\left(E - vp_x\right), \qquad p_y{}' = p_y, \qquad p_z{}' = p_z \tag{3.11}$$

となっている．但し，ここでは星が地球から遠ざかって行き，その星から発せられた光の波長が変化する事を示して行こう．星が波長 λ の光を発するとその運動量は

$p = \frac{\hbar c}{\lambda}$ となる．従って，星が速度 v で遠ざかっているとすれば，地球上で観測する光の運動量は

$$p' = \gamma\left(p - \frac{vE}{c^2}\right) = \gamma\left(p - \frac{vp}{c}\right) = \frac{p\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} = p\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{3.12}$$

となり，光の運動量は減少して見えるのである．これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \tag{3.13}$$

となるので，光の波長は大きくなり，これを赤方遷移という．波長が大きくなる事を「Red Shift」 というのは，ただ単に可視光においての光の性質から来ている．可視光においては，赤っぽいのは波長が長く青っぽいのが波長が短いため，波長が長くなることを赤方遷移と呼ぶがその物理的な意味は全くない．

3.2.2　音波

音波は日常的に接しているため誰でもよく知っている物理量である．ところが，これを物理学として解説することは容易なことではない．音は媒質 (空気や水) を伝搬するがこれはそれぞれの媒質密度の振動として伝搬しているため密度波とも呼ばれている．この場合，大気中の各点の振動とその伝搬を記述する必要があり，これは多体問題となっていて厳密に解くことは事実上不可能である．通常，音は大気中に広がって伝搬しているので，その伝わり方は３次元的であり，その難しさが想像できるであろう．ここで音波に対して最も単純化された方程式を書いておこう．その導出法もそれ程難しくはないが，ここでは結果だけを書くことにしよう．音波 (媒質) の変位 $u(\boldsymbol{r}, t)$ に対して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)u(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{3.14}$$

の方程式が成り立っている．ここで $\boxed{v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}}$ であり，ρ は大気の密度，P は圧力を表している．但し，それらは場所に依らず一定と仮定している．

一方，人工的に超音波を発生させるとこの波の広がりは少なくなり，ビームに近くなっている．このため超音波の性質は少し単純になり，物理的には取扱い易くなっている．

3.2.3　音のドップラー効果

光や音に関して最もよく知られている現象はドップラー効果であろう．これは興味深いことであるが，前節で解説したように光のドップラー効果は単純でわかり易いものである．ところが音波の場合，かなり難しくなっている．それは音波が伝搬する大気と音源の運動それと観測者の運動との３体問題になっているからである．

● 観測者が速度 v_{ob} で音源に近づくドップラー効果：　観測者が速度 v_{ob} で音源に近づく時は相対論と同じである．これは音源と媒質が同じ系となっているためであり，観測者が感じる音の速度は観測者と音源との相対性理論 (ガリレー変換) によって決まるものである．すなわち，観測者が音源に近づいて行く場合，速度は足し算になっている．従ってこの場合，ドップラー効果による振動数 n' は

$$n' = \frac{v + v_{ob}}{v} n \tag{3.15}$$

となっている．

● 音源が v_{ss} で近づくドップラー効果：　一方，音源が v_{ss} で近づく場合，観測者と媒質が同じ系になっているため，観測者にはその波長が短くなって観測される．従って観測される波長 λ' は

$$\lambda' = \frac{v - v_{ss}}{v} \lambda \tag{3.16}$$

となっている．

3.2.4　地震波

空中と水中を伝搬する波は音波と呼ばれているが，地中を伝搬する波は地震波である．地殻は明らかに固体であるが，ここでも密度波は存在している．波の方程式としては音波と同じであるが，密度と圧力はかなり異なっている．地震波はその変動が急激に起こった場合に生じており，これは音波と同じである．地震波の伝搬速度は $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ であり，音波の２０倍程度の速さが観測されている．しかし実際の地震波はさらに複雑であると考えられる．

3.3 フォトンの性質：波長と偏極ベクトル

ベクトルポテンシャルの場を自由粒子の状態で展開した式には偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ があらわれている．光の特徴はその波数ベクトル k と偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ により決められる．

● 偏極ベクトル： この偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ は波数ベクトル k の依存性に加えて偏極の自由度を記述する量子数に対応する λ にも依っている．この $\epsilon_{k,\lambda}$ は基本的にはフォトンのスピンの事であると思って良い．しかしスピンの持っている重要な性質が欠けている．すなわち角運動量の性質 (Lie 代数) を満たしていない．さらにフォトンのスピンの大きさは 1 であるが，フォトンの状態は２個しかなく，通常のスピン 1 の状態の３個とは異なっている．

● 偏光状態： それでは偏光 (状態) とはどういう現象なのであろうか？偏光とはフォトンの２個の状態のうち，１個だけが実現された光の事である．そしてこの２個の状態を指定するのが偏極ベクトルに現われる λ であり，状態を指定するこの量子数は磁気量子数と同じで必ず保存する量となっている．ここで最も重要な事として，光は波長と偏光状態によってその性質が決定されていると言う事である．そして一般的な光，例えば白色光は様々な波長が混じった状態であり，さらに偏光状態のフォトンが等分に混ざっている多数のフォトンの集合体である．以下に簡単なまとめを書いておこう．

● 太陽光： 太陽からくる光は様々な波長と２個の偏光状態が等分に混ざったものである．太陽光の偏光に関しては日常の世界にあらわれる事はあまりないが，沢山の波長が混じっている事は虹を見れば明らかである．

● レーザー光： レーザー光はその光がすべて同じ波長を持っている．その偏光に関しては，そのレーザー光によっては偏光している場合もあると考えられている．

● 偏光： 波長は混じっていても光の偏極状態は１個だけにした状態の光を偏光と呼ぶ．昔から偏光版を通して偏光した光を取りだす事はよく行われていた．

3.3.1 空の青さと光の散乱

フォトンは荷電粒子との相互作用で生成または吸収される事がその本質である．しかしフォトン – 荷電粒子の弾性散乱もよく起こる散乱過程であり，量子場の理論によ

る Compton 散乱の計算は最もよく知られている．これはフォトンが電子に吸収され，直ちにその電子がフォトンを放出して，結果としてフォトン一電子の弾性散乱過程に対応していると言うものである．この散乱過程は古典電磁場による計算でも予想以上に実験を再現する事がある．

• 空はなぜ青いか ？ :　空の青さは光と大気分子との散乱が Rayleigh 散乱 (断面積 : $\sigma_R \simeq \sigma_{Thom}(\frac{\lambda_0}{\lambda})^4$, λ_0 は定数) である事から理解される．すなわち太陽からの光が大気と衝突する場合，青い光は波長 λ が短いためより多く散乱される．このため地上の観測者からすると青っぽい光が空により多く飛び散りその反射光が見えて空が青っぽく見えている．夕焼けが赤いのは観測者が見る光は散乱されにくい光，すなわち波長の長い赤っぽい光を見るためである．

• Thomson 散乱と Compton 散乱 :
フォトンと電子の散乱過程において電子が自由粒子の場合，吸収は起こらない．これはエネルギー・運動量の保存則から禁止されているからである．その代わり，フォトン – 電子の弾性散乱が起こっている．このうち一般的な散乱過程としては Compton 散乱が知られていて，場の理論の教科書における初等の定番問題である．Compton 散乱断面積 $\{\sigma_{Com}\}$ の非相対論極限を取ると Thomson 散乱の断面積 $\{\sigma_{Thom}\}$ が求まるが，これは古典電磁場の理論で計算されたものである．

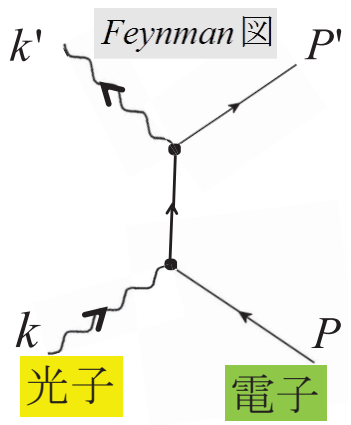

図 3.3: Compton 散乱

3.3.2　Rayleigh 散乱

可視光が物質 (N_2 など) と散乱した場合は Rayleigh 散乱として計算されている断面積になっている．この散乱断面積は古典電磁場で求められていて Rayleigh 散乱断面積 ($\sigma_R \simeq \sigma_{\rm Thom}(\frac{\lambda_0}{\lambda})^4$, λ_0 は定数) として良く知られている。この計算はかなり複雑であるが、これまで場の量子論による計算も実行されており，その形は古典論と一致していると言われていた．

このため、これまでは空の青さは光と大気分子との散乱が Rayleigh 散乱である事から理解されると考えられてきた．ところが、最近になってこの Rayleigh 散乱の断面積が場の量子論的に詳細に計算され、また λ_0 の値が具体的に求める事が出来ている。その結果、Rayleigh 散乱の断面積は Compton 散乱の断面積よりも１０桁

以上、小さい事が分かり、これは自然界に応用はできない事が証明されている。このため『空は何故、青いか？』の問題は Rayleigh 散乱では説明できなく、振り出しに戻っている。詳細は ”https://allphysics.sakura.ne.jp/RayleighS.pdf” を参照。

3.3.3 黒体輻射

光が生成されるメカニズムは場の量子化というかなり難しい概念を導入しないと理解できないものであった．しかし光自体は我々生物にとって最も身近な存在である．最も重要なものが太陽光であることは明らかであろう．現在の太陽ではその内部において核融合反応が起こっていて，これが太陽の熱エネルギーの直接の源になっている．我々が見ている太陽光は太陽の表面における熱輻射に依っている．

● Planck の公式： ここで Planck の公式を書いておこう．特に覚える必要はないが，量子論の先駆けとなった重要な公式である．この式の導出で最も重要な仮定が「振動数 ν のフォトンのエネルギー E は $h\nu$ であり連続的ではない」と言うものであった．この場合，温度が T の場合の黒体輻射の「強度」I は

$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{3.17}$$

となっている．k は Boltzmann 定数である．輻射の「強度」とは基本的に言って「その振動数のフォトンの数」だと思って十分である．

● Stefan-Boltzmann 則: 有限温度の物質は輻射によりエネルギーを失っている．例えば地球は太陽からの輻射エネルギーを吸収し続けているが，地球の表面温度が一定値であるのは Stefan-Boltzmann 則 $[U = \sigma T^4]$ によるエネルギー放射と太陽からの輻射エネルギーが平衡状態になっているからである．この Stefan-Boltzmann 則は式 (3.17) を ν で積分すれば

$$U = \sigma T^4, \qquad \text{但し}, \qquad \sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \tag{3.18}$$

と求まる.

● 固体の黒体輻射： ところで，物質がある温度を持っていると光を放射する (黒体輻射) が，有限温度の物質が電磁波をどのように放射するのかと言うメカニズムは難しすぎて理論計算ができていない．現象自体はかなり良くわかってはいるのだが，放射のメカニズムは物質が量子力学の多体系である事と関係しているため，最も単純な評価の計算さえもこれまでなされてはいない．

3.3.4　太陽光発電

発電形態としてよく使われているのは電磁誘導を利用したものである．これは回転エネルギーを電流に変える方法が基本である．一方，光電効果を利用して光のエネルギーを電流に変える手法を用いているのが太陽光発電である

- 光電効果：　光が粒子の性質を強く示している現象が光電効果であり，これは光が電子と相互作用して電子にそのエネルギーを与える物理過程である．

その際，格子 (電荷 Z) に束縛されている電子がフォトンを吸収して自由電子になる．この時フォトンの運動量を k, 束縛電子のフェルミ運動量を p_F その衝突後の運動量を p とすると $\boxed{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_F=\boldsymbol{p}, \quad k+E_B=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e}}$ が運動量とエネルギーの保存を示したものである．但し E_B は束縛電子の束縛エネルギーである．フォトンの吸収確率はフォトン − 束縛電子の散乱断面積 $\boxed{\sigma_K \simeq \sigma_{Thom}\alpha^4 Z^5 2^{1.5}(\frac{m_e}{k})^{3.5}}$ により決まる．

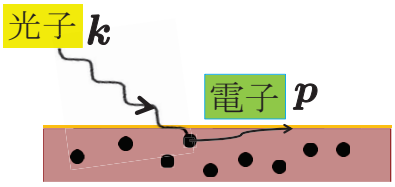

図 3.4: 光電効果

- 光の発電機構：　光電効果により光を吸収した電子を電流として取り出し，それを太陽電池としてエネルギー変換したのが太陽光発電である．この場合，半導体を利用する事により電子のエネルギーをうまく電流に変換している．しかし，光と物質の散乱で熱エネルギーに転換する部分をどの程度抑えられるかが高い変換効率を得るポイントであろう．

3.3.5　電子レンジ (Microwave oven)

電磁波はフォトンであり，その質量はゼロであるがその性質は波長によって特徴づけられている事は前述した通りである．そしてそのエネルギーは波長の逆数に比例している．従って電磁波はエネルギーそのものである．この電磁波を利用して物質にエネルギーを与えて熱を起させる様々な方法がある．そのうち，マイクロウェーブを用いた「電子レンジ」は日常的に最もよく知られている電気機器である．この電磁波の波長として 2.45 GHz が日本では使われている．ところが水分子１個の共鳴状態は 2.45 GHz からは程遠くそれよりも 3 桁も高い周波数領域にある．しかし電磁波の吸収は必ず電子により起こるのでその吸収メカニズムを考える必要がある．

● 熱による水分子のゆらぎ：　水によるマイクロ波吸収の機構は水分子の共鳴状態による吸収と考えようとするとさらに深刻な問題がある．水は 0 ℃ 以上であるので，この熱は 0.03 eV 程度の分子運動のエネルギーに対応している．従って，このエネルギーは水分子による吸収エネルギー ($\Delta E \sim 10^{-5}$ eV) よりも遥かに大きいのである．従って， 2.45 GHz に対応する状態は大きな分子運動の熱ゆらぎ (Thermal fluctuation) の中にある．しかし電磁波には電子に吸収される以外の相互作用が存在していないので，電子の速度 v_e と分子運動の速さ V_{H_2O} を比較して見て行くしか方法はない．今の場合，電子の速度は $v_e \simeq 6.3 \times 10^{-6}c$ であり，一方，水分子の熱運動の速度は $V_{H_2O} \simeq 1.9 \times 10^{-6}c$ である．よってギリギリで電子の方が速く運動している事がわかる．しかしながら，電磁波と電子の反応で形成された量子状態に対して，ゆらぎがかなり大きな影響を与える事は確かであろう．

● 水分子の量子状態：　マイクロ波を吸収する量子状態は励起エネルギーが $\Delta E \simeq 1.01 \times 10^{-5}$ eV である事から集団運動状態の可能性が高い．

それは吸収直後の電子の波長が $\boxed{\lambda \simeq 3900\ \text{Å}}$ である事にも依っている．明らかにこれは水の状態になった時に特別に生じる量子状態である．しかし水によるフォトンの吸収過程は共鳴散乱ではない事は確かであろう．恐らくは水においては集団運動状態の準自由電子が存在していて，光電効果と同じメカニズムでこの電子によるフォトンの吸収が起こっているものであろう．マイクロ波を吸収した後の電子は他の水分子との衝突を繰り返して，結果的にマイクロ波のエネルギーが熱エネルギーに変換されるものと考えられる．

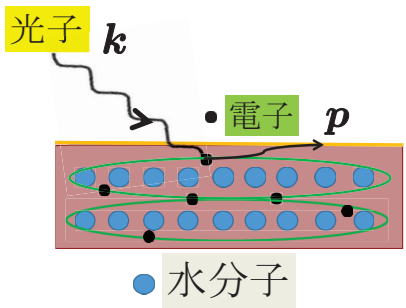

図 3.5: 水光電効果

これは「水光電効果」(Hydro-photoelectric effect) とでも呼ぶべき物理過程であると考えられる．宇宙に大量に存在している背景輻射はマイクロ波であり,「水光電効果」はこの電磁波が水に吸収されて熱エネルギーに変換されている事を示している．この現象が自然現象にどのような影響を与えているかを明らかにする事は今後の研究テーマの一つになるものと思われる．

3.4 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事．

3.4.1 問題 1

質量 m の粒子のエネルギー E とその運動量 $\boldsymbol{p}$ には $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\boldsymbol{p}c)^2}$ の関係式が成り立っている．この場合，粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E}$ で定義されている． この場合，光の速度が c となることを示せ．

3.4.2 問題 2

光には慣性系がない．それでは人々が円偏光とか直線偏光などと言っている場合，どの慣性系で議論していると思うか？

3.4.3 問題 3

光は自由粒子の状態しか存在しない．すなわち，束縛状態はない．何故だと思うか，自分の考えを述べよ．

3.4.4 問題 4

背景輻射とは何か，自分の知っていることを述べよ．

3.4.5 問題 5

電磁波の状態関数は $\Psi_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx}$ と複素数で書かれている．この場合，フォトンの存在確率はどうなっているか？

3.4.6 問題 6

音波の状態関数は実数で書かれている．何故，実数である必要があると思うか？

3.4.7 問題 7

フォトンにはスピンの自由度があり，それは２個である．それでは１００個のフォトンがあると上向きのスピンと下向きのスピンの数はどうなっていると思うか？

3.4.8 問題 8

ベクトルポテンシャルは実数関数である．しかしフォトンの状態関数は複素数である．何故，このようなことが可能となったかを考察せよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.9 問題 9*

電子と電磁波との相互作用のハミルトニアンから電荷 e はその強さを表している事が理解できたと思う．マクロスケールの数 (N) の電子が集まっている場合，その電荷は $Q = NE$ であるとして相互作用の強さを表して十分良い近似である．これは何故だと思うか？
(ヒント：Maxwell 方程式の線形性に依っている)

3.4.10 問題 10

通常，スピンが１である粒子は３個の自由度を持っている．しかしフォトンは２個の自由度しかない．これは何故だと思うか？

3.4.11 問題 11

音の速度を v として，観測者がその音源から速度 V で遠ざかって行く時，観測者が感じる実際の音の速度はいくらか？

3.4.12 問題 12

空が何故，青いかを中学生にもわかるように解説せよ．また夕焼けの光が何故，赤っぽいかを説明せよ．

3.4.13　問題 13

光電効果を説明しようとする時，光が波だとすると実験を説明できない．これは何故だと思うか？
(ヒント：波の場合，そのエネルギーは振幅の２乗に比例する．)

3.4.14　問題 14

地球は黒体輻射によって熱エネルギーを放出し，これにより冷却されている．この場合，Stefan-Boltzmann の法則を用いて地球の放射エネルギーを計算せよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.15　問題 15

地球の表面温度は平均的に言って $T \sim 300$ K である．この場合，黒体輻射による電磁波の波長はどの程度か計算せよ．

3.4.16　問題 16

地球がその熱エネルギーを失う唯一の方法は地球表面からの放射冷却である．この場合，電磁波は空気と散乱するがこれはその大半が弾性散乱であるためエネルギーを失うことはほとんどない．放射冷却が抑えられるのは雲があるときであるが，これは何故だと思うか？

3.4.17　問題 17*

地球表面から放射される電磁波は雲がない限り，そのエネルギーを失うことはほとんどない．しかし CO_2 による温暖化を主張している人々(これは物理屋ではない！)は，放射された電磁波が何故，CO_2 によって吸収されると思ったのか各自，自分の考えを述べよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

3.4.18 問題 18

最近の研究によると，CO_2 による温暖化の割合は 0.5 % 以下であることが分かっている．この場合，温暖化の原因は太陽そのものである可能性が高い．この場合，地球規模での温暖化や寒冷化に対してどのような物理的なメカニズムが可能であるか，調べてみよ．
(注：これは希望者のみの宿題)

第４章　重力のお話

地上で物体が落下するのは地球の重力がその物体に働いているからである．この力は常に引力であり，従って万有引力とも呼ばれている．

長い間，重力が何故，常に引力であるかと言う問いかけに物理屋は答えることができなかった．また質量があると必ず，重力が働くが，しかもその時の質量 (重力質量) は慣性質量と同等である．このような基本的な問題が場の理論の言葉で解決されたのは，実はまだつい最近 (１０年程前) のことに過ぎない．

現在，その重力が星を作り，銀河を形成し，そして宇宙を作る源になっている事が分かっている．そしてこの広大な宇宙空間は果てしのない大きさであり，そこには無数の銀河が存在している．その無限宇宙は限りなく遠い過去から悠久に存在しており，そして永遠の未来にもずっと在り続ける存在となっている．

4.1　重力

重力はその現象としては最も身近な問題であると言えるが，しかしながらその重力理論が「場の理論による定式化」として完成されたのはつい最近の話である．確かに重力場の理論の定式化は予想を超えて長い時間が掛かった事は事実である．それではその難しさの原因は一体，何処にあったのであろうか？ここではその基礎的な疑問に対してお話形式で解説をして行きたい．

4.1.1　重力は常に引力

重力は電気的な力とは本質的に異なっている．電気的な力には引力と斥力が存在しており，例えば陽子同士は斥力であるが電子と陽子は引力になっている．これに対して，重力はどの粒子間の場合も常に引力である．このことは重力理論を作るときに重要な要素となるが，同時にこれは電磁気学をあまり参考には出来ない事を意味していると考えてよい．従って，重力理論はゲージ理論では作れないことは明らかである．

どうしたら常に引力になるのだろうか？実はこれは場の理論をしっかり勉強してい

て，自分で計算している物理屋には難しい問題ではない．実際，これはスカラー場を交換すれば常に引力であることは良く知られている事実である．

また重力ポテンシャルがクーロンポテンシャルと同じように $1/r$ 型を持っている事から，交換される場は質量がゼロである必要がある．これらは実験からわかっている観測事実であるから，重力理論はそれらを満たす必要があり，これが理論構築の必須条件である．

4.1.2 慣性質量と重力質量

地上で物体が落下する時，その落下速度は物体の質量には依らない．現実の地上では空気があるため，空気との摩擦の影響で落下速度は勿論，物体の性質に依って異なっている．しかし真空中での落下速度は確かに，物体の質量には依存していない．何故であろうか？この理由は物体の重力質量とその慣性質量が同等であることに依っている．すなわち物体の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{4.1}$$

である．但し，m は物体の質量 (慣性質量)， $\boldsymbol{v}$ は物体の速度である．一方，この質点が地球から受ける重力ポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = -\frac{G_0 mM}{r} \tag{4.2}$$

と書かれている．但し，G_0 は重力定数であり，M は地球の質量を表し， m は質点の質量 (重力質量) である．また r は地球の重心からその質点までの距離を表している．

ここで大切な点は，運動エネルギーに出ている質量と重力ポテンシャルに出ている質量がともに m であり，同じ質量となっている事である．これは一見，当たり前のように見えるかも知れないが理論的にはそう単純なことではない．この質点の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G_0 mM}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G_0 M}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.3}$$

となるため，この運動が質点の質量 m には依らない事が理解できよう．すなわち，重力下での落下運動においては，その運動が物体の質量には依らない事を示している．

4.2　電磁気学との関連性

現在，現代物理学の理論体系のなかで最も信頼できる理論が Maxwell 方程式を基礎としている電磁気学である．これは沢山の観測データを再現できるように作られた現象論であり，自然科学そのものであると言っても良い．

この電磁気学の初歩的な解説は第２章で「電子の物理学」として解説しているが，詳しい電磁気学を勉強したい場合，教科書「電磁気学 (現象と理論)」を参照されると良いと思う．これはしかし一見，大学２年生用の教科書に見えるかも知れないが実質は研究者用の教科書であるため，易しい教科書とは言えないかも知れない．

電磁気学は場の理論であり，光を考えない限り電磁気学はそれ自体が完成された場の理論の体系を形成している．そして電磁波まで考慮してベクトルポテンシャルを量子化する理論体系を量子場の理論と呼んでいる．場を量子化するとその影響で場が出来たり消えたりする効果が現れるため，量子場の理論特有の現象が現れてくる．その現象で最もよく知られているものが $g-2$ と言われている電子の磁気能率の高次項の計算である．しかしほとんどの場合，場の量子化の必要は無く，フォトンだけが突出して重要な役割を果たしたため，場の量子化がよく取り上げられたのである．

重力の場合，重力子は観測されていなく，また将来，観測される事はあり得ないものである．それは重力の場合の相互作用の強さが電磁気の場合に比べて $\sim 10^{-35}$ は小さいため観測に掛かる事はあり得ないからである．従って，重力理論を作る場合，場の量子化は不要であると言う理論的な要請は重要な要素となっている．その重力理論の詳細は「新しい重力理論」のところで解説しよう．

4.2.1　電磁場と重力場の相互作用

最近 (２０２４年)、電磁場と重力場が相互作用している項の存在が証明されている．この問題はここでの議論の枠組みをはるかに超えてしまうので、解説は出来ない．しかしながら、今後、この相互作用の研究は新しい視点を生み出す可能性があるものと言えよう．この論文は
https://jxiv.jst.go.jp/index.php/jxiv/preprint/view/715/2113
から見る事ができる．

4.2.2　一般相対性理論の影響

重力理論と言うと一般相対性理論が理論の候補だと思っている人達が現在でも少ないとは言えないかも知れない．しかしながら，この一般相対性理論が抱えている問題点に対する批判はこれまですでに十分しているので，ここでは具体的な問題点の議論は差し控えて直感的な感想を記して行く事にしよう．

一般相対性理論は座標系に対する方程式であるが，まず，これが自然科学と関係していると言う発想が何故，これまで人々の間に生き続けてきたのかがわからない．物理学は質点の運動を記述するべき方程式を基礎としている．そしてその自然現象を記述する土台が座標系であり，その座標系に対してアインシュタインは何らかの形で方程式を作ってみたと主張したのである．しかしこれが何のことかさっぱり分からないと言う反応こそが正常な受け止め方のはずなのだが，人々は彼の主張を受け入れ，わかった振りをしてきたものである．さらにアインシュタインがその座標系に対する方程式の物理的な意味を理解していたとは到底，考えられない事であるが，今となってはどうしようもない事ではある．しかしながら，この理論のために失われた時間は科学者に取って膨大なものであり，自然をより深く理解したいと言う立場からすると残念としか言いようがないものである．

ところで，アインシュタイン方程式は座標系の計量を指定する計量テンソルに対する方程式である．この計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は通常の空間では非対角成分はゼロである．そしてこの対角成分は $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$ となっている定数の行列で表されている．これはある種の目盛を表しているが，これが座標の関数となると言う意味が全く理解できないものである．座標系の目盛スケールがその座標に依存してしまったら座標系の意味合いがなくなるのだが，アインシュタインは何を取り間違えたのであろうか？さらに目盛のスケールが変わったとしても，目盛が変わっただけで質点の運動の表現が変わる事はあり得ないことである．この目盛の修正が質点の運動に影響を与えると言う発想が理解できない．実際，具体的に書いてみればわかることだが，目盛がかわると表現の仕方が確かに少し変わるが，運動形態自体が変わることはあり得ない事が確かめられるのである．目盛が変わると言う発想は確かにユニークであり，だからこのような発想をする人を天才と呼ぶのかも知れない．南部達により提案された「カイラル対称性を持つ場の理論の真空は自発的にその対称性が破れる」と言う発想も非常にユニークなものであった．しかしこれらは自然界とは無関係であり，このような発想を評価する事は到底，できない事である．

● 一般相対性理論と重力場：　一般相対性理論という座標系に対する方程式が何故，重力と関係しているのかと言う問題は一つの仮定された方程式のためである．それは計量テンソル g^{00} が重力場 ϕ と $g^{00} \simeq 1 + 2\phi$ と関係づけられるはずであると言う仮定である．これはおよそ奇妙な式であるが，数学的にはこうすれば確かに座標系が重力と関係づけらている．と言うか，この式が求まるように Einstein 方程式は作られたわけである．但し，例えば $g^{00} \simeq 1 - 2\phi$ とすると重力が斥力になってしまう．このように，Einstein 方程式の中では重力場 ϕ が直接現れることはなく，さらに $g^{\mu\nu}$ は未知変数であり，従って式のなかで $\pm$ を制御することはできない．その意味で $g^{00} \simeq 1 + 2\phi$ と言う関係式は自然な仮定ではないことがわかる．このように，Einstein 方程式自体が自然科学としては到底，受け入れられる式ではないのである．

4.3　惑星の運動

ニュートン力学が最も重要な成功を収めているのは惑星運動の記述である．例えば，地球は太陽の周りを周回運動しているが，その軌道をニュートン方程式はほぼ完全な形で記述できている．この場合の力が重力であり，その力の強さが星の質量に比例している．太陽の質量が他の惑星よりも圧倒的に大きいため，太陽が中心の太陽系となっている．木星の質量があと数百倍重ければこの太陽系は連星となったことであろう．

4.3.1　平面運動

地球の軌道は平面運動となっているが，何故，平面だけを運動しているのかと言う疑問に対してニュートン力学は簡単に答えることができる．それは重力ポテンシャルが中心力である事と関係している．中心力だとその質点の角運動量 L が保存量となっている事 $(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=0)$ が簡単に証明することができる．そしてこの場合，質点の運動 r が角運動量と直交する

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}=0 \tag{4.4}$$

と言う事が分かるからである．従って，角運動量の方向を $z-$ 軸に選べば軌道を記述する質点の座標 r は $x-y$ 平面となることが証明されるのである．

4.3.2　軌道は楕円

地球の回転運動の軌道は楕円である．実際には木星など他の惑星運動との相互作用があり，このため軌道自体は少し複雑にはなっている．しかし１周期における回転運動においては，他の惑星の影響はほとんど無視しても十分良い近似であり，従って軌道は確かに楕円である．この場合のニュートン方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G_0Mm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.5}$$

であったが，これは簡単に解く事ができる．そしてその軌道を与える解は

$$r=\frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{4.6}$$

となっている．ここで A は軌道半径と関係しており，また ε は離心率である．地球の公転の場合，$\varepsilon=0.0167$ であり，これは地球の公転がほとんど「円」であることを示している．

4.3.3　観測量は周期

Kepler 運動において，その観測量は周期である．例えば，地球が太陽のまわりを１周する時間を周期と呼び，地球公転の場合，約 365.24 日であることはよく知られている観測事実である．

古典力学においては地球の軌道も観測量になっていて，確かに平均の軌道半径も離心率も測定されている．しかし細かい軌道変化などには依らない物理的な観測量が周期である．例えば，後に議論することになるが Kepler 問題に対する相対論的な効果はその周期に反映しているが，平均の軌道半径に対する相対論的な効果を調べる事は事実上，不可能である．

4.3.4　水星と他の惑星との相互作用

地球の軌道はほとんど円であるが，水星の軌道は離心率が $\varepsilon = 0.21$ とかなり大きいため楕円となっている．このため，幾何学的に軌道を書くとその楕円の近日点が割合，しっかり分かるため，この近日点が他の惑星によってどれだけ動くかと言う問題に１９世紀の人々は関心をもっていた．他の惑星が水星の近日点にどのような影響を与えるかと言う問題に関して恐らく，最初に詳しい計算が発表されたのは１８５９年における Le Verrier の論文であろう．彼の計算は事実上，幾何学的に行われているためその論文を検証する事は容易な事ではない．その後，１８９５年に Newcomb が同様な計算を実行しており，人々は彼の結果を引用している．

しかしながら水星の近日点の観測値がどの程度の誤差を持っているのかと言う最も深刻な検証がなされた形跡がない．例えば，Newcomb の観測値としては 5599.76 秒と言う数値が引用されてきたが，それから色々な量を引き算して最終的に 43 秒が残りこれが水星の近日点移動であるとされている．ところが，この量は周期で言ったら７桁―８桁目に対応している．現実問題としてこのような高精度の観測が２００年以上も前に可能であったのだろうか？さらにこれは現代においてもそれ程，容易な観測とは言えないものと思われる．周期の場合は，これが積分値になっているため，高精度の観測が可能であると考えられる．しかし近日点やある地点の半径などはそれが１点を表すため，これはむしろ微分値に近く従って高精度の観測が非常に難しいものと言えるのである．

4.3.5 太陽系外小惑星 (1I/2017 U1)

最近，太陽系外小惑星が発見されて注目を集めているが，確かにこれは重要な発見と考えられる．その小惑星は「1I/2017 U1 (Oumuamua)」と呼ばれているもので太陽系外天体であると考えられている．大きさは直径が 200 m 前後と推測されている細長い天体である．この小惑星が太陽の重力に捕まらなかった一つの理由として，その天体の速度の高速さにある．実際，その天体の遠方での速度 v_o は

$$v_o \simeq 0.9 \times 10^{-4}\, c \tag{4.7}$$

と推定されているが，これは地球の公転速度 ($v_e \simeq 1.0 \times 10^{-4}\, c$) とほとんど同じである．さらに太陽に最も近かった時点 (近日点) においては

$$v \simeq 2.9 \times 10^{-4}\, c \qquad \textbf{(at perihelion point)} \tag{4.8}$$

の速度まで上昇していた．これはエネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2} m_o v_o^2 = \frac{1}{2} m_o v^2 - \frac{G_0 M m_o}{R} \tag{4.9}$$

より求めることができる．ここで m_o は小惑星の質量，M は太陽質量である．また R は運動中の小惑星と太陽との距離である．ちなみにこの小惑星が地球軌道に到達した時，その速度 v は $v \simeq 1.7 \times 10^{-4}\, c$ となっていた．

この小惑星が太陽系外から飛来したことの証拠はその軌道が双曲線であり，さらにその離心率 ε_o が１をかなり超えている事によっている．実際，この小惑星の離心率 ε_o はその軌道の測定から

$$\varepsilon_o \simeq 1.19 \tag{4.10}$$

と推定されている．ここで双曲線の極座標表示を書いておくと

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon_o \cos\varphi} \tag{4.11}$$

である．この式は勿論，Kepler 問題の解と同じ形になっている．但し φ には制限がついていて分母が負になる事はない．すなわち式 (4.11) において常に

$$|\cos\varphi| < \frac{1}{\varepsilon_o} \tag{4.12}$$

である．さらに楕円との違いはその離心率の大きさにある．楕円では離心率は０と１の間であったが，双曲線の離心率は１を超えている．そして実際この小惑星の離心率

$\varepsilon_o = 1.19$ は１をかなり超えているため，この小惑星は太陽系外から飛来した天体であるとみなす事が合理的である．さらにこの小惑星がどこで形成されたのかと言う問題は興味深いものであるが，これを特定することは難しいとは思われる．しかしながらこの天体が太陽系外であると言う事だけで十分に面白いものと言えよう．今後，太陽系外の小惑星などの天体がさらに発見される事を期待したい．

4.3.6　天の川銀河とアンドロメダとの衝突時期

我々が住んでいる銀河系は天の川銀河 (Milky Way) と呼ばれているが，その銀河系に最も近い銀河系はアンドロメダである．夏の夜遅く，夜空にペガサスの大四辺形を探し，そこからその左下の頂点の星を探す．そしてそこから２個小さな星を左少し上にたどって行くとその直ぐ脇にぼやーと見える星雲がアンドロメダである．小さな望遠鏡でも十分に見える我々の隣の銀河系である．

そのアンドロメダと我々の天の川銀河がいずれ衝突して融合することが予測されている．ここではその衝突が起こる時期についてお話ししよう．この細かい力学はホームページに入れてあるのでそちらを参照して頂くことにして結果だけを議論しよう．現在，アンドロメダは天の川銀河に 1.2×10^5 m/s の速さで近づいている．よって初期条件として $t = 0$ で $v_0 = 1.2 \times 10^5$ m/s を取る．さらに銀河間の距離 L が $L \simeq 2.5 \times 10^6$ 光年であり，また銀河のサイズが約 1.2×10^5 光年，銀河の質量としては，ともに $M \simeq 4 \times 10^{42}$ kg とした．これより 計算結果は $T \simeq$ ３０億年 となっている．よって約３０億年後には二つの銀河は融合し始める事になる．

- 重力圏の突入時期：　ここで，２個の銀河が互いの重力圏に突入した時期を評価してみよう.「何か」が起こった時期の計算を行ってみると，その結果，$T \simeq$ ６９億年である事がわかっている．これは今から 約６９億年前 に「何か」が起こった事に対応している．少なくとも同じ方向に膨張していたとしたら，このように衝突を起こす事はあり得ない．一つの可能性としては６９億年ほど前に，アンドロメダに小型の星雲が衝突して融合したと言うものであろう．アンドロメダは我々の銀河よりも大きいことが知られているが，これも融合の結果である可能性があると考えられるが，これらはすべてお話である．

4.4 新しい重力理論

この節の解説はどうしても難しくなってしまうため，どこまで書いたら読者が興味を持ってくれるのか，まだかなり迷っている．基本的にはここは飛ばして読んで頂いても良いと思っているが，しかし重力の理論が場の理論として定式化されたことは非常に重要な事であり，そこを少しでも理解して欲しいと言う強い願いはある．

量子電磁力学にしても弱い相互作用にしてもまずはそれを記述するラグランジアン密度が書き下されることが出発点となる．これを具体的に書いても大半の読者にはほとんど意味をなさないとは思うが，書くだけ書いておこう．まず質量 m のフェルミオン ψ が電磁場 A_μ および重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用しているラグランジアン密度と質量 m_q のフェルミオン Ψ_ℓ が有限質量 M の弱いベクトルボソン場 $W^{\mu,a}$ と相互作用しているラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m(1+g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \\ \mathcal{L}_w &= \bar{\Psi}_\ell(i\partial_\mu\gamma^\mu - m_q)\Psi_\ell - gJ^a_\mu W^{\mu,a} + \frac{1}{2}M^2W^a_\mu W^{\mu,a} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a}\end{aligned}$$

と書かれている．ここで $F_{\mu\nu}$ は電磁場の強さで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である．また $G^a_{\mu\nu}$ は $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu$ である．これに強い相互作用を表す QCD のラグランジアン密度を書き入れれば，現代の場の理論をすべて書き表すことになっている．ここでは QCD のラグランジアン密度を書くことはしないが，これはどの教科書にも書かれているので参照されたい．

ここで QCD について簡単なコメントをしておこう．この QCD は量子色力学の略であるが，これは非可換ゲージ理論である．この非可換ゲージ理論には理論が持っている固有の性質があり，これが運動学にもかかわらずある種のダイナミックスさえも決めてしまう事が知られている．特に重要な性質として，QCD における構成要素であるクォークとグルオンに対する制限がある．これらクォークとグルオンはそれぞれカラー電荷を持っている．ところが，このカラー電荷はゲージ依存量である事が証明されている．すなわち，カラー電荷を持つクォークとグルオンは観測量ではない事が厳密に証明されているのである．このため，クォークとグルオンには自由場が存在していなくて摂動論さえもできない事がわかっている．従って QCD のラグランジアン密度を書いても，結局は何もできないのでそれを書いても無駄であると言う事である．

4.4.1　重力場の Poisson 方程式

ラグランジアン密度が分かるとそれから運動方程式が求められる．この式をしっかり追うことはかなりの専門的な実力を要求されるのでここでは解説はしないが，必要な結果だけを書いておこう．

重力場について，クーロンの時と同様に外場が働くとして求めて行く．この場合，重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathcal{G}_0 = Mg\rho_g = Mg\delta(\boldsymbol{r}) \tag{4.13}$$

と求まる．これは重力型の Poisson 方程式であり，確かに引力であることがわかる．ここで外場の場合 (陽子が静止している) $\rho_g(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ を使っている．この時，式 (4.13) の解は直ちに求まり

$$\mathcal{G}_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{Mg}{4\pi r} \tag{4.14}$$

となる．これより重力の相互作用ハミルトニアン H_g は

$$H_g = mg\mathcal{G}_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{G_0 mM}{r} \tag{4.15}$$

となり，重力の相互作用が引力であることがわかる．ここで $G_0 \equiv \frac{g^2}{4\pi}$ は重力定数であり，実験から決定されている．この相互作用が我々が用いている重力ポテンシャルそのものである．この場合，確かに重力質量として表れている質量が慣性質量と同じである事がわかる．さらに相互作用の強さも電磁気学の場合と同じである．電磁気学では相互作用の強さが $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ となっていて e がそれぞれ相互作用する粒子と結合している．重力の場合も同じで g がそれぞれ相互作用する粒子と結合している．但し，重力の場合は，それに加えてそれぞれの粒子の質量にも結合していてこれが電磁気学との重要な相違点でもある．

4.4.2 地球公転の周期

Kepler 問題の最も信頼できる物理的観測量はその公転周期である．地球の公転周期は最も良く測定されている事は確かな事であり，これがニュートン力学が正確に予言している物理量である．そして地球の公転周期は 365.24 日である．これに対する一般相対性理論による補正が計算されていて，これは１年間に

$$\Delta T \simeq -3.6 \quad \text{秒} \tag{4.16}$$

周期が短くなると言う予想である．これは地球の公転周期が１年間で 3.6 秒だけ進む事に対応している．この公転周期は水星の近日点移動よりもはるかに正確に計算されるものであり，任意性も全くない物理量である．ところがこれ程大きな進みであれば当然，観測にかかっているはずである．何故，一般相対性理論研究を標榜している人達はこの問題を提起してこなかったのであろうか？これは現在においても謎である．水星の近日点移動に関しては測定の観点からみても (観測値は１００年以上も前のもので，近日点移動はさらにその１００年前の観測値と比較したもの)，また理論的な観点から言っても不確定要素が多すぎる．一方，地球公転の周期は物理的に最も信頼できる物理量である．

地球公転周期の精密測定の直接の観測結果は現在まで報告されてはいない．しかしながら，うるう秒による間接的な観測結果はよく知られている．これは１９７２年から始まって４０年間で２５秒補正しているので，１年間では

$$\Delta T \simeq 0.625 \ \pm 0.013 \ \text{秒} \tag{4.17}$$

の遅れに対応している．一方，新しい重力理論も公転周期に対する補正を予言している．そしてそれは１年間では

$$\Delta T \simeq 0.63 \quad \text{秒} \tag{4.18}$$

の遅れとなっていて，観測値とよく一致している事がわかる．この事から一般相対性理論の予言値は地球公転周期の観測値と比較して，その方向も大きさも全く一致してはいない事が示されている．これより理論模型として，一般相対性理論は完全に排除されていることがよく理解できると思う．尤も，現実問題としては一般相対性理論が現代物理学のどの分野においても応用された事実はなく，具体的な影響が物理学上あるわけではない．実際，この理論はブラックホールとかビッグバンとか言う，およそ科学的とは言えない宇宙論において応用 (利用) されて来ただけなので，幸い，特に問題が生じることはないと言えよう．

4.4.3　重力波

重力波について，ここで解説せざるを得ない事は理論物理屋として本当に恥ずかしい事ではある．まさか，重力波を発見したなどと主張する「集団」が現れるとは考えもしなかったのである．以下に簡単に解説するように，重力波を観測したと主張する人々は，恐らくは物理屋とはかけ離れた素人集団であり，基礎的な理論物理学の修得レベルとしては物理学科４年生にさえ達していないであろうと推測される．

真空中を伝搬するためには，その物質はフォトンなどの粒子であることが絶対条件である．これは膨大な検証実験から「エーテル仮説」は完全に否定されている事と関係している．実際，現代物理は相対性原理を基礎にした理論体系を構築して，その理論体系のもとで現在まですべての基礎的な実験は理解されている．さらに相対性理論の妥当性に関しては１００年以上に渡る膨大な，そしてあらゆる角度からの実験から検討を重ねてきたが，これと矛盾する現象は全く観測されていない．

従って「graviton」が観測できない限り，重力波の検出は不可能である．ところが，この重力の相互作用の強さは電気的な力とくらべると 10^{-35} は小さいため，どのように工夫したとしても「graviton」を観測することは不可能である．このことはよく知られている事実であり，このため物理学の教科書では重力波についてあまり解説していないのが一般的である．

4.5　宇宙論

この宇宙を構成している構成要素は基本的には陽子，電子そしてフォトンである．ニュートリノも安定であり宇宙に存在している事は確かなことであるが，宇宙論における役割はまだよくわからない．中性子も原子核中では安定なので構成要素の一つに数えても良いが，この中性子は基本的には崩壊すれば陽子，電子そして反ニュートリノになるので，ここでは特に言及する必要はないと考えている．

大切なことはこれらの基本粒子は安定であるという事実である．これは宇宙論では何を意味しているかは明らかであろう．宇宙は無限の過去からずうっと存在していると言うことであり，これが宇宙論を展開する時の基本原理となっている．この事実を無視しているビッグバン模型はもはや科学的な議論の対象にはならない事が明らかであろう．

4.5.1　宇宙の構成粒子

宇宙を構成している粒子が基本的には陽子と電子であることはすでに述べたが，これらが安定な粒子であることは非常に重要である．光も安定な粒子ではあるが，しかしこれは生成されたり消滅されたりする粒子である．このため，粒子数が一定であると言う訳には行かない．これは光がボソンに属していることが理由である．これに対して陽子も電子もフェルミオンであり，これは消滅することはないし，新しく生成されることもない．宇宙の構成要素が安定であるため，この宇宙も無限の過去から存在している事が宇宙論の出発点である．

4.5.2　星

陽子と電子は引き合い，水素原子を構成する．そしてこの水素原子が２個集まると水素分子となって行く．この水素分子が宇宙空間において星の形成前に見られる主な基本物質であることは確かである．

宇宙には主に水素分子で成り立っている集合体が存在しており，これは分子雲と呼ばれている．また電離した水素原子が存在している H-II 領域として知られている水素原子の集合体も存在しており，これらが星の誕生の元になっていると考えられている．

星の原型となる質量が太陽質量程度の場合，その内部では核融合反応が起こることになる．この核融合反応は，結果的には４個の陽子が１個の He-原子核と２個の陽電子と２個のニュートリノになる反応過程に対応している．

星の質量が太陽の数倍を超えると中心部の温度が十分高くなり，このため３個の He-原子核が融合して ^{12}C 原子核を形成して γ 線を放出する原子核反応が起こり始めることがわかっている．そして一度，^{12}C が星の内部でできると，この原子核と He が衝突して次々とより重い原子核を形成して行くことになる．このため，He に続いて ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne などの He の倍数の原子核が数多く形成される事になっている．実際，宇宙における原子核の存在比では確かにこれらの原子核が豊富である事が確認されている．

4.5.3　銀河系

銀河系の形成に関しては，良くわからない．我々が観測できている宇宙には１千億個程度の銀河が存在しているものと考えられているので，これを逆にたどって行けばどうなるかがわかる可能性はあると考えられる．しかしこの辺の考察はまだできてはいない．

我々の銀河系の中には数千億個の星が存在しているものと推定されている．この星の数自体はそれ程，重要な意味を持ってはいないが大雑把な数としては意味があると考えられる．銀河系の核には何か大量の質量を持つ「準星」のようなものが存在しているのであろうが，この辺の物理は良くわからない．

現在，我々の銀河系と隣のアンドロメダとは３０億年程経つと融合し始める事がわかっている．このように現在，存在している銀河はいずれ重力により引き付けられて融合を重ねて行き，最終的には２個か３個の大銀河集団になり，そしてそれらがいずれは衝突して，ファイアボール (火の玉) のような状況を作り出して行くものと考えられる．そしてこれまでの言葉を使えば「初期宇宙」が作られるのであろう．そしてこの宇宙は膨張を続けて行き，またいずれは融合をして行くと言う「衝突による爆発とその後の膨張」を繰り返して行くものと考えられるのである．

4.5.4　超銀河宇宙

これまで大宇宙と考えられていた宇宙は１千億個程度の銀河系の集団であり，この宇宙は有限の大きさでおよそ１５０億光年程度であろうとされてきた．しかし実際はこの孤立した宇宙が１個だけ存在するとしたら矛盾が生じてしまうため，このような宇宙が無数にあると言う描像が合理的であることがわかっている．従って，この１千億個程度の銀河系の集団を「超銀河宇宙」と呼ぼう．この超銀河宇宙は爆発と膨張を繰り返して行くものと考えられる．

前述したように，我々が属している超銀河宇宙は約１千億個の銀河系が存在してお

り，その大きさは約１５０億光年であろうと考えられている．これらの数にあまり重要な物理的な意味合いはないが，大雑把な目安としては意味があると考えてよいであろう．

それでは隣の超銀河宇宙を観測することは可能であろうか？残念ながら，現在までのところ隣の超銀河宇宙までの距離を推定するべき物理的な材料を持ち合わせていないので，その距離の観測の可能性はほとんどないであろう．

以下は夢のような話になってしまうが，一つだけ観測する可能性があると考えられる事象がある．それは，たまたま爆発途上にあるような超銀河宇宙が近隣に存在する場合である．この場合，それは膨大な光を放出している事になるであろう．さらに，光を発している物質はほとんど光速に近い速度を持っている粒子の集合体であると考えられる．従ってこの場合，これらの光は強いウルトラバイオレットシフトを起こしているはずである．我々の超銀河宇宙では現在も膨張している銀河を観測しているため，その光はレッドシフトとなっている．このため，強い紫外シフトの光が観測できれば近隣の超銀河宇宙が爆発した兆候を観測したことに対応する可能性があると考えられる．

4.5.5　無限宇宙

この超銀河宇宙が無限個存在しているのが我々の真の大宇宙 (無限宇宙) である．これは勿論，無限の広さを持っていて，無限の過去から悠久に存在してきた事は間違いないことである．

● 疑問：何故，無限大なのか？

根拠１．

宇宙が無限の大きさであると言う根拠はどこにあるのであろうか？その一つとしては，もし超銀河宇宙が有限個であったとしたら，これは必ず，重力によりいつかは融合するはずであり，この宇宙が無限の過去から存在していると言う事実に反する事になっている．実際，宇宙が無限大であればこれはそれぞれの超銀河宇宙が安定であることが証明できるものである．

根拠２．

宇宙が無限の大きさと無限個の超銀河宇宙を持っているべきであると言うもう一つの根拠は「背景輻射」と関係している．超銀河宇宙が爆発と膨張を繰り返し行ってきた描像について解説したが，この場合一つ重要な問題が生じている．それは１回の爆発によりかなり大量のフォトンを放出していると言う事実である．これは明らかに他の宇宙空間に放出されるため，この超銀河宇宙はその重力エネルギーを１回の爆発で有限量失っている．これが無限の過去から繰り返しているとするならば，その失ったエネルギーが無限になり，現在の超銀河宇宙の重力エネルギーと矛盾してしまうのである．従って，その分のフォトンのエネルギーをどこかから供給しているはずである．そしてそれが背景輻射であると考えられるのである．宇宙が無限である限り，有限の背景輻射が存在する事は自然な帰結と言えるであろう．

そして超銀河宇宙の爆発と膨張の繰り返しは「背景輻射のゆりかご」の中で可能であると考えられるのである．勿論，重力エネルギーが爆発と膨張の繰り返しの基礎的なエネルギーであることは確かではあるが，しかしそれも「フォトンの海」だからこそ可能と言えるのであろう．

4.6 Homework Problems

以下の問題を自分の言葉で回答する事．

4.6.1 問題 1

月面上で物体を落下させると，その運動は物体の質量には依らない．何故であるか直観的に答えよ．

4.6.2 問題 2

地球上と月面上での重力の力の強さを比較せよ．但し，力は $F = -\frac{GMm}{r^2}$ で表されている．ここで地球と月の質量と半径は
$M_e = 5.97 \times 10^{24}$ **kg**, $R_e = 6378$ **km**
$M_m = 7.34 \times 10^{22}$ **kg**, $R_m = 1737$ **km**
で与えられている．

4.6.3 問題 3

クーロンポテンシャルも重力ポテンシャルもともに $1/r$ の形を持っている．何故だと思うか？

4.6.4 問題 4

電磁場には光子 (フォトン) があるが，重力場には重力子 (graviton) が存在していない．これが例えあったとしても観測できないことが知られている．何故だと思うか？

4.6.5 問題 5

一般相対性理論は座標系に対する方程式である．これは物理学としてはどのような意味があると思うか，自分の言葉で考えてみよ．

4.6.6　問題 6

慣性質量と重力質量とはそれぞれどのような質量を意味しているのか答えよ．

4.6.7　問題 7

電磁気学の場合，粒子は電荷を持っておりそれは量子数に対応している．例えば，陽子の電荷は $+1$ であり電子は -1 である．重力の場合，これに対応する物理量が存在すると思うか？

4.6.8　問題 8

惑星の運動が平面運動になることは重力が角運動量を保存する力である事と関係していた．太陽系の惑星のほとんどが同じ平面上を運動していると言う事実から，太陽系の生成過程について考えてみよ．

4.6.9　問題 9*

電磁気学において結合定数は e であり，粒子が相互作用する場合の強さを表している．重力の場合，この結合定数は何であるか？

4.6.10　問題 10

中性子は寿命があり，約１５分で崩壊して陽子と電子と反ニュートリノになる．ところが，中性子は原子核中では安定である．何故だと思うか，直感的に答えよ．

4.6.11　問題 11

太陽の組成はその大半が水素であることが知られている．一方，惑星はその組成として水素以外の物質がかなり多い事が知られている．この場合，その違いがどこから来たと思うか自分の考えを述べよ．

4.6.12 問題 12

生命体が存在できるためには水と空気が必要であると考えられている．そしてこの場合，惑星の重力が一定以上の大きさを持つ必要があるとされているが，これは何故だと思うか？

4.6.13 問題 13

大気圧とは基本的には空気の重さである．それは空気が地球の重力によって地上に引き付けられているからである．しかし液体のように地球の表面にのみ存在しているわけではない．何故だと思うか自分の考えを述べよ．

4.6.14 問題 14

液体は重力が一定以上強いときにのみ存在する．この場合，宇宙空間では液体はどうなると思うか？

4.6.15 問題 15

地球の公転速度が大雑把にどのくらいか計算してみよ．但し，公転軌道半径 R は $R \simeq 500c$ である．ここで c は光速で $c = 3 \times 10^8$ m/s である．また公転周期 T (1年) は約 $T \simeq \pi \times 10^7$ s である．

4.6.16 問題 16

宇宙が無限に広いとすると Olbers のパラドックスと矛盾する可能性がある．この Olbers のパラドックスとは星が一様に分布していると仮定した時，星の光をすべて集めるとその強度が無限大になってしまうと言う計算である．無限に広い宇宙がこの Olbers のパラドックスと矛盾しないかどうかを検討せよ．

(ヒント：光速が有限であることがポイント)

4.6.17　問題 17

地球表面における重力による運動方程式は地球の自転の影響を受けている．そのうちの一つに遠心力がある．これはどのような効果があると思うか？

4.6.18　問題 18

地球表面における重力による運動方程式は地球の自転の影響を受けている．そのうちの一つにコリオリ力がある．下図を参考にしながら，台風の渦が反時計まわりになる現象を説明せよ．

• **台風の渦：**　地球規模でコリオリ力の影響を示している現象はいくつか知られている．その中でも台風の渦が反時計周りに回っている事は良く知られている現象である．これは台風の中心が上昇気流のため気圧が減少し，風が中心に向けて吹き込むからである．この場合，図で示したようにコリオリ力は右側に働いている．

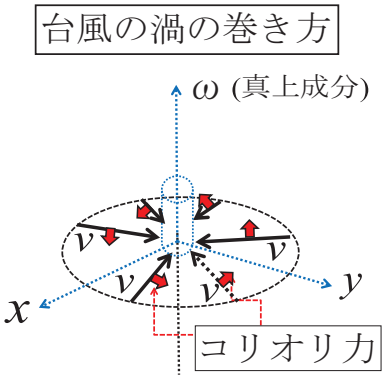

図 4.6: 台風の渦の巻き方

第５章　ブラックホールのお話

現在でもブラックホールの話題が色々なメディアでよく取り上げられている。しかしながら、ほとんどの場合、それを書いている人はブラックホールが何なのかを理解しているわけではない。この小ノートではブラックホールについて科学的な裏付けのある解説をして行こう。巷に氾濫している情報があまりにもひどすぎるのである。まるで「あの森に神がいた。自分は見た事がある」と言うお話にそっくりな形で「あの銀河の中心核にブラックホールがある。自分達はそれを撮影した」と主張したのである。これはブラックホールの実態を理解していない事が原因なのだが、しかしこれに対して人々は「ブラックホールが発見されたんだ」と思ってしまう危険性がかなりあると思われる。

5.1　ブラックホールとは何か？

最近、多くの人達からブラックホールについての質問が寄せられている。それで、ここでは簡単でしかし専門的に裏付けのある内容を解説して行きたい。ブラックホールとは星の一種と考えられているが、その定義 (名前の由来) は星とは無関係であり、アインシュタイン方程式の「ある特殊解の特異点」から来ている。しかし一般的にはブラックホールの専門家と称する人々が抱くイメージは「中性子星をさらに高密度にしたような星で光がその境界から外に抜け出せない」と言う、そういう星をイメージしているのであろう。

- 時空の黒い穴：

そして彼らはそれを「黒い穴」と呼んであたかも普通の星ではない特別な「時空の穴」と言う宣伝をしている。ところが、これらの専門家はブラックホールの動力学については全く理解していないし、さらには中性子星の物理に関する計算を自分で実行できる人達ではない。実際、彼らは自分の想像力により話を進めているため、これは科学になっているとは到底、言えないものである。このため一般の人々は長い間、混乱状態に陥っている。

5.1.1　M87 銀河の核

最近、ブラックホールかも知れないと言われている観測上の星は、M87 銀河の中心核と関係している。これは約６千万光年離れた銀河系でその直径は約１２万光年となっている。そしてその中心核には太陽質量の６５億倍の質量を持つ銀河核が存在していると考えられている。この辺の数字の正確さは別として、銀河核に大質量の中性子星のようなものが存在していると考える事は自然なことであり、現代物理学と矛盾はしていない。この M87 銀河の中心核に中性子星が存在しているとしたら、その半径は約１万 km 程度であり、地球よりもちょっとだけ大きい程度である。

- ブラックホールと中性子星：

もしこれをブラックホールの運動学で計算したとすれば、この半径の内側では光が脱出できないと言う事になっている。中性子星との違いはこの１点だけである。すなわち、光が外に出られないと言う事だけがブラックホールの特徴である。従って、この違いを観測する事は最初から不可能であることがよくわかると思う。

- 大質量の中性子星の形成：

但し、このような大質量の中性子星が形成されるためには、超新星に対応する爆発が起こっていたはずである。この時に高速の粒子が周りに飛び散るため、場合によってはそのかなり外側に何らかの形の星雲が見える可能性はあると考えられる。これがリング状になっているとしたら、角運動量の関係から何か他の大きな星 (または銀河系) との衝突も起こっていた可能性があるかも知れない。このような大質量の中性子星的な星がどのように形成され得るのかと言う計算は非常に重要なはずであるが、具体的な計算が実行された形跡はない。これは新しい重力理論が発見されてからまだ１０年程しか経っていない事と関係しているものと思われる。現実的な問題として、中性子星的でその質量が膨大になるような星の存在は現代物理学の視点かみて十分可能であると考えられるし、研究対象としては面白い問題である。従ってこの分野においては、今後の発展が強く望まれるものであるが、しかし科学の定義が「再検証が可能である」と言う条件である限り、宇宙物理学が科学になり得るかどうかは難しい問題を含んでいる事は確かである。

5.1.2 科学担当者の責任か？

ブラックホールが発見されたなどと大げさに書いているメディアは問題ではある。しかし、この場合それを書いている科学担当者に必ずしも責任があるとは言えないかも知れない。むしろそれを発信している物理屋または天文屋に問題があると言えよう。彼らはブラックホールについて、昔ながらの知識はもっているとしても、その最新の理論物理学に関してはほとんど何も理解していないのが現状である。

5.1.3 ブラックホールと中性子星

この理由として、ブラックホールの物理を取り扱うためには、場の量子論、宇宙物理学、原子核物理学そして一般相対性理論をかなり深く理解し、また具体的にその分野で計算ができないと理解できない問題だからである。

- 重力崩壊？：

例えば、原子核物理学の計算をしている人は、核子 – 核子間の相互作用には近距離で極めて強い斥力が働く事をよく知っている。このため中性子星をはるかに超えた高密度の星を作ることは原子核物理学の観点から言って、不可能な事である。しかしながら中性子星程度の密度の星ならば、その質量が増えても星として存在する事に問題となるような事は何もない。ましてや、重力によって星が潰れることなどあり得ない事は、重力がその原点においてもそれ程強くはならないことから明らかなのである。これは有限な密度分布を持つ場合の重力場を計算してみれば誰にでもわかる事である。ところが、大半の宇宙論屋はこの重要な点を理解していないので想像の世界で話を進めている。蛇足になるとは思うが、付録に有限密度の分布関数の場合の重力ポテンシャルについて、ちょっとだけ式を書いておこう。

5.1.4 宇宙の話とロマン

しかしブラックホールに関しては人々に取ってそれが何であるのか良くわからないため、なおさらに興味を惹かれることは至極、自然な事と言えよう。それは宇宙の話にはロマンがあるからであろう。ここではブラックホールとは一体何なのかをできる限り優しく、わかり易い言葉で解説して行こう。このため厳密さは欠いているが、その知識としては正しいものを伝達している。従って若い人達がこのノートを読んだ後、より深くこの問題を理解しようと思い、もう一段上の解説書 (場の量子論の教科書になるが ••) を読み進みたいと思うきっかけとなるように願っている。

5.2　ブラックホールの物理

もともとブラックホールは物質がない場合のアインシュタイン方程式を解いた場合、そのうちの特別な解が特異点を含むことから、その特異点と関係して使われ始めたものである。従って、星の形成などの物理的な条件がないため、ブラックホールと言っても時空にある「黒い穴」であるとして見たり、その表面の空間が変形しているため光が曲がって外に出られないと言って見たりで、荒唐無稽なお話以上の物理は存在していない。このためブラックホールと言う名称だけが独り歩きして現在に至っている。

5.2.1　中性子星

専門的な解説では、ブラックホールは質量がギュッと詰まった状態の星であるという事になっているのであろう。従って、どちらかと言えばそれは中性子星に近い星と言うイメージとなっているが、それよりももっと密度が高い星と想像しているのであろう。しかしそれでは「それがどのように形成されるのか？」と言う物理学はブラックホールのお話には出てこない。そもそも元になっている一般相対性理論はダイナミックスを扱う理論ではないので、その関連の理論体系や方程式は存在していないのである。

5.2.2　銀河の核

ブラックホールは星の内部構造とは無関係となっていて、単純に星の密度が非常に高いとしか定義されていない。しかしながら、星の密度が非常に高い星として中性子星が見つかっており、この存在はパルサーなどの測定から確かな事である。これらの事から銀河の中心にある銀河核に中性子星を巨大化したような星が存在しているとしても驚くことではない。実際、１千億近くの恒星達を重力で引き付けている事から、銀河核に巨大な星が存在するとした方が自然な事である。しかしながら、その実態は観測が難しく、観測データの点でも十分とは言えなく、まだまだ物理学にはなっているとは言えないものである。

5.2.3　ブラックホールの表面

ブラックホールの表面では空間が歪んでいて光が外に出られないというのがその最も重要な仮説である。ところが３次元空間が歪むと言う物理的内容が全く分からない

のである。空間の歪みは光の軌跡で置き換えているのだが、光 (フォトン) が空間をどう伝搬するかと言う問題は古典力学では答えられない。一般相対性理論はダイナミックスとは無関係な定式化で構成されているが、これはどちらかと言えば古典力学を相対論化する事を視野に入れて作られたものである。従って、光の軌跡についてはこの理論形式では何も議論できないものである。それはフォトンは電磁場を量子化して初めて理解できるものである事に依っている。さらに言えば、空間と言ってもこれは座標系の事であり、実際の空間を人間が認識する事はできていない。

5.2.4 空間の歪みは物理音痴の戯言

従って、空間の歪みと言っても、勿論、これは誰も理解できなく、その絵を書いている人達は単に、SF 的に想像して描いているだけである。そもそも空間が歪むなどと言う発想は物理音痴の人の戯言であり、物理学とは無関係である。

5.3　一般相対性理論のお話とアインシュタイン

一般相対性理論についてここで詳しい解説をするつもりはないし、その解説をする価値もない理論模型である。一般相対性理論は座標系に対する方程式であり、アインシュタインは星が分布していたらそのあたりの座標系が変更を受けるであろうと想像して作った理論で、明らかにこれは物理学の素人の作品である。さらに言えば、このように作った理論が相対性理論と矛盾が生じていることはわかっていたと考えられる。このためこれまで最も重要であった相対性理論を「特殊相対論」と呼び、新しく定式化したものを「一般相対性理論」と呼んだのであろう。

5.3.1　相対性理論とその重要性

相対性理論と言うと、これはアインシュタインが成し遂げた仕事だと思っている読者が大半であろうと思うが、どうであろうか？　実際は、彼の功績をどこまで評価してよいかはそう単純ではない事が現在はわかっている。

- 静止質量：

確かに静止質量を Lorentz 不変な量と結びつけた功績はそれなりに評価されても良いとは思われる。しかしながら相対性理論の重要性はこの静止質量の問題にあるのではなく、考えている理論形式が相対論の変換 (Lorentz 変換) に対して不変であると言う定式化にその本質的な重要性がある。そしてこれらの理論形式は何人かの人達によってアインシュタイン以前にすでに行われていたのである。主な仕事として、相対論の変換性は Lorentz が行っているし、相対論における $3 \oplus 1$ 次元空間での不変性をうまく記述する方法は Minkowski が行っている。実際、アインシュタインは Minkowski が ETH 大学で行った講義に出席していたと言われている。

- 過大評価：

現在、専門家の間では相対性理論に対してのアインシュタインの功績が過大評価され過ぎているものと考えられている。また、彼の論文ではすべて自分一人でやったような書き方をしていることが問題視される事があるが、当時においてはこのような書き方が過大評価の一因になっている可能性はあると思う。

- 一般相対性理論は相対性理論と矛盾：

一方、一般相対性理論が最も重要な相対性理論の変換性を破っている事を考えると「アインシュタインは相対性理論の本質を理解していなかった」と考えざるを得ないのである。この点からしても一般相対性理論を評価しようがない事が理解されたと思う。

5.3.2　物理学の基本方程式

物理学において基本方程式を作ろうとしたら、それに対応する自然現象を精査して余程、ざまざまな角度からあらゆる検討を重ねる必要がある。ところが、アインシュタイン方程式は右辺に星の分布関数を持ってきて、その影響で座標系が変更を受けるとして方程式を作ったのである。

- 理論の根拠：

ところが恐ろしい事に、その根拠となる自然現象が存在していないのである。さらに言えば、座標系に対する方程式が何を意味しているのか全く分からないし、模型の作成者本人も空間が歪むだろうと言う漠然とした描像しかなかったのであろう。１９世紀の終わりに「空間の歪み」について議論した論文があるようだが、アインシュタインはそれを参考にしたのであろうか‥。いずれにしてもこれは科学にはなっていない理論模型である。

5.3.3　アインシュタインの物理センスについて

これまで一般相対性理論を批判してきたが、アインシュタイン本人についてはコメントをほとんどしていない。しかしながら、ここではアインシュタインについて簡単な感想だけ述べておこう。彼が物理音痴であったかどうかそれは正確にはわからない。一般相対性理論が作られたときは、まだ量子力学さえ発見されていなかったので、彼が量子力学的で確率的な考え方を持っていなくても仕方がない事でもある。

- ソルベイ会議での量子力学論争：

しかしながら、１９３０年ソルベイ会議におけるボーアとの有名な量子力学論争をみる限り、彼は物理学における確率的な振る舞いの本質を理解できていない事がわかる。これはアインシュタインが決定論的世界観を持ち続け、その世界観の中心にある一般相対性理論を守りたかったのかも知れないが、これは良くわからない。今となっては量子論的なそして確率論的な描像が物理学の基本である事は周知の事実である。ところが、これと矛盾している一般相対性理論を信奉する集団が世の中には存在していて、彼らが依然として様々な問題を惹き起こしている。彼らの目的は何なのだろうか？

5.4　物理学と職人

物理学の分野で何か良い仕事をするためには「物理の職人」となる事が必須条件である。そして例えば「理論物理の職人」になるためには、基礎的な物理学 (特に電磁気学) の理解のため、様々な問題を解いたり、理論形式の検証に膨大な時間を注ぎ込む事が最低条件である。思い付きで物理が理解できることはめったになく、新しい仕事が簡単にできる事などまずあり得ないものである。

5.4.1　職人の重要性

この事はどの分野でも同じであろう。日本人には職人である事を誇りに思う文化が長く人々の間に根付いている。そしてこの職人気質はドイツのマイスター制と同質と考えられるが、これが日本やドイツの発展を支えてきたものと思われる。実際、日本の発展をこれまで支えてきた人々は町工場や工房や中小企業で働いている職人達である事はまず間違いない事である。

5.4.2　理論物理職人の激減

理論物理学では職人的な研究者が激減している。それは現在、多くの研究者が「知識偏重」型になっている事と関係している。知識を右から左に移しても学問の真の発展はない。常に、様々な技術を磨いて、より高いレベルにと普段の努力をする事をして始めて少し進歩する可能性が見えてくるものである。ところが、近年そうした職人肌の学者があまりにも少数になってしまっている。そのうちに、理論物理学の職人は絶滅危惧種に指定されるかも知れない。

● All Physics Institute :
その中にあって、現在、その数少ない職人タイプの研究者が集まって「All Physics Institute」 (よろず物理研究所) を作り、理論物理学の研究に励んでいる。この集団は「赤貧」に近い状態にもかかわらず、非常に活気があり理論物理学の職人としての自覚もある。この職人集団によって新しい現代物理学が再構築されつつあり、いずれ完成された理論体系が作られることになるのであろう。

第６章　何故、一般相対性理論は無意味か？

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である．この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである．しかしながらこの一般化に物理的な意味はない．従って，$g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である．この問題は物理学と関連する理論ではないが，しかし歴史的には重要でもあり，何故，この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう．

6.1　相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である．このため，どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている．これが相対性理論の本質である．この自然界は 4 つの相互作用で理解されている．電磁的な相互作用，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている．これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない．しかし，必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう．

6.1.1　Lorentz 変換

静止系 $R(t,x,y,z)$ における運動方程式が静止系に対して，速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 ($S-$ 系) $S(t',x',y',z')$ においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である．これは

$$x=\gamma(x'+vt'),\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right),\qquad y=y',\qquad z=z' \tag{6.1}$$

であり，これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である．

6.1.2 Lorentz 不変量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる．ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして４次元空間の微小距離の２乗 $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

を挙げておこう．

6.1.3 Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{6.2}$$

として定義したものである．これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{6.3}$$

に対して不変である事が簡単に確かめられる．Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \equiv g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{6.4}$$

としている．この時，$dx^\mu,\ dx_\mu$ を

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \tag{6.5}$$

として導入している．また計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている．この拡張は確かに間違ってはいない．しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである．この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため，計量にはなっていない．

6.2 一般化の危険性

$(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる．そしてそれを式 (6.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない．しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある．

6.2.1 $(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう．$(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが，しかしながらこれは結果であり条件ではない．当たり前の事であるが，$(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない．この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である．相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり，変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている．これに対して，数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが, これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが，しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である．

6.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 $(ds)^2$ を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{6.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる．これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど，深刻な間違いである．どう見ても，この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう．

6.2.3 $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (6.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる．この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが，物理学に取っては特に意味があるわけでもなく，むしろ不要であると言えよう．

6.3　一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [6]．従ってこの方程式について，ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない．計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない．さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合，その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である．この場合，元の $(ds)^2$ の式 (6.2) を使えば問題ないのである．よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても，それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと，そう言う事は全くない．

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている．恐らく，この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが，しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない．

6.4　負の遺産

このような簡単なことが何故，３０年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない．多くの若者がこの一般相対性理論と言う全く無意味な理論に長い間，振り回されてきた事実は重い．その失われた時間を取り戻すことは出来ない．これは負の遺産どころの話ではない．しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう．

ちなみに，ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて，水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった．これは水星の軌道の式で『空間における飛び (不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである．勿論，これは科学にさえなっていないものであるが，物理学の歴史においても，これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう．

[２０２３年４月加筆]

第７章　力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである．その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果をある程度は内包している．この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である．

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である．この速度 v は約 $v \simeq 10^{-4}c$ である．従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ である．よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期 (１年) が約 $\pi \times 10^7$ 秒である事から，これまでの Newton 力学におる周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる．

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう．しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである．

7.1　重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている．従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{7.1}$$

と求まっている．右辺の第２項が新しい重力ポテンシャルの補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を含めた様々な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているので，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

7.1.1　非可積分ポテンシャル

式 (7.1) の第２項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている．かって，カオスの理論が流行していた時があったが，その頃，この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった．この場合，非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた．従って，この取り扱いには十分な注意が必要である．

非可積分ポテンシャル $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$ がある場合，厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう．ここではこの問題を詳しく見て行こう．まず式 (7.1) で与えられるポテンシャル問題を解くと，その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{7.2}$$

となっている．この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり，何か特別な事を考える必要があると言うわけではない．但し，定数の修正はあり，ここでは A_g と L_g がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{7.3}$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}} \equiv \ell\sqrt{1+\eta} \simeq \ell\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right) \tag{7.4}$$

と定義されている．但し, η は

$$\eta \equiv \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{7.5}$$

である．

7.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない！

軌道を与える式 (7.2) には明らかに問題がある．まず，一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) \tag{7.6}$$

を見てみよう．この場合，この式はデカルト座標

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{7.7}$$

で表す事が出来ない．実際，$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$ 項は

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r}\cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r}\sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \tag{7.8}$$

としてみると分かるように，デカルト座標では表現不能である．元々はデカルト座標から出発しているので，これは深刻な問題である．

7.1.3 軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある．軌道の解である式 (7.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon\cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である．これは軌道 r が $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ でどうなっているのかを見れば良くわかるものである．すなわち，

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0 \tag{7.9}$$

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\pi\eta}, \qquad \varphi = 2\pi \tag{7.10}$$

となっているため，同じ点で軌道に飛びがある．この差を Δr とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \tag{7.11}$$

となっている．但しこれは水星の場合である．これは勿論，自然界では起こってはならない現象である．

7.1.4　軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが，一般相対性理論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである．しかも，観測値と理論値が３桁近くも一致していたと言う主張であった．これは，一般相対性理論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が，実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう．

さらに言えば，水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には１００年間の水星近日点シフト値として求められたものである．この場合，水星近日点シフトの観測値から，木星などの影響を考慮した計算値を差っ引く必要があったのである．ところが，木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて，またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている．その意味で，これらの計算を自分で実行すれば，この計算値には不透明な部分が相当あり，到底，信頼できる計算ではない事が分かるものである．

物理屋として自然をきちんと理解するためには，どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう．そして，その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう．

7.2　非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう．この場合，基本的な方針は変数である φ に摂動係数 η が関係する場合に注意を要すると言う事である．まず，軌道を決める方程式を書いて置こう．これは

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2m\alpha}{\ell^2 r}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\ell^2c^2}\left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2\sqrt{1+\eta}\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}} \end{aligned} \tag{7.12}$$

である．この式は

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)}+\frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r}-\frac{1}{r^2}}} \tag{7.13}$$

と書き換える事が出来る．ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2c^2}\right)^2 \tag{7.14}$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \tag{7.15}$$

と非常に小さな量である事に注意しよう．従って，この η を摂動的に扱う必要がある．すなわち

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi \simeq d\varphi \tag{7.16}$$

と近似して見る事である．この場合，近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり，これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある．

7.2.1　摂動計算の最低次項

まず，摂動計算における最低次項を見て行こう．この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \tag{7.17}$$

となっている．これは確かに閉じた軌道を与えている．そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{7.18}$$

となっている．ここで A_g は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1+\eta) \tag{7.19}$$

である．この場合，離心率 ε も変更を受けているが運動力学には影響していないので，具体的には書いてない．その意味においては，この付加ポテンシャルによる影響とは，軌道半径 A_g が変更されたと言う事に対応している．

この軌道の式 (7.18) から明らかなように，近日点のシフトはない．これは物理的には当然で，非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても，これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である．

7.2.2　摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう．式 (7.18) の解を $r^{(0)}$ すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

である．また摂動項を r' $(r = r^{(0)} + r')$ とすれば r' に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \tag{7.20}$$

となる．この場合，上式の右辺は φ にのみ依存していて r' には依っていない．ここで離心率 ε をゼロとすると右辺はゼロになっている．従って r' は離心率 ε に比例している事がわかる．よって r' は

$$r' \simeq C_0\eta\varepsilon A_g \tag{7.21}$$

と書く事が出来る．ここで C_0 は定数である．地球公転の場合，ε は $(\varepsilon \simeq 0.0167)$ と非常に小さいので，この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである．

7.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため，これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている．この事は歴史的にみても非常に重要である．実際には，これは非常に小さい効果ではあるが，しかし観測に掛かる程度の大きさではある．この影響を定量的に計算して確かめて行こう．

7.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1+2\eta\} \tag{7.22}$$

となる．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \tag{7.23}$$

と書かれている．この式で R は平均軌道半径，ω は角速度で Newton 周期 T と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている．この事より，重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として, 周期のズレ ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{7.24}$$

である [4, 5]．ここで，式 (7.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である．この式より，正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している．

この周期のズレは大雑把に言って $\sim 10^{-8}$ の大きさであり，これは現在，時間に関する測定精度から見ても十分，観測可能な量である．但し，地球の公転周期を直接，この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる．しかしながら幸いにして，次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている．

7.3.2　地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径 R，太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30}\ \ \mathrm{kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \tag{7.25}$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って１年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ \ Motion} = 0.621\ \ \mathrm{s/year} \tag{7.26}$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は１９７２年６月から始まりこれまで４０年間に２５秒補正している．従って１年間での観測値は

$$\Delta T^{Obs}_{Orbital\ \ Motion} \simeq 0.625 \pm 0.013\ \ \mathrm{s/year} \tag{7.27}$$

である．これは式 (7.26) の理論値と完全に一致している．

7.3.3　うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [?]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

[２０２３年４月加筆]

付録　重力ポテンシャル

質量 M の質点が原点にある場合 $\rho(\boldsymbol{r}) = M\delta(\boldsymbol{r})$、そこから距離 r 離れた質量 m の質点に働く重力ポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{28}$$

となっている。これは原点で発散している。しかしながら、全質量 M の物質が球状に一様分布している場合、重力ポテンシャルは上記の形からはかなりずれることになる。実際、質量 M が半径 R の球に一様密度で分布をしている場合を考えると

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GMm}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right), & r < R \\ \\ -\frac{GMm}{r}, & r > R \end{cases} \tag{29}$$

となる。これより、このポテンシャルには原点での発散はなく、原点での重力の強さは表面での値の 1.5 倍程度である事がわかる。

関連図書

[1] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”, (McGraw-Hill Book Company,1964)

[2] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)

[3] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)

[4] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)

[5] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)

[6] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” Annalen der Physik vol. 49, pp. 769−822, März. 1916.