

# 口頭試問の試験問題とその解答

藤田 丈久

(よろず物理研究所)

## 口頭試問の試験問題とその解答

この小ノートでは『時代遅れな宇宙論のCG映像』にすでに載せてある口頭試問の問題を再録している。同時に、その解答に関してある程度、参考になると思われる小ノートを載せている。そして若手研究者や院生諸君がこの問題を解いて見る事により、基礎物理学の重要性を理解する切っ掛けになって欲しいと思っている。

この試験問題を独力で解く事はそれ程、容易な事ではないことは間違いないものである。しかしこの試験問題を解く事ができれば、基礎物理学の習得が如何に重要であるかを納得して頂けるものと考えている。

# 目次

第 1 章	口頭試問の試験問題	5
第 2 章	力学の相対論効果	8
2.1	重力付加ポテンシャル	8
2.1.1	非可積分ポテンシャル	9
2.1.2	軌道の式がデカルト座標に戻せない!	10
2.1.3	軌道の不連続性	10
2.1.4	軌道の不連続性と水星近日点	11
2.2	非可積分ポテンシャルの摂動計算	12
2.2.1	摂動計算の最低次項	13
2.2.2	摂動計算の高次項	13
2.3	新しい重力理論の予言	14
2.3.1	重力付加ポテンシャルによる周期のズレ	14
2.3.2	地球公転周期のズレ(うるう秒)	15
2.3.3	うるう秒の起源	15
第 3 章	水星近日点への惑星効果	16
3.1	水星近日点への惑星の重力効果	16
3.1.1	惑星運動は同一平面	17
3.1.2	水星の運動	17
3.2	惑星効果の近似的評価	18
3.2.1	Legendre 展開	18
3.2.2	逐次近似法	19
3.2.3	特殊解	19
3.3	水星近日点に対する惑星の効果	20
3.3.1	数値計算	20
3.3.2	惑星運動の 1 周期の平均	21
3.4	数値計算の結果	22

3.4.1	100年間の $\delta$ の値	22
3.4.2	観測値との比較	22
<b>第4章</b>	<b>電磁波</b>	<b>23</b>
4.1	Maxwell 方程式	23
4.1.1	変位電流	24
4.2	電磁場のエネルギー	24
4.2.1	電磁場の仕事率	24
4.2.2	電磁場のエネルギー: 例題 $RC$ -回路	25
4.2.3	電磁場のエネルギー: 例題 $LC$ -回路	26
4.3	電磁波: 直感的な記述	27
4.3.1	電磁波とベクトルポテンシャル	27
4.4	電磁波の発振機構: 古典描像	28
4.4.1	電磁場と電子との相互作用	28
4.4.2	電磁波の発振機構	29
4.5	電磁場の量子化	30
4.5.1	場の量子化	30
4.5.2	量子化された電磁場のエネルギー	31
4.6	偏極ベクトルの物理	31
4.6.1	偏極ベクトルの運動方程式	31
4.6.2	偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ の描像	32
4.7	フォトン(電磁波)の性質	33
4.7.1	フォトンの状態関数	34
4.7.2	フォトンの偏光	34
4.7.3	偏極ベクトルの群論的解説	35
4.8	フォトンの弾性散乱	36
4.8.1	Compton 散乱	36
4.8.2	Thomson 散乱	36
4.8.3	Rayleigh 散乱	37
<b>第5章</b>	<b>Maxwell 方程式 と Einstein 方程式</b>	<b>38</b>
5.1	Maxwell 方程式の右辺はカレント $j^\mu$	38
5.2	Einstein 方程式の右辺はエネルギー・運動量テンソル	39
5.2.1	星の分布関数を定める方程式	39
5.2.2	計量テンソルは重力場とは無関係	39

# 第1章 口頭試問の試験問題

## [A] 基礎物理学に関する設問：古典力学

- (1) 質量  $m$  の惑星の運動を記述する Newton 方程式において、重力ポテンシャルに加えて付加ポテンシャルが存在する場合を考察しよう。ここで全ポテンシャルが

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\alpha}{r^2} \quad (1.1)$$

と表せられる場合を考えて見よう。但し、 $M$  は太陽質量である。この時、付加ポテンシャル  $\frac{\alpha}{r^2}$  は非可積分である。

- (i) Newton 方程式の厳密解を求めなさい。
  - (ii) その軌道に不連続性が現われる事を示しなさい。
- (2) 非可積分ポテンシャルは摂動的に解く必要がある。
- (i) 摂動論による解を求めなさい。
  - (ii) その軌道の近日点がどうなっているか説明しなさい。

**[B] 基礎物理学に関する設問：電磁気学**

- (1) Poynting ベクトルの物理的な性質を述べなさい。
- (2) Poynting ベクトルと電磁波 (フォトン) は関係があると思うか？
  - (i) 「ある」と答えた場合、その理由を述べなさい。
  - (ii) 「ない」と答えた場合、その物理的根拠を説明しなさい。
- (3) 電磁場の量子化が何故、必要なのかその物理的な理由を述べなさい。
- (4) Dirac 場の量子化は反交換関係で行う必要がある。  
その物理的な根拠を説明しなさい。
- (5) 自由フォトンの運動方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \text{但し, } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.2)$$

であり、 $F^{\mu\nu}$  は電磁場の強さを表している。この時、ベクトルポテンシャル  $A^\mu$  には4個の自由度があるが、フォトンには2個である。  
何故、自由度が2個減少したのか、その理由を説明しなさい。

## [C] アインシュタイン方程式の右辺に関する設問

- (1) 状態関数が  $\Psi(x)$  の時、粒子のエネルギー・運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  を書きなさい。
- (2) 古典力学の場合、粒子のエネルギー・運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  は定義できていない。その理由を説明しなさい。
- (3) アインシュタイン方程式の場合、古典力学なのに何故、エネルギー・運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  が作られたのか答えなさい。
- (4) 星の形成とその分布関数の決定に関する設問
  - (i) これらはどのような相互作用によって決められているのか説明しなさい。
  - (ii) またそれらの相互作用の特徴を説明しなさい。
  - (iii) 星の形成ではどの相互作用がどのような役割を果たしているのか説明しなさい。
  - (iv) 星の分布を決めるのはどの相互作用がどのように影響するのか説明しなさい。
- (5) ブラックホール (黒い穴) は星としては定義されていない。何故、人々はそれを星だと思い込んだのか説明しなさい。

## 第2章 力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか？Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして，座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである．その意味では力学は相対論からの近似式でもあり，その過程で相対論の効果のある程度は内包している．この場合，日常世界における相対論的な効果を観測するためには，物体の速度が一定以上早い事が基本条件である．

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか？これは良く知られているように，地球公転の速度である．この速度  $v$  は約  $v \simeq 10^{-4}c$  である．従って，この公転が相対論的な効果として現われる物理量は  $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$  である．よって，地球公転周期を精密に測定すれば，その周期（1年）が約  $\pi \times 10^7$  秒である事から，これまでの Newton 力学における周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる．

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう．しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく，どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである．

### 2.1 重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため，この場合，非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている [2]．従って，地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (2.1)$$

と求まっている．右辺の第2項が新しい重力ポテンシャルの補正項である．これは Zeeman 効果の導出と良く似ている．電磁場の場合，クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため，非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない．しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を含めた様々

な項が現われている．一方，重力はスカラー項として入っているので，非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである．

### 2.1.1 非可積分ポテンシャル

式 (2.1) の第 2 項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている．かつて，カオスの理論が流行していた時があったが，その頃，この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった．この場合，非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた．従って，この取り扱いには十分な注意が必要である．

非可積分ポテンシャル  $V_c(r) = \frac{C}{r^2}$  がある場合，厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう．ここではこの問題を詳しく見て行こう．まず式 (2.1) で与えられるポテンシャル問題を解くと，その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell} \varphi\right)} \quad (2.2)$$

となっている．この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり，何か特別な事を考える必要があると言うわけではない．但し，定数の修正はあり，ここでは  $A_g$  と  $L_g$  がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \quad (2.3)$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2}} \equiv \ell \sqrt{1 + \eta} \simeq \ell \left(1 + \frac{1}{2} \eta\right) \quad (2.4)$$

と定義されている．但し， $\eta$  は

$$\eta \equiv \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (2.5)$$

である．

### 2.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない!

軌道を与える式 (2.2) には明らかに問題がある。まず、一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right) \quad (2.6)$$

を見てみよう。この場合、この式はデカルト座標

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (2.7)$$

で表す事が出来ない。実際、 $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$  項は

$$\cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi\right) = \frac{x}{r} \cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r} \sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \quad (2.8)$$

としてみると分かるように、デカルト座標では表現不能である。元々はデカルト座標から出発しているのです、これは深刻な問題である。

### 2.1.3 軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある。軌道の解である式 (2.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である。これは軌道  $r$  が  $\varphi = 0$  と  $\varphi = 2\pi$  でどうなっているのかを見れば良くわかるものである。すなわち、

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon}, \quad \varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \pi\eta}, \quad \varphi = 2\pi \quad (2.10)$$

となっているため、同じ点で軌道に飛びがある。この差を  $\Delta r$  とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2}A_g\pi^2\eta^2\varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm} \quad (2.11)$$

となっている。但しこれは水星の場合である。これは勿論、自然界では起こってはならない現象である。

#### 2.1.4 軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが、一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである。しかも、観測値と理論値が3桁近くも一致していたと言う主張であった。これは、一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が、実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう。

さらに言えば、水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には100年間の水星近日点シフト値として求められたものである。この場合、水星近日点シフトの観測値から、木星などの影響を考慮した計算値を差っ引く必要があったのである。ところが、木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて、またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている。その意味で、これらの計算を自分で実行すれば、この計算値には不透明な部分が相当あり、到底、信頼できる計算ではない事が分かるものである。

物理屋として自然をきちんと理解するためには、どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう。そして、その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう。

## 2.2 非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう。この場合、基本的な方針は変数である  $\varphi$  に摂動係数  $\eta$  が関係する場合に注意を要すると言う事である。まず、軌道を決める方程式を書いて置こう。これは

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2} \\ &= r^2 \sqrt{1 + \eta} \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

である。この式は

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}} \quad (2.13)$$

と書き換える事が出来る。ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2 c^2}\right)^2 \quad (2.14)$$

は

$$\eta \sim 10^{-8} \quad (2.15)$$

と非常に小さな量である事に注意しよう。従って、この  $\eta$  を摂動的に扱う必要がある。すなわち

$$\sqrt{1 + \eta} d\varphi \simeq d\varphi \quad (2.16)$$

と近似して見る事である。この場合、近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり、これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある。

## 2.2.1 摂動計算の最低次項

まず，摂動計算における最低次項を見て行こう．この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}} \quad (2.17)$$

となっている．これは確かに閉じた軌道を与えている．そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (2.18)$$

となっている．ここで  $A_g$  は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2}(1 + \eta) \quad (2.19)$$

である．この場合，離心率  $\varepsilon$  も変更を受けているが運動力学には影響していないので，具体的には書いてない．その意味においては，この付加ポテンシャルによる影響とは，軌道半径  $A_g$  が変更されたと言う事に対応している．

この軌道の式 (2.18) から明らかなように，近日点のシフトはない．これは物理的には当然で，非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても，これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である．

## 2.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう．式 (2.18) の解を  $r^{(0)}$  すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

である．また摂動項を  $r'$  ( $r = r^{(0)} + r'$ ) とすれば  $r'$  に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}} \quad (2.20)$$

となる．この場合，上式の右辺は  $\varphi$  にのみ依存していて  $r'$  には依っていない．ここで離心率  $\varepsilon$  をゼロとすると右辺はゼロになっている．従って  $r'$  は離心率  $\varepsilon$  に比例している事がわかる．よって  $r'$  は

$$r' \simeq C_0 \eta \varepsilon A_g \quad (2.21)$$

と書く事が出来る．ここで  $C_0$  は定数である．地球公転の場合， $\varepsilon$  は ( $\varepsilon \simeq 0.0167$ ) と非常に小さいので，この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである．

## 2.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため、これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている [2]。この事は歴史的にみても非常に重要である。実際には、これは非常に小さい効果ではあるが、しかし観測に掛かる程度の大きさではある。この影響を定量的に計算して確かめて行こう。

### 2.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期  $T$  は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \quad (2.22)$$

となる。ここで  $\eta$  は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (2.23)$$

と書かれている。この式で  $R$  は平均軌道半径、 $\omega$  は角速度で Newton 周期  $T$  と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている。この事より、重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として、周期のズレ  $\Delta T$  は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (2.24)$$

である [2, 3]。ここで、式 (2.24) の分母にでている  $T$  は Newton 周期と近似して十分である。この式より、正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している。

この周期のズレは大雑把に言って  $\sim 10^{-8}$  の大きさであり、これは現在、時間に関する測定精度から見ても十分、観測可能な量である。但し、地球の公転周期を直接、この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる。しかしながら幸いにして、次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている。

### 2.3.2 地球公転周期のズレ（うるう秒）

地球公転の場合，軌道半径  $R$ ，太陽の質量  $M$  それと角速度  $\omega$  はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (2.25)$$

である．ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である．従って1年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion} = 0.621 \text{ s/year} \quad (2.26)$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は1972年6月から始まりこれまで40年間に25秒補正している．従って1年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (2.27)$$

である．これは式(2.26)の理論値と完全に一致している．

### 2.3.3 うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少はずれているという事からきている [4]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

## 第3章 水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている．ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により，どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう．そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう．但し，Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが，彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多すぎるものである．このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ，残念ながら実行できてはいない．

しかしながら，この場合においては，水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている．観測値と言っても，その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており，この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである．現在においては，一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため，一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている．このため，水星近日点シフトの観測値を理論値と比較するという場合，この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている．

### 3.1 水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\mathbf{r}}_w^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|} \quad (3.1)$$

から計算を始める事になる．ここで  $(m, \mathbf{r})$  と  $(m_w, \mathbf{r}_w)$  は水星と惑星の質量とその座標を表している．式 (3.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している．今の場合，この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる．

## 3.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう．これは実際の観測と比べても十分，良い近似であると言えよう．従って，上記の Lagrangian を 2次元極座標で書いておくと

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r}_w^2 + r_w^2\dot{\varphi}_w^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w)}} \quad (3.2)$$

となっている．従って，水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} - \frac{Gmm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_w \sin(\varphi - \varphi_w)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

$$m_w r_w \ddot{r}_w = m_w r_w \dot{\varphi}_w^2 - \frac{Gm_wM}{r_w^2} - \frac{Gmm_w(r_w - r \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt}(m_w r_w^2 \dot{\varphi}_w) = -\frac{Gm_wMrr_w \sin(\varphi_w - \varphi)}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

である．

## 3.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合，これは単純な Kepler 問題である．この場合，運動方程式は

$$m\ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (3.8)$$

となっている．そしてこの解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.9)$$

とである．ここで  $A$  と  $\varepsilon$  は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad \text{但し } (\alpha = GMm) \quad (3.10)$$

である．これが非摂動の運動となっている．

## 3.2 惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう．この場合，水星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11)$$

である．ここで右辺の最後の項において  $r, r_w$  を平均半径  $R, R_w$  で置き換えると言う近似を行う．従って，方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(R - R_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}} \quad (3.12)$$

となる．以下では式 (3.12) の近似解を求めて行こう．

### 3.2.1 Legendre 展開

ここで最後の項 (3.12) を  $F$  として

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{但し, } x = \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (3.13)$$

と定義しよう．そしてこれを

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} x + \dots \quad (3.14)$$

と Legendre 展開しよう．従って，運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(\varphi - \varphi_w) \quad (3.15)$$

となる．ここで定数項は影響しないので無視している．

### 3.2.2 逐次近似法

この方程式 (3.15) を逐次近似法によって解いて行こう。まず、この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \quad (3.16)$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \quad (3.17)$$

を代入しよう。この場合、式 (3.15) は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (3.18)$$

となる。ここで  $b, \beta$  は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \quad (3.19)$$

となっている。

### 3.2.3 特殊解

方程式 (3.18) を解くために、まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう。従って、 $r$  は次のような解を持つと仮定しよう。

$$r = r^{(0)} + K \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t) \quad (3.20)$$

ここで  $r^{(0)}$  は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.21)$$

である。この場合、式 (3.20) を式 (3.18) に代入しよう。この時、 $K$  は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \quad (3.22)$$

とすぐに求める事が出来る。よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \quad (3.23)$$

となる。

### 3.3 水星近日点に対する惑星の効果

ここで Kepler 問題の解  $r^{(0)}$  を代入すると軌道の解は

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t) \\ &\simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{R(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} (\omega - \omega_w)^2} \cos(b + \beta t)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

となっている．ここで  $A \simeq R$  であり，また  $\beta = \omega - \omega_w$  である．また  $\varepsilon_w$  を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2 (\omega - \omega_w)^2} \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.25)$$

と定義しよう．ここで  $b + \beta t = \varphi - \varphi_w$  を使うと軌道  $r$  は

$$r \simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)} \quad (3.26)$$

となる．これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる．

#### 3.3.1 数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度，影響するのかという問題を具体的な数値を入れて評価して見よう．まず  $\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)$  項を

$$\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\varphi + \delta) \quad (3.27)$$

と書き換えよう．ここで  $c_1$  と  $c_2$  は

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w \quad (3.28)$$

$$c_2 = \varepsilon_w \sin \varphi_w \quad (3.29)$$

であり， $\cos \delta$  は

$$\cos \delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad (3.30)$$

と定義されている．ここで  $\varepsilon_w$  は  $\varepsilon$  よりもはるかに小さいので式 (3.30) は

$$\cos \delta = \frac{\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w)^2 + (\varepsilon_w \sin \varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varphi_w \quad (3.31)$$

と書く事が出来る．

## 3.3.2 惑星運動の1周期の平均

ここで惑星運動の1周期における平均操作を行おう．この場合，

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_w d\varphi_w = \frac{1}{2} \quad (3.32)$$

となり，従って1周期における平均操作を行うと  $\delta$  は

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \frac{GM}{R_w^2} \frac{1}{R(\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &\simeq \frac{R_w \omega_w^2}{\sqrt{2}\varepsilon R (\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる．但し，惑星の軌道は円であると近似している．

### 3.4 数値計算の結果

まず  $\delta$  の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう。但し，表1 においては全て地球を単位として計っている。

表1 惑星の性質

惑星	水星	金星	火星	木星	土星	地球	太陽
軌道半径	0.387	0.723	1.524	5.203	9.55	1.0	
質量	0.055	0.815	0.107	317.8	95.2	1.0	332946.0
周期	0.241	0.615	1.881	11.86	29.5	1.0	
$\omega$	4.15	1.626	0.532	0.0843	0.0339	1.0	

#### 3.4.1 100年間の $\delta$ の値

表2 では100年間における近日点シフト値の  $\delta$  を表にしている。そしてこの計算結果を Newcomb の計算と比較している。

表2 100年間の  $\delta$  値

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
$\delta$ [式(3.33)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
$\delta$ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

その結果， $\delta$  についての我々の計算値は111.1 であるのに対して，Newcomb の計算値は109.3 であり，両者は予想以上に良く一致している。

#### 3.4.2 観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は19世紀のものであるが，これはその前の100年間に渡る水星近日点シフトに対応している。この観測値がどの程度，信用できるのかと云う問題にここで答える事は出来ない。これは今後の課題である。

## 第4章 電磁波

電磁波を物理ではフォトン(光子)と言う。フォトンはスピンの1であり、その質量はゼロである粒子と考えてよい。このフォトンはMaxwell方程式から自動的に理解されるというものではない。フォトンは場の量子化をした時に初めて理解できるものである。フォトンの取り扱いが一般に難しいのはこの場の量子化が一つの原因でもある。

### 4.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を再びここに書いておこう。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(Gauss の法則)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(磁荷がない)} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(Faraday の法則)} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} && \text{(Ampère-Maxwell の法則)}\end{aligned}$$

Ampère の法則の修正をしたのが Maxwell であるが、この修正についてここで議論して行きたい。恐らくは理論物理の立場からすると、この修正はこれまでの理論物理の発展における最大の功績の一つであろう。ここでは何故その修正が必要であったかについて議論したい。Ampère の法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  において、この式全体に  $\nabla$  を掛けると  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  となる。しかしこれは連続方程式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  と矛盾している。連続方程式は物質の流れの保存則を表しているのが壊れていたら電荷の保存が成り立たない。それは絶対に困るという事で書き換えたものが Ampère-Maxwell 方程式である。実際、Ampère-Maxwell の方程式に  $\nabla$  を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となり、 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  を考慮すれば確かに上式は成り立っている事がわかる。

### 4.1.1 変位電流

ここで変位電流  $j_d$  (displacement current) を定義しておこう．これは Ampère-Maxwell の法則の最後の項の事であり  $j_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  と定義されている．電場が時間変化するとそこに電流が流れた事に対応している現象でありそこには磁場が生成される．しかしその場所で電子が電流のように動いているわけではない．電場を形成している荷電粒子が時間変化している事で電場の時間変動が生まれている．

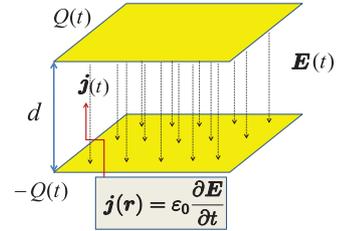


図 4.1: 変位電流

## 4.2 電磁場のエネルギー

ここで電磁場全体のエネルギーについて計算しておこう．但しここで言う電磁場とは古典電磁場の意味であり，フォトンのエネルギーはまだ含まれていない．この場合，仕事率で計算して行く．

### 4.2.1 電磁場の仕事率

Newton 力学において  $\frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m \dot{r}^2) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  が得られるが，これは単位時間あたりのエネルギーの増加率を表している．従って仕事率  $W_0$  を  $W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  で定義して，電磁場における力を代入すると

$W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}$  となる．ここで  $N$  個の電荷が分布関数  $\rho$  で分布している時，仕事率  $W_0$  は

$$W_0 = \int \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (4.1)$$

となる．この式を Ampère-Maxwell 方程式を用いて書き直すと

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0} \int \left( \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) d^3r$$

となる．ここで Faraday の法則を用いて式変形をして，さらに Poynting ベクトルを

$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  と定義すると仕事率  $W_0$  は

$$W_0 = - \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int \left( \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) d^3r \right] + \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r \right\} \quad (4.2)$$

と書ける．ここで第 1, 2 項は通常電場と磁場の単位時間あたりのエネルギー変化率である．第 3 項が電磁場のエネルギーの流れに対応している

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r = \int_S S_n dS \quad (4.3)$$

と書いてみればわかるように表面  $S$  からエネルギーがコンデンサーの中に流れ込み、このコンデンサー内に場のエネルギーが蓄積される事になる．但し、この場のエネルギーは電磁波 (フォトン) とは無関係である事に注意しよう．

### 4.2.2 電磁場のエネルギー：例題 $RC$ -回路

表面から流れ込む電磁場のエネルギーの現象を理解するために、 $RC$ -回路を考えよう．容量  $C$  のコンデンサーと抵抗  $R$  を直列につないでそれに電位差  $V$  を与えたしよう．コンデンサーは半径  $a$  の円板が距離  $d$  で平行に並べてあるものと仮定しよう．この時コンデンサーの電場  $E$  とその容量  $C$  は  $E = \frac{V}{d}$ ,  $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$  となる．ここで回路にながれる電流を  $J$  とすると

回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \left( \text{但し } J = \frac{dQ}{dt} \right)$$

となる．ここで初期条件として  $t = 0$  で  $Q = 0$  とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad \text{と求められる.}$$

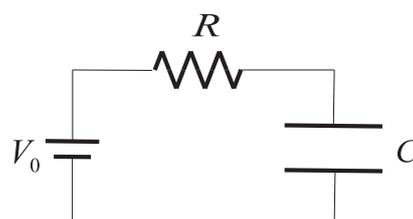


図 4.2:  $RC$  回路

これより電流  $J$  は  $J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$  となる．ここでコンデンサーの電場の方向を  $z$ -方向として

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{VC}{\epsilon_0 \pi a^2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \mathbf{e}_z \quad (4.4)$$

である．この電場は時間によっているので変位電流が生じる．それは

$\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V}{R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_z$  となっている．変位電流がながれるとそれに伴って磁場ができる．Ampère-Maxwell の法則より、円筒座標を考えてその半径  $r$  の面積で積分すると  $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 j_d \pi r^2$  より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_d r}{2} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 r V}{2 \pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

となっている．これより円筒表面 ( $r = a$ ) での Poynting ベクトル  $S$  は

$$S = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 r V}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

となる．よって  $S = -\frac{V^2}{2\pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_r$  と求められる．動径方向の内向きにエネルギーが流れ、貯まって行く事になる．このエネルギーの流れを全時間で積分すると  $\int_0^\infty S_n dt = \frac{CV^2}{4\pi ad}$  となる．Poynting ベクトルのエネルギーは表面積を掛ける必要があるのでこれより全エネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi ad} 2\pi ad = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.5)$$

となり、これはコンデンサーに貯まったエネルギーと一致している．

#### 4.2.3 電磁場のエネルギー：例題 LC-回路

次に LC-回路を考えよう．容量  $C$  のコンデンサーとコイル  $L$  を直列につないでそれに電位差  $V$  を与えたとして．コンデンサーは半径  $a$  の円板が距離  $d$  で平行に並べてあるものと仮定しよう．ここで回路にながれる電流を  $J$  とすると回路の方程式は

$$V = L \frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \quad \text{となる.}$$

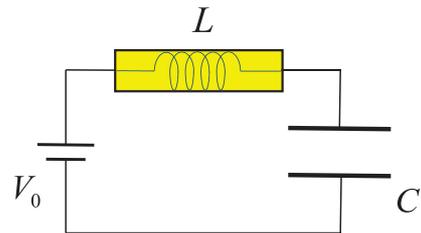


図 4.3: LC 回路

ここで初期条件として  $t = 0$  で  $Q = 0$ ,  $J = 0$  とすればこの微分方程式の解は直ちに書いて  $Q = CV(1 - \cos \omega t)$  ( $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ) と求められる．これより電流  $J$  は  $J = \frac{dQ}{dt} = VC\omega \sin \omega t$  となる．コンデンサーの電場は  $\mathbf{E} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z$  となるので変位電流は  $\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_z$  となる．よって、この時に作られる磁場は  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r \omega VC}{2\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta$  となっている．これより円筒表面  $r = a$  での Poynting ベクトル  $S$  を求めると

$$S = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 \omega VC}{2\pi a} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta$$

より  $S = -\frac{\omega CV^2}{2\pi ad} (1 - \cos \omega t) \sin \omega t \mathbf{e}_r$  となる．これは一周期で積分すればゼロである．すなわちエネルギーの流れはなく、保存系である事を示している．

### 4.3 電磁波：直感的な記述

電磁波について，まずは導入として直感的な解説をしよう．その後に電磁場の量子化をする事により電磁波をきちんと解説し，理解を深めて行こう．Maxwell 方程式で物質が存在しない場合，すなわち  $\rho = 0$  と  $j = 0$  の時，この電磁場には物理的に意味のある解が存在している．物質が存在しない場合の Ampère-Maxwell の法則は

$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  である．この式をベクトルポテンシャルで書き直すと

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (4.6)$$

となる．ここで Gauss の法則から  $\nabla^2 \phi = 0$  である事から，今の場合  $\phi = 0$  として十分である．これとゲージ固定条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  より，式 (4.6) は

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (4.7)$$

と求められる．これは電磁場が自由粒子の方程式を満たしている事を示している．この一般解が

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \left( c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}x} \right) \quad (4.8)$$

与えられることがすぐに確かめられる．ここで  $\mathbf{k}x \equiv \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  と定義されている．これを式 (4.7) に代入すると  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$  の関係式が求まる．これは光の分散関係式を表している．ここで  $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$  を偏極ベクトルと呼んでいる．これはゲージ固定条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  より  $\mathbf{k} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} = 0$  を満たしている．すなわちフォトンの偏極はその進行方向と常に垂直である．

#### 4.3.1 電磁波とベクトルポテンシャル

ここで一つ注意しておく事がある．電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが，式 (4.8) そのものが電磁波に対応するわけではない．それは，この  $\mathbf{A}$  は実数関数となっており，運動量オペレータ  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$  の固有関数になっていないのである．それでは電磁波とはどのようなものであろうか？その答えは，場を量子化して初めて理解できる事である．後で議論するように，場の量子化は式 (4.8) において  $c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k}, \lambda}$  をオペレータと考える事である．この時， $c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$  はフォトン 1 個を生成する

演算子であるため，フォトンが作られる時は必ず式 (4.8) の第 1 項のみが現われる事になっている．すなわち

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | A(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} \quad (4.9)$$

である．これは運動量  $k$  の固有関数になっているので，確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるものである．

## 4.4 電磁波の発振機構：古典描像

これまで見たように  $LC$ -回路自体は保存系であり，電磁波の放出としての外へのエネルギーの流れはない．それでは電磁波が生成される機構はどうなっているのかわかるか？ここでは電磁波の発振機構を解説しよう．

### 4.4.1 電磁場と電子との相互作用

電磁波の生成には場の理論の基本から出発せざるを得ない．まず，電磁場（ベクトルポテンシャル  $A$ ）と電子との相互作用は電荷  $e$  をカレント密度  $j$  の中に入れた標識を取ると

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (4.10)$$

であり，ここから全てを考える事になる．この時この相互作用の時間変化を考える必要がある．すなわち，

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = - \int \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3r \quad (4.11)$$

となる．ここでスカラーポテンシャル  $\phi$  がない時を考えて十分なので電場は  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  と書けている．よって  $W$  は

$$W = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (4.12)$$

となる．ここで式 (4.1) から式 (4.12) の右辺第 2 項は  $W_0$  そのものであり，すでに計算されている．従って，式 (4.12) の右辺第 1 項を  $W_1$  として

$$W_1 \equiv - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad \text{を評価する必要がある．}$$

## 4.4.2 電磁波の発振機構

まずは  $\left[ \frac{\partial j}{\partial t} \right]$  の計算である．簡単のために非相対論的な量子力学を用いるが，実際の記述としても十分良い近似である．相互作用は Zeeman 効果の Hamiltonian なので

$$H = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (4.13)$$

を仮定して十分である．ここで電子の質量を  $m_e$  としている．また外場  $B_0$  は座標  $r$  の関数であるとしている．ここで外場  $B_0$  を  $z$ -軸方向にとっても一般性を失わないので  $B_0 = B_0(r)e_z$  としよう．この時，非相対論の量子力学ではカレント  $j$  が

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{m_e} \psi^\dagger(t, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \psi(t, \mathbf{r}) \quad (4.14)$$

で与えられている．但し， $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  である．これより

$$\frac{\partial \mathbf{j}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left[ \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{\mathbf{p}} \psi + \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{e^2}{2m_e^2} \nabla B_0(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

と計算される．従って電磁波を含む単位時間のエネルギー変化率は

$$W_1 = \int \frac{e^2}{2m_e^2} (\nabla B_0(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (4.16)$$

と求められた．電磁波はこの式の最後にある  $\mathbf{A}$  から発生する．

- 2個のベクトル場：ここで注意する事として，ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  と外場  $B_0$  の違いである．今の場合， $\mathbf{A}$  は電子から作られた電磁場を表している．一方，外場  $B_0$  は電子とは直接は関係のない場であり，他の粒子によって作られた外場としての電磁場である．これを見ても明らかなように，発振回路などにおける電磁波の生成は電子だけの孤立系で起こる現象ではなく，それ以外の場が存在しない限り起こらない．すなわち外場  $B_0$  は  $B_0 \neq \nabla \times \mathbf{A}$  であり，このベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  とは全く結びつかないものである．発振回路においては，この磁場  $B_0$  はコンデンサーかまたはコイルが作る磁場によるものと考えて良い．また加速器において電子が電磁波を放出する機構においては， $B_0$  は電子をその軌道に閉じ込めているために掛けられている磁場そのものである．

## 4.5 電磁場の量子化

電磁場の量子化について，これまでの場の理論の教科書に混乱した記述がよく見受けられるので，ここできちんとした解説をしておこう．場の量子化は学部生には少し難しすぎる問題ではあろうが，これにより，フォトンの偏極ベクトルの理解が深まるものと期待している．

### 4.5.1 場の量子化

電磁場の量子化は実験から始まっている．最も単純なところでは，水素原子における  $2p_{\frac{1}{2}}$  から  $1s_{\frac{1}{2}}$  状態への遷移の際に放出される光の問題がある． $2p_{\frac{1}{2}}$  の状態では電磁場の状態は真空であったのに， $1s_{\frac{1}{2}}$  状態では1個フォトンが生成されている．これは通常の電磁場の理論では理解できない事である．そこで考案されたのが「場の量子化」である．何故，量子化と呼ばれるのであろうか？それは場をオペレータで書くからである．電磁場の量子化を式で書くと

$$A(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \left[ c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx} \right] \quad (4.17)$$

と自由場の解で展開して，その展開係数  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  と  $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$  を演算子と仮定する．量子化とはこの  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  と  $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$  に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (4.18)$$

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad [c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = 0 \quad (4.19)$$

の交換関係式を仮定する事である．この時，展開係数  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  (消滅演算子) と  $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$  (生成演算子) はもはや単なる数ではなくて，演算子になっている．このため，このオペレータが作用する物理的な空間を定義する必要があり，それを **Fock 空間** と呼んでいる．式で書くと，

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad (4.20)$$

$$c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}|0\rangle = |\mathbf{k},\lambda\rangle \quad (4.21)$$

となる．最初の式で  $|0\rangle$  を真空と定義し，この真空  $|0\rangle$  に  $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$  をオペレートして運動量  $\mathbf{k}$ ，偏極  $\lambda$  をもつフォトンの状態  $|\mathbf{k},\lambda\rangle$  が生成されている．

### 4.5.2 量子化された電磁場のエネルギー

量子化された電磁場のエネルギー  $E_{em}$  は

$$E_{em} = \frac{1}{2} \int \left[ (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right] d^3r \quad (4.22)$$

で与えられる．この式に式 (4.17) を代入すると

$$E_{em} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left( c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger c_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.23)$$

となる．これがフォトンのエネルギーを表している．

## 4.6 偏極ベクトルの物理

これまでこの偏極ベクトル  $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu$  に対して重大な見誤りがあった．それは，運動方程式を解く事なしに議論を進めた事によって．まずはゲージを固定する前に電磁場  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  が運動方程式を満たしている事が絶対条件である．

### 4.6.1 偏極ベクトルの運動方程式

電流がない時の自由電磁場  $A^\mu$  に対する Lagrange 方程式は  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  (但し， $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ) であるから (付録 E 参照)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.24)$$

と求められる．自由フォトンの解の形が

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \left[ c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (4.25)$$

で与えられるので，この式を (4.24) 式に代入すると

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \quad (4.26)$$

が求められる．これを行列で書き直すと  $\sum_{\nu=0}^3 \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0$  となる．この式でゼロでない偏極ベクトル  $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu$  の解が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロである．すなわち，

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (4.27)$$

である．この方程式の解を探してみると  $k^2 = 0$  (すなわち  $k_0 \equiv E_k = |\mathbf{k}|$ ) が解である事が簡単に証明できる．この  $k^2 = 0$  の式を (4.26) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (4.28)$$

の式が得られる．これは QED でよく知られている Lorentz ゲージ固定に対応した式である．しかしこの式は運動方程式から得られておりゲージ固定とは無関係である．従って Lorentz ゲージ固定は物理的に許されなくそれ以外のゲージ固定が必要である．例えば，Coulomb ゲージ固定を選ぶと  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$  となるので，これから  $\epsilon_0 = 0$  となっている．さらには，フォトンの偏極ベクトル  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$  の自由度は確かに 2 個である事が自然な形で理解されている．

● Dirac 方程式の自由粒子解： この偏極ベクトルに対する計算手法は自由粒子に対する Dirac 方程式を解く時に行ったものと全く同じである．Dirac 方程式 [??] の場合も同じように行列表がゼロ

$$\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0 \quad (4.29)$$

という条件によりエネルギーの分散関係

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (4.30)$$

が求まり，それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数 (??) 式が決定された．この詳細は式 (??) で与えられている．しかしどういうわけかこれまで，この電磁場  $A^\mu$  における偏極ベクトル  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$  に対する方程式は解かれる事がなかったのである．これは恐らく，これまでゲージ不変性の理解が不十分であった事に依っているものと考えられる．

● フォトンと電子スピンの自由度： Dirac 方程式の場合，4 個の自由度のうち正負の状態の形状は決まるがスピンの自由度 (アップとダウン) は決まらない．このため  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$  の自由度は 2 個である．電磁場の場合，自由度は 4 個であるが，運動方程式を解いて分散関係式を代入する事により 1 個の条件 (Lorentz 条件) が決まり 3 個となる．さらに残り 3 個のうちゲージ固定により 1 個自由度が減った事になる．このためフォトンはスピンの自由度が 1 であるにもかかわらず  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$  の自由度は 2 個である．

#### 4.6.2 偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ の描像

フォトンの偏極ベクトル  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$  には

$$\epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \epsilon_{\mathbf{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (4.31)$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している．従って，フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直交する平面でそれぞれが直交するような2個のベクトルで成り立っている事が分かる．但し，この描像には少し無理があることも理解する必要がある．それは，フォトンには静止系が存在していないので，上述した平面は仮想的であり，フォトンの静止系があったとした時の想像のピクチャーである．但しフォトンが電子と相互作用して電子に吸収される場合は，ある程度偏極ベクトルの描像を作る事が出来る．この時は電子の静止系が定義されているので，吸収された瞬間のフォトンの偏極ベクトルはフォトンの進行方向と直交する方向になっている．その事は必ず電子のスピン磁気量子数に反映されている．

後で議論するように，フォトンの偏極を扱う時は大量のフォトン集団を考えている．逆に言えば1個のフォトンを考える事はほとんどなく，従ってこのフォトン集団の偏極はその方向が余程うまく決めない限り，様々な偏極の状態がランダムに混じったものになっている．さらにフォンは慣性系を指定できないので偏極の方向を決める事はかなり難しいと考えた方がよい．

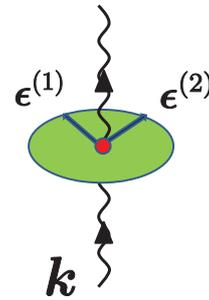


図 4.4: 偏極ベクトル

## 4.7 フォトン (電磁波) の性質

多くの電磁気学の教科書において，フォトンが電場  $E(r, t)$  と磁場  $B(r, t)$  と関係している様な記述が見受けられる．しかしこれまでの議論で明らかなように，これは間違いである．ベクトルポテンシャル  $A(r, t)$  をゲージ固定した後，それを量子化したものがフォトンであり，これはもはや電場や磁場と関係をつける事が出来ない．それ以上に関係をつける必要はさらになく，相互作用 Hamiltonian は

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

であり，これがフォトンの生成・消滅を記述している．

### 4.7.1 フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数として理解されるが，フォトン(光子)の状態は複素数である．これは電磁波の状態が

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} e^{-i\mathbf{k}x} \quad (4.32)$$

と表されている事から理解される．ここで偏極ベクトル  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}$  は式 (4.31) の条件を満たしている．フォトンの進む方向を  $z$ -軸とした時，例えば

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 1} = \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 2} = \mathbf{e}_y \quad (4.33)$$

と取る事ができる．この場合，電子のスピン(スピン)の量子化軸として静磁場を  $x$ -軸方向に掛けた時，偏極ベクトルの  $x$ -軸への射影は 1 と 0 となっている．勿論， $x$ -軸を逆にとれば，その射影は  $-1$  と 0 となる．これを偏極ベクトルの磁気量子数と呼んで良いかどうかは議論の余地があろう．それは上述したように，フォトンには静止系が定義できないからである．

### 4.7.2 フォトンの偏光

フォトン(光子)のスピンは 1 であるが，その成分は 2 個である事を見てきた．この 2 つの状態は偏極ベクトルとして記述されるが，生成されたフォトン(光子)は基本的にはこの 2 つの状態が混ざっている．しかし，注意すべき事は 1 個のフォトン(光子)をとれば，これは勿論そのどちらか(どちらか)の状態になっている．100 個のフォトン(光子)が生成されたら，50 個のフォトン(光子)が一つの偏極状態を持ち，あとの 50 個のフォトン(光子)がもう一つの偏極状態を持っている．

● 偏光板： 偏光板にフォトン(光子)を通す事により，この偏極状態を分離する事ができる．この場合，生成されたフォトン(光子)がどのような偏極状態を持つかは，偏光板の結晶構造やその電子状態に依存している．式 (4.33) で与えられる場合もあれば

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

となる場合もある．しかしフォトン(光子)が偏光板でどのような散乱(散乱)を起こすのかは，理論的にはかなり難しい問題でもある．散乱は Compton 散乱でありこの多重散乱をしっかりと計算すればよく，その意味では勿論，計算は可能ではある．

- 原子状態の遷移： もう一つ，フォトンの偏光が決まる場合がある．それは例えば原子状態の遷移によってフォトンが生成される場合，その原子中の電子のスピン状態が偏極している場合である．この場合は常に偏光したフォトンが観測される事になる．原子系のスピンを偏極させる事はそれ程難しくはなく，従って特殊に偏光したフォトンを作る事もそれ程難しい事ではない．

### 4.7.3 偏極ベクトルの群論的解説

角運動量もスピンも群論の言葉で理解する事が最も自然でわかりやすいものである．角運動量演算子はリー代数の関係式を満たし，これを Exp 化する事により回転群ができています．そして回転群の知識によりその表現論は完全に記述されている．それでは偏極ベクトルは一体，何なのであろうか？

- ランク 1 のテンサー： フォトンのスピンの 1 である事に関しては，群論的な言葉で言えば，偏極ベクトルがランク 1 のテンサーである事から明らかである．しかし，この偏極ベクトルは角運動量とは異なっている．特に，偏極ベクトルは座標には依っていない．この点では，偏極ベクトルがむしろ電子のスピンの方により近いと言う事もできる．
- 偏極ベクトルはスピンか？： しかし，スピンとも異なっている．電子のスピンは角運動量と同じ代数関係を満たしているのに対して，フォトンの偏極ベクトルにはそのような代数関係は存在していない．さらに言えば，ベクトルポテンシャルを量子化した時にオペレータの中に現れてはいるが，しかし偏極ベクトルはオペレータの性質を持っていない．状態ベクトルと考えた方が良い．その振る舞いは球面調和関数  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  のようなものであるが，しかし偏極ベクトルは座標には依っていない．これらの事より，フォトンのスピン (偏極ベクトル) はそのスピンの大きさが 1 である事は確かであるが，電子の角運動量ともスピン演算子とも微妙に異なっている．この事がフォトンのスピン (偏極ベクトル) を理解する事が簡単ではない事の一つの理由でもあろう．

## 4.8 フォトンの弾性散乱

フォトンのは場の量子化の結果であるため物質との相互作用では常に生成・吸収の過程がまず最初に起こっている．しかし次の次数の摂動計算では同じ電子と吸収・生成を一度に行う過程が起こっている．これはフォトンと電子の散乱過程としてみると弾性散乱に対応していて Compton 散乱と呼ばれている．

### 4.8.1 Compton 散乱

Compton 散乱のは場の理論の教科書にはよく議論されているのでここでは結果だけを書こう．運動量  $k$  のフォトンが散乱されて  $k'$  になる散乱を考える．

- Compton 散乱の断面積： 微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C = \frac{r_0^2}{2} \frac{k'^2}{k^2} \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - \sin^2 \theta\right) \quad (4.34)$$

である．ここで  $r_0 = \frac{e^2}{m_e}$  は古典電子半径で  $r_0 = 2.82 \times 10^{-13}$  cm である．またフォトンの偏極については平均を取ったものである．

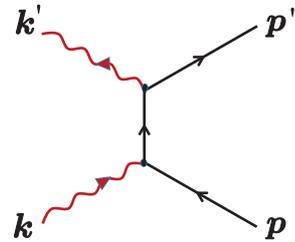


図 4.5: Compton 散乱

### 4.8.2 Thomson 散乱

散乱する粒子が電子ではなく非常に重い粒子だと仮定すると  $k' \simeq k$  として十分である．この場合 Compton 散乱の微分断面積が

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Thom} \simeq \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.35)$$

となり，これは Thomson 散乱の断面積として知られているものと一致している．Thomson 散乱の断面積は古典電磁場を用いて計算されたものであるが，量子化されたフォトンによる計算結果と非相対論の範囲ではよく一致している．この散乱断面積やクーロン散乱である Rutherford 散乱断面積などが古典電磁場の計算によりかなり正確に求められている事実はなかなか面白い事である．しかしながら一致する理由は物理的にそう簡単に理解できていないわけではない．ただ古典電磁場の計算で基本的な物理量がある程度正確に求められて，また実験的にも検証されて来た事実は物理学の発展に取っては重要であり，また幸運でもあったと考えられる．

### 4.8.3 Rayleigh 散乱

光が原子中の束縛電子と弾性散乱する場合，その断面積は Rayleigh 散乱断面積で与えられている．この計算は古典電磁場を用いており，その導出方法はかなり複雑である．

- Rayleigh 散乱の断面積： Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray}^{(cl)} \simeq \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \quad (4.36)$$

と与えられている．しかし  $\lambda_0$  は計算されてなく、任意のパラメータである。

- 場の量子論による Rayleigh 散乱の断面積： 最近になって、Rayleigh 散乱の断面積が場の量子論的にも詳細な計算が実行されており，確かに散乱断面積の形は古典論と一致している事が示されている．さらに場の量子論の計算の場合、 $\lambda_0$  が具体的に計算されていて

$$\lambda_0^4 \equiv \frac{2(2\pi)^4}{m_e^2(\Delta E)^2} \quad (4.37)$$

と求められている． $\Delta E$  は原子の平均励起エネルギーで  $\Delta E \simeq 7 \text{ eV}$  である．ここで、可視光(青色)だと  $\lambda \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$  なので

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \simeq 0.9 \times 10^{-11} \quad (4.38)$$

となり非常に小さい．これより Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray} \simeq 0.9 \times 10^{-11} \times \left(\frac{r_0^2}{2}\right) \quad (4.39)$$

となっている．この微分断面積は Compton 散乱よりも 10 桁以上、小さいため自然界には応用できない断面積である．

## 第5章 Maxwell方程式 と Einstein 方程式

Einstein 方程式の問題点を物理的により深く理解するためには、Maxwell 方程式と比較し、検討して見る事が大切である。まずは両者の方程式を書いておこう。Maxwell 方程式と Einstein 方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = e j^\nu \quad (\text{Maxwell 方程式}) \quad (5.1)$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \quad (\text{Einstein 方程式}) \quad (5.2)$$

と書かれている。Maxwell 方程式の左辺はベクトルポテンシャル  $A^\mu$  で書かれていて、これが未知変数である。一方、Einstein 方程式の左辺は Ricci テンソル ( $R^{\mu\nu}$ ) とよばれる量で書かれているが、この Ricci テンソルは計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  の2回微分で書かれている。従って、左辺はすべて計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  で書かれていて、これが未知変数である。問題は右辺に現われている物理量 ( $j^\mu$  と  $T^{\mu\nu}$ ) がどのように計算され、求められているかと言う事である。

### 5.1 Maxwell方程式の右辺はカレント $j^\mu$

まず、Maxwell 方程式の場合を考えてみよう。この場合、右辺は電流密度  $j^\mu$  で書かれている。従ってこの方程式の物理的な意味は「電流密度があるとベクトルポテンシャルの形が決まる」と言う事であり、未知変数は勿論、ベクトルポテンシャル  $A^\mu$  である。

それではこの場合、その電流密度  $j^\mu$  はどのように決定されるのであろうか？これは自然界を理解するためには最も重要なポイントであるが、この電流密度の求め方はきちんとわかっている。電流密度  $j^\mu$  を生み出すのは多体の電子の運動である。この運動を記述するのは Dirac 方程式であり、従ってこの Dirac 方程式を解けば、基本的には電流密度が決定されることになっている。現実問題としては、電子の運動は大方、非相対論的なので、この場合 Dirac 方程式は Schrödinger 方程式に帰着されている。

よってこの Schrödinger 方程式を解けば電流密度  $j^\mu$  が求まることになっている。但し、この電子の多体系は散乱問題を含んでいて、非常に複雑な多体問題であり、勿論、簡単に解くことができるわけではない。しかしながら、この問題において、概念的な問題点は何処にも見当たらない。

## 5.2 Einstein 方程式の右辺はエネルギー・運動量テンソル

一方、Einstein 方程式の場合、右辺は星の分布関数により求められたエネルギー・運動量テンソルで書かれている。従って星の分布関数が求められると計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  が決まることになっていて、この  $g^{\mu\nu}$  が未知変数である。この場合、右辺は力学変数で書かれているのに、左辺は座標系を表す量になっている。従って、この等号が成り立つと言う物理的な意味は不明である。これは、Einstein 方程式の深刻な問題点の一つでもある

### 5.2.1 星の分布関数を決める方程式

しかしここではこの Einstein 方程式の等号を認めたとして話を進めて行こう。ここで問題となるのは、星の分布関数を決める方程式は何であるかと言う事である。これは明らかで、重力ポテンシャルが入っている Dirac 方程式が対応する基礎方程式となっている。現実的には、これを非相対論に近似して、さらに古典論近似をして求められた力学の方程式 (重力ポテンシャルを含む) が星の分布関数を決める多体の方程式として充分よいものである。すなわち、Einstein 方程式の右辺のエネルギー・運動量テンソルを決めるためにはどうしても重力場がある場合の古典力学の運動方程式を解く必要があると言う事である。

### 5.2.2 計量テンソルは重力場とは無関係

この事から明らかなように、計量テンソルが重力場と関係すると言う事はそもそもあり得ないことである。右辺の分布関数を決めるためにどうしても重力場がある場合の古典力学の運動方程式を解く必要がある。そしてその結果として右辺が決まり、Einstein 方程式の解として計量テンソルが決定されている。従って計量テンソルを重力場と関係づけることは不可能である。この事は Einstein 方程式が因果律を破っている問題と密接に関係している。

## 関連図書

- [1] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Annalen der Physik* vol. 49, pp. 769–822, März. 1916.
- [2] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory” (Bentham Publishers, 2013)
- [3] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory” (Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [4] Simon Newcomb, ”Tables of the Four Inner Planets”, 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).