

# 教養物理学の基礎

藤田 丈久      大島 佐知子

(よろず物理研究所)

# はじめに

物理学を学ぶ上で最も重要なことは「じっくり考えて理解する事」である。これは決して易しい事ではないが、しかし物理の面白さの大半はここにあると言える。ところが自然は多様性が豊かなため、その現象を「知識として覚える事」も大切な要素になっている。さらに、物理学で学んだものを「使いこなす技術」も重要である。これは語学の習得と比較してみると良くわかる。語学修得の目標はその言葉の背景にある文化を理解する事であるが、しかしこれは相当な努力をしてもなかなか出来る事ではない。まずは文法を理解して単語や文章を丸暗記することが大切な作業となっている。しかしながら語学の場合、それを使いこなしてコミュニケーションが出来る事も大切な要素となっている。

物理学は難しい学問である。この事実を変えることはできないし、また物理は易しいと思わせるような解説書は読者を混乱させるだけであろう。実際、自然現象を説明すること自体は難しいことではないが、しかし物理はその現象が起こる原因を明らかにしてゆく学問である。このため、その過程をたどる作業は数式の検証が要求され、それは決して易しいとは言えないものである。しかしながら読者が物理の現象に興味を持ち、そして自分で理解しようとするように促す、そういう解説は充分可能であろう。そうすれば若い人達が物理に対して自分独自のピクチャーを作れるものと考えている。

この本では教養物理学の基礎として一般教養における力学、熱力学、電磁気学それと初等量子論を広範囲に渡り解説している。力学では振動と重力下での運動を扱っているが同時に一般相対論についても解説している。また、熱力学ではそれが現象論である事をきちんと説明し、統計物理の言葉による計算も解説している。さらには経済物理の節も設けて議論している。電磁気学は場の理論であり、簡単に理解できる科目ではないが、電気・磁気の基本を説明するだけでなく、将来の応用についても視野にいれながら解説している。一方、量子論は日常的な直感とはかけ離れているため、量子と言う概念に慣れるのに時間が掛かるかも知れない。ここでは基本的な量子論を解説している。これら力学、熱力学、電磁気学および量子論は物理学の基礎であり、その基本的な概念に慣れて欲しいと思う。また、工学系に進む学生には力学を使いこなすための「基盤造り」が大切となろう。

一方、物理学を学ぼうとすると高等数学が必要となっている。物理学にとって数学は言語である。覚える事も必要ではあるが、しかし使える事の方がより

重要であろう。物理に関係する数学は付録で解説しているが、その基本は微分である。その微分は傾きを表していると言う点をきちんと認識していれば、微分に対して親しみを持つことができるであろう。従って計算練習さえしておけば、それを使いこなす事が充分可能なことと思う。

この教科書を式のチェックをしながら読み進んだとしても、大体の内容を正確に理解する事は簡単ではないかも知れない。しかしさらに2回、3回と読み返し、そしてじっくり考えて行くと、少なからぬ読者は基本的な内容を理解して頂けるものと考えている。尤も、理解する事に時間が掛かる事は決して悲観することではない。それどころか、じっくり考えながらさらに仲間と議論を重ねて行けば、思いもよらぬ高いレベルで理解できる可能性があると思われる。そしてその考え抜く努力こそが最も重要な事であると言えよう。

最後に、物理学をきちんと理解するための重要な視点について簡単にコメントしておこう。物理を学ぶ時、ほとんどの場合は科学史的な観点から学び始めることになる。例えば古典力学の方程式からどのように量子力学のシュレディンガー方程式が導かれたかと言う事が細かく記述されている場合が少くない。実際、科学史は面白いし、それ自体が問題となっているわけではない。しかしながら、物理学の体系からしたら、古典力学から量子力学が導かれることはあり得ない。すなわち、物理学をきちんと理解しようとする場合、科学史的(時系列的)な視点は間違いを含んでいる可能性がかなり高いと言う事である。従って、物理学を時系列の視点から捉えるのではなく、物理学の理論体系から理解すると言う視点をしっかり持つ必要がある。それができないと、物理の理解においてぶれが出てくる可能性がかなり大きいものと言える。

# 目次

第1章 力学の方程式	1
1.1 座標系と質点の運動	1
1.1.1 質点の座標と運動方程式	2
1.1.2 座標系の変換	2
1.2 ニュートン方程式	3
1.2.1 保存力	3
1.2.2 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー	4
1.3 自由粒子の運動	5
1.3.1 速度の定義	5
1.3.2 加速度の定義	6
1.4 一様重力場中の運動	7
1.4.1 自由落下	7
1.4.2 放物線運動	8
1.4.3 初速度 $v_0$ の問題	9
1.5 地球からの脱出速度	9
1.5.1 重力場中の運動方程式	10
1.5.2 脱出速度	10
1.6 地表での運動とコリオリ力	11
1.6.1 回転系でのニュートン方程式	11
1.6.2 地上 100 m から物体が落下した時のズレ	12
1.6.3 フーコーの振り子	12
1.7 力学の例題	14
1.7.1 バネの問題	14
1.7.2 単振り子	15
1.7.3 連成振動	17
1.7.4 多体問題	19
1.8 第1章の演習問題	20

<b>第 2 章</b>	<b>保存則と対称性</b>	<b>21</b>
2.1	エネルギー保存則	21
2.1.1	エネルギー保存の証明法：エネルギー積分	21
2.2	角運動量の保存	22
2.2.1	中心力ポテンシャル	22
2.2.2	角運動量保存の物理的意味	22
2.3	運動量の保存	23
2.3.1	2 体系の運動量保存	23
2.3.2	衝突における運動量保存	24
2.3.3	力積	24
2.4	力のモーメント	25
2.4.1	釣り合い	26
2.5	連続方程式	26
2.5.1	電荷保存	26
2.6	時間反転と空間反転	27
2.6.1	時間反転	27
2.6.2	空間反転	28
2.6.3	対称性の破れ	28
2.7	第 2 章の演習問題	29
<b>第 3 章</b>	<b>重力場中の運動</b>	<b>30</b>
3.1	ケプラー問題	30
3.1.1	軌道は楕円	31
3.1.2	面積速度一定	33
3.1.3	周期の 2 乗が長半径の 3 乗に比例	33
3.2	潮汐力	34
3.3	太陽模型	35
3.3.1	太陽の簡単化模型	35
3.4	銀河の衝突	37
3.4.1	2 体系のエネルギー	37
3.4.2	銀河の衝突力学	38
3.5	重力場と一般相対論	39
3.5.1	重力場	39
3.5.2	慣性質量と重力質量	40
3.5.3	重力相互作用の強さ	40

3.5.4	重力場のポアソン型方程式 . . . . .	41
3.5.5	一般相対論 . . . . .	41
3.5.6	超・簡単化されたアインシュタイン方程式 . . . . .	42
3.5.7	一般相対論と重力理論の関係 . . . . .	42
3.6	第 3 章の演習問題 . . . . .	44
<b>第 4 章</b>	<b>工学系の基礎力学</b> . . . . .	<b>45</b>
4.1	剛体の回転運動 . . . . .	45
4.1.1	剛体の運動エネルギー . . . . .	46
4.1.2	剛体の回転エネルギー . . . . .	47
4.1.3	慣性モーメントの例題 . . . . .	48
4.2	剛体の運動 . . . . .	49
4.2.1	オイラー方程式 . . . . .	49
4.2.2	地球の自転軸の歳差運動 . . . . .	50
4.3	金属物質の変形：静的な変位 . . . . .	51
4.3.1	応力 . . . . .	51
4.3.2	ひずみ . . . . .	51
4.3.3	引張り強さ . . . . .	52
4.3.4	応力テンソル . . . . .	53
4.4	固体の歪：動的な変位 . . . . .	53
4.4.1	圧電効果 . . . . .	53
4.4.2	水晶の逆圧電効果 . . . . .	54
4.5	第 4 章の演習問題 . . . . .	55
<b>第 5 章</b>	<b>熱力学</b> . . . . .	<b>56</b>
5.1	熱量 . . . . .	56
5.2	熱力学の法則 . . . . .	57
5.2.1	熱力学の第 1 法則 . . . . .	57
5.2.2	エントロピー $S$ の導入 . . . . .	58
5.2.3	熱力学の第 2 法則 . . . . .	58
5.3	熱力学関数 . . . . .	59
5.3.1	内部エネルギー $U$ . . . . .	59
5.3.2	ヘルムホルツの自由エネルギー $F$ . . . . .	59
5.3.3	その他の熱力学関数 . . . . .	60
5.4	統計物理学 . . . . .	60
5.4.1	分布関数 . . . . .	61

5.4.2	エントロピー	62
5.5	統計物理学の例題	63
5.5.1	理想気体：ミクロカノニカル集団	63
5.5.2	理想気体：カノニカル集団	64
5.5.3	熱容量	65
5.6	熱伝導	65
5.6.1	物質の流れはない熱伝導	65
5.6.2	フーリエの法則	66
5.6.3	真空中の熱移動	67
5.6.4	粒子数変化と化学ポテンシャル	68
5.7	経済物理学	70
5.7.1	ブラック・ショールズの方程式	70
5.7.2	ランダム行列とゆらぎの分布関数	71
5.7.3	リスク管理	72
5.8	第5章の演習問題	74
<b>第6章</b>	<b>電場の物理</b>	<b>75</b>
6.1	電気とは	75
6.1.1	電流と電池	75
6.2	電場と電位	76
6.2.1	クーロンの法則	76
6.2.2	電場	77
6.2.3	電位	77
6.3	電場のエネルギー	77
6.4	ガウスの法則	78
6.4.1	ガウスの法則 (微分形)	78
6.4.2	ポアソン方程式	79
6.4.3	ガウスの法則 (積分形)	80
6.5	静電場の例題	80
6.5.1	球殻に一様電荷分布	80
6.5.2	平面に一様電荷分布	81
6.6	誘電体	82
6.6.1	分極と電気双極子モーメント	82
6.6.2	分極電荷密度と誘電率	83
6.6.3	誘電体と電束密度	83

6.6.4	誘電体のミクロな解釈	83
6.7	第6章の演習問題	85
<b>第7章</b>	<b>電流と磁場の物理</b>	<b>86</b>
7.1	磁気とは	86
7.1.1	磁気双極子モーメント	86
7.2	導体とオームの法則	87
7.2.1	オームの法則	88
7.2.2	電流 $J$ と電流密度 $j$	89
7.2.3	キルヒホフの法則	89
7.2.4	$RC$ -回路	89
7.2.5	$LCR$ 回路	90
7.3	電流の作る磁場	91
7.3.1	アンペールの法則	91
7.3.2	ビオサバールの法則	92
7.3.3	アンペールの法則の積分系	92
7.3.4	直線電流の作る磁場	92
7.3.5	円電流の作る磁場	93
7.3.6	磁化と磁石	93
7.3.7	磁場のエネルギー	94
7.3.8	超伝導とマイスナー効果	95
7.4	電磁誘導	96
7.4.1	ローレンツ力	96
7.4.2	モーター	97
7.4.3	誘導加熱: IH	98
7.5	第7章の演習問題	99
<b>第8章</b>	<b>初等量子論</b>	<b>100</b>
8.1	量子論の物理量	100
8.1.1	状態関数 (波動関数)	100
8.1.2	量子力学の方程式	101
8.1.3	運動学	102
8.1.4	ブラケットの表記法	102
8.1.5	物理的観測量	103
8.2	古典力学極限	103
8.2.1	エーレンフェストの定理	103



8.3	自由粒子	105
8.3.1	自由粒子のシュレディンガー方程式	105
8.3.2	周期的境界条件	106
8.3.3	自由粒子のエネルギー固有値 $E_n$	106
8.4	水素型原子	107
8.4.1	極座標での微分方程式	107
8.4.2	エネルギー固有値	107
8.4.3	波動関数	108
8.4.4	原子	109
8.4.5	次元解析と単位系	109
8.5	調和振動子	110
8.5.1	生成消滅演算子	111
8.5.2	調和振動子は何故，使われるか？	111
8.6	光電効果	112
8.7	ゼーマン効果	113
8.7.1	摂動論	113
8.7.2	ゼーマン効果によるエネルギー分裂	114
8.7.3	傾斜磁場とMRI	114
8.8	原子核と核分裂	115
8.8.1	原子核中の中性子	116
8.8.2	核分裂	116
8.9	量子生物	118
8.9.1	水電子と光子	118
8.9.2	磁場とコリオリ力	119
8.10	第8章の演習問題	121
付録A 準備		122
A.1	関数とは？	122
A.2	微分	123
A.2.1	傾きの重要性	123
A.2.2	関数の微分	123
A.2.3	合成微分	124
A.3	積分	125
A.3.1	領域としての面積	125
A.3.2	積分の定義	125

A.3.3	数値積分	126
A.4	微分と積分の関係	127
A.5	ベクトル	128
A.5.1	ベクトルの内積 (スカラー積)	128
A.5.2	ベクトルの極座標表示	128
A.5.3	ベクトルの外積 (ベクトル積)	128
A.5.4	一般化されたベクトル	129
A.6	行列	130
A.6.1	行列の積	130
A.6.2	エルミート行列	130
A.6.3	エルミート行列の固有値は実数	131
A.6.4	エルミート行列の固有関数の直交性	131
A.6.5	パウリ行列	132
A.6.6	ユニタリー行列	132
A.6.7	実対称行列の対角化可能性の証明	132
A.7	オペレータの固有値と固有関数	133
A.7.1	固有値問題	133
A.7.2	同時固有関数	134
A.8	微分方程式	135
A.8.1	1回の微分方程式	135
A.8.2	2回の微分方程式	135
A.9	フーリエ展開	137
A.9.1	フーリエ展開の意味	137
A.9.2	スペクトル分解	137
<b>付録 B</b>	<b>物理の数学</b>	<b>138</b>
B.1	何故, 偏微分か?	138
B.1.1	偏微分の定義	138
B.1.2	2変数関数の偏微分	138
B.1.3	偏微分の例題	139
B.2	座標系	140
B.3	回転座標系	140
B.3.1	回転座標系 $\hat{r}$ の計算	141
B.4	数学の公式	141
B.4.1	デルタ関数 $\delta(x)$ とクロネッカーデルタ $\delta_{ij}$	141

B.4.2	ベクトルの内積と外積	142
B.4.3	ベクトルの公式	142
B.5	物理でよく使う積分公式	142
B.5.1	Exponential の積分	142
B.5.2	ガウス積分	143
B.5.3	その他の積分公式	143
B.6	$n$ 次元球の体積	143
B.7	微分演算公式と座標系	144
B.7.1	直交座標系 $(x, y, z)$	144
B.7.2	極座標系 $(r, \theta, \varphi)$	144
B.8	三角関数	145
B.9	指数関数と対数関数	145
B.10	テイラー展開	145
B.11	複素数と複素積分	146
B.11.1	複素数 $z$ の定義	146
B.11.2	オイラーの公式	146
B.11.3	解析関数	146
B.12	線積分と面積分	147
B.13	ガウスの定理	147
B.13.1	立方体でのガウスの定理	148
B.13.2	一般の場合のガウスの定理	148
B.14	ストークスの定理	149
B.14.1	ストークスの定理の証明	149
付録 C	ラグランジェ方程式	150
C.1	ラグランジェの方法	150
C.1.1	作用と一般座標	150
C.2	最小作用の原理	151
C.3	一般座標でのニュートン方程式	152
付録 D	相対性理論	153
D.1	相対性原理	153
D.1.1	慣性系	153
D.2	ガリレオの相対論	154
D.2.1	ガリレー変換	154
D.3	特殊相対論	154

D.3.1	ローレンツ変換	155
D.4	相対論の具体例	156
D.4.1	光のドップラー効果	156
D.4.2	大気圏で生成された $\mu$ -粒子の寿命	156
D.5	ミンコフスキー空間	157
D.5.1	計量テンソル	158
<b>付録 E</b>	<b>電磁気学と電磁波</b>	<b>159</b>
E.1	マクスウェル方程式	159
E.1.1	ベクトルポテンシャル	160
E.1.2	変位電流	160
E.2	電磁波	161
E.2.1	フォトン (光子)	161
E.3	電磁波の性質	162
E.3.1	フォトンの状態関数	162
<b>付録 F</b>	<b>光と波</b>	<b>163</b>
F.1	光	163
F.1.1	光の散乱	163
F.1.2	空はなぜ青いか？	164
F.2	音波	164
F.2.1	音のドップラー効果	165
F.2.2	地震波	165



# 第1章 力学の方程式

力学 (mechanics) のことを古典力学 (classical mechanics) と呼んでいる。この理由としては力学という言葉がより一般的に使われているからであろう。原子における電子の振る舞いを記述する力学は量子力学 (quantum mechanics) と呼ばれていて、物理学における最も重要な理論形式となっている。この量子力学と区別するために古典力学という言葉を使っている。

ここでは力学における基礎的な運動力学 (dynamics) を解説しよう。ニュートン力学は質点に対する運動を記述する学問である。ここで質点とは粒子の重心の一点の空間座標を  $r$  とした「点」の事を意味している。ニュートン方程式はこの質点に対する時間変化を決定する方程式である。場の理論に慣れていると、時間と空間は常に独立であるため、空間座標が時間に依存するという事は多少奇異な感じがする。しかし粒子の運動とその空間座標を同一視して良い場合、その時間変化を求めることは自然なこととも言えよう。この力学の運動は座標系を自分で定義して、その中で質点の運動を記述することになる。

## 1.1 座標系と質点の運動

力学も量子力学もすべて基本的には質点の運動を記述する学問である。その運動力学の記述は「座標系」を導入して行われる。この座標系は観測者が定義するものである。まず、静止系を考えてそこに座標系を導入しよう。そしてその座標系の軸を  $x$ -軸,  $y$ -軸,  $z$ -軸としてそれらは互いに直交しているものとする。ここでこの座標系を定義した観測者は「自分の時間」を持っているとするのが合理的である。

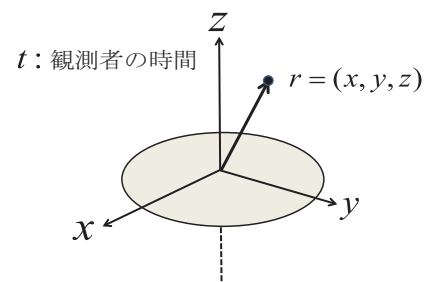


図 1.1: 座標系

質点の運動はこの時間  $t$  と空間  $(x, y, z)$  により記述されている．従って，座標系は歌舞伎で言ったら「舞台」に対応していて，粒子の運動は「役者の舞」に対応していると考えてよい．まずは座標系をしっかりと決めてそれからその運動を理解して行くことになる．

### 1.1.1 質点の座標と運動方程式

今，質量  $m$  の質点の座標を  $r = (x, y, z)$  としよう．力学はこの質点の座標が時間とともにどのように変化するかを記述している．そしてニュートン方程式は質点座標に対する時間の2階微分方程式となっている．その方程式が式(1.5)で与えられているものである．一方，量子力学では質点を記述するのは状態関数  $\psi(r, t)$  であり，この状態関数が満たすべき方程式がシュレディンガー方程式である．そしてその状態関数に対する方程式は時間では1階，空間では2階の微分方程式となっている．従って物理学ではこれらの微分方程式を解く事がまず最初にやるべき作業となっている．

### 1.1.2 座標系の変換

一つの座標系から他の座標系への変換が必要となる場合がある．そこには様々な変換があるが，そのうち最も重要な変換が慣性系間の変換となっている相対論の変換である．

- 相対論の変換： 現代物理学はすべてこの相対論の変換に対して不変性を保っている．この場合，一般的な変換がローレンツ変換と呼ばれるものである．一方，ニュートン力学では，このローレンツ変換がガリレー変換へと近似されている．なお一般相対論にはローレンツ変換に対する不変性はない．

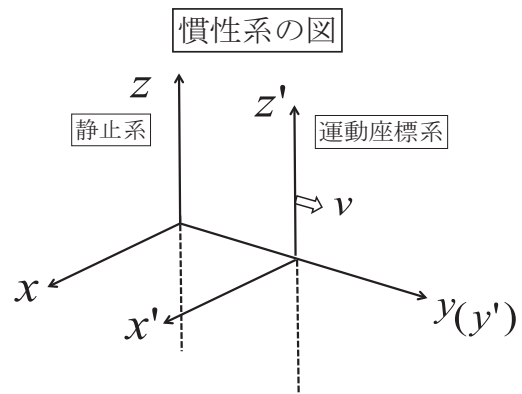


図 1.2: 慣性系の図

- 観測量： どの慣性系でも物理的な観測量は常に同じである．これが相対性

原理である．現在まで，この相対性原理と矛盾する現象は見つかっていない．

- 回転系への変換： 剛体の運動を記述する場合に良く使う座標系として回転座標系がある．回転座標系は慣性系ではないが，力学では実際よく使う．この場合，慣性系では見られなかった力が現れてくる．例えば，地球は自転しているため地球表面は回転座標系そのものである．このため，例えばコリオリ力や遠心力が現れているが勿論，これは観測されている現象である．

## 1.2 ニュートン方程式

質量  $m$  の質点に力  $F$  が働いている時，ニュートン (Newton) 方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

と書かれている．ここで，質点座標の時間微分の表式

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

が導入されている．通常の微分は  $y' = \frac{dy}{dx}$  と書いているが，力学での時間微分は特別な表示を取っている．一方，力  $F$  はバネでは  $F = -kr$ ，重力では

$$\mathbf{F} = -\nabla \left( -G \frac{Mm}{r} \right) = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

と与えられている．ここで  $G$  は重力定数であり， $M$  は重力中心（例えば，地球の運動を考える場合，太陽）の質量である．

### 1.2.1 保存力

ニュートン力学の問題を具体的に解説する前に，保存力に関して一つコメントをしておこう．それは「力」という概念はニュートン力学だけで使われていると言う事実である．実際，量子力学には力という概念がなく，常に「ポテンシャル」のみが現れている．ニュートン力学では力が

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

と書けるものを保存力という．この時に確かにエネルギー保存則が導かれている．しかし，この式をニュートン力学内で証明する事は出来ない．何故，ベク



トルである力  $F$  がスカラーであるポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  の微分で書くことができるのだろうか？これには条件が必要である．数学的な条件としては

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.4)$$

であれば確かにポテンシャルの微分で書かれる．しかし力学の範囲内で式 (1.4) を示すことはできない．実は，力が式 (1.3) のように書けるのは，ニュートン方程式自体が量子力学のシュレディンガー方程式から導かれていることが原因である．そしてそのシュレディンガー方程式には力という概念はなくポテンシャルのみで書かれているのである．ニュートン方程式の導出の際，力はそのポテンシャルの微分として現れ，その結果として方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

となっている．この詳細は第8章で議論しよう．

● 非保存力： ニュートン力学の方程式に保存力以外の力が現れる場合がよくある．これは多体問題を1体問題に無理やりなおすと，どうしても複雑な力が現れてしまうからである．例えば，摩擦力は保存力ではないが良く見かける力である．これは水滴が落下する時，重力による落下運動だけでは水滴の運動は記述できない．実際にその水滴の運動に対して，摩擦力を考えると比較的簡単にその運動を理解することができる．この摩擦力は水滴が空気と衝突を繰り返すため生じた力である．これは多体問題となっていて，空気分子との衝突過程を無理矢理に1体問題と近似したため摩擦力が発生したのである．

### 1.2.2 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

今後，繰り返し証明する事になるがエネルギー保存 (energy conservation) の式を導いておこう．まず式 (1.5) に  $\dot{\mathbf{r}}$  を掛けると  $m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r})$  となっている．この式は数学の公式を使うと直ちに書き換える事が出来て

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E \quad (1.6)$$

というエネルギー保存則が求まる．ここで  $E$  は定数である．このポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  を力  $\mathbf{F}$  で書く事もあり， $U(\mathbf{r}) = -\int^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$  と書かれている．

● 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー： 式 (1.6) において，その第1項 ( $\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$ ) の事を運動エネルギー (kinetic energy) と呼んでいる．粒子が運

動しているときのエネルギーである．一方，第2項 ( $U(r)$ ) はポテンシャルエネルギー (potential energy) と呼ばれている．この場合，ポテンシャルエネルギーはある点から測った時のエネルギーに対応しているので，何処に基準点があるのかを常に考えておく必要がある．

- ポテンシャルエネルギーの最小値：ポテンシャルエネルギーが最小値を持っている場合，粒子の運動は必ず，その最小値の周りでの振動となる．一方，一様重力のように最小値がない場合，粒子はポテンシャルエネルギーの低い方へ粒子は運動する．これが自由落下である．

### 1.3 自由粒子の運動

力が働かない場合，粒子の運動は自由運動となる．自由粒子の運動を記述する方程式は  $m\ddot{r} = 0$  である．これは3次元で書いているが，自由粒子の運動自体は直線となる．従って，これは1次元系の方程式で書いた方がわかり易いし，また物理的にもその方が意味がある．運動が  $y$  方向だと仮定すれば

$$\ddot{y} = 0 \quad (1.7)$$

となる．この式 (1.7) の一般解は  $y = At + B$  ( $B$  は定数) となっている．この解が方程式 (1.7) を満たすことは明らかであろう．

- 数式の検証：教科書で「明らかである」と書かれていても必ず，自分でその式を検証することが物理を理解するコツである．ちなみに，今の場合の検証とは，まず  $\frac{dy}{dt} = A$  と計算する．そして  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$  とさらに計算して納得するのである．この検証は簡単ではあるが，しかし多くの問題は知っている人からすればこれと同じように簡単である．それを自分の手で実行すると不思議な事にその現象に慣れて行き，物理がわかってくるものである．

#### 1.3.1 速度の定義

- 位置  $x$  での速度：次に，位置  $x$  での速度をみてみよう．この場合， $\Delta t \rightarrow 0$  のとき位置  $x$  での瞬間の速度になる．よって，点  $x$  における瞬間速度は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.8)$$

となる．但し， $\Delta t \rightarrow 0$  とはほとんどゼロだが厳密なゼロではない．

時間  $t$  における位置と速度を  $x(t)$ ,  $v(t)$  としよう. この時, 微小区間  $\Delta x$  は  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$  と書くことができ, その微小区間  $\Delta x$  の平均速度  $\bar{v}$  は

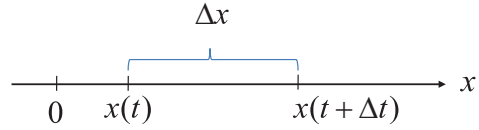


図 1.3: 微小区間

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{とあらわされる.}$$

- 自由落下の速度: 質量  $m$  の物体 (質点) を落とした時の運動を考えよう. 質点の位置  $z$  は

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (1.9)$$

で表され,  $g, C_1, C_2$  は定数である. この場合, 質点の速度  $v_z$  は  $z(t)$  を時間で微分すれば求めることができるので,  $v_z(t) = \dot{z} = -gt + C_1$  となる.

- 100 m 走の平均速度: 100 m 走において選手が 10 秒 05 で走ったとしよう. この時の平均速度は 9.95 m/s である. 一方, 400 m リレー走において選手達は 37.66 秒で走ったとしよう. この時, バトンの平均速度は 10.62 m/s となり, 100 m 走の選手よりも速い事がわかる.

### 1.3.2 加速度の定義

加速度とは単位時間あたりの速度の変化量のことである. ここで, 時間  $t$  における速度と加速度を  $v(t)$  と  $a(t)$  としよう. 今,  $\Delta t$  の間に  $\Delta v$  だけ速度が変化したとすると平均加速度  $\bar{a}$  は  $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$  と書ける.

- 位置  $x$  での速度: 次に, ある時間  $t$  での加速度は平均加速度  $\bar{a}$  で  $\Delta t \rightarrow 0$  とすれば, ある任意の時間  $t$  での加速度をあらわせる. よって加速度は

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (1.10)$$

と書くことができる.

- 自由落下の加速度: 質量  $m$  の物体 (質点) を落とした時の運動を考えよう. 質点の速度  $v_z$  が  $v_z(t) = \dot{z} = -gt + C_1$  で表されたとき, 質点の加速度は

$a_z(t) = \dot{v}_z = \ddot{z} = -g$  となる .

- 100 m 走の平均加速度 : 100 m 走において最初の 10 m で選手の速度  $v$  が 5 m/s になり , 20 m の時点で  $v = 10$  m/s となったとしよう . この間 , それぞれ 1 秒ずつかかったとするとこの選手の平均加速度は  $a = 5$  m/s<sup>2</sup> である .

## 1.4 一様重力場中の運動

力学の問題でまず最初に理解する必要があるのは一様重力場中の質点の運動である . これは日常 , 経験している物理現象であるため , 正確な物理的な直感を養う事ができる .

### 1.4.1 自由落下

ニュートンの運動方程式は  $m\ddot{r} = F$  である . 今 , 高さが 100 m の塔から質量  $m$  の物体 ( 質点 ) を落とした時の運動を考えよう . 運動方程式は鉛直上方を  $z$ - 軸とすると  $z$  方向だけ考えればよく , また力は  $F_z = -mg$  なので

$$m\ddot{z} = -mg \quad (1.11)$$

と書ける . 但し  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> は重力加速度である . この微分方程式の一般解は

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (1.12)$$

と直ちに求まる . ここで ,  $C_1, C_2$  は積分定数である .

- 未知定数  $C_1, C_2$  の決定 : 未知定数である  $C_1, C_2$  を初期条件を使って決めよう . 質点をそっと落としたので初期条件は  $t = 0$  で  $\dot{z} = 0, z = 100$  m となっている . この時 , 未知定数  $C_1, C_2$  はそれぞれ  $C_1 = 0, C_2 = 100$  m と求まる . よって , 質点の位置をあらわす関数  $z$  は  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + 100$  m となる .

- 質点の地面到達の時間 : 次に , 質点が地面に何秒 ( $t_0$  秒) 後に到達するか求めてみよう . 地面は  $z = 0$  だから位置の関数  $z$  に 0 を代入して ,

$$0 = -\frac{1}{2}gt_0^2 + 100 \text{ m} \quad (1.13)$$

の方程式を解くと  $t_0 \simeq 4.5$  s となり , よって約 4.5 秒後に地面に到達する .

- 質点の地面到達時の速度： また、質点の地面に到達時の速度を求めてみよう。位置をあらわす関数  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + 100 \text{ m}$  を微分すると速度となるので、

$$\dot{z} = -gt \quad (1.14)$$

である。これに  $t_0 \simeq 4.5 \text{ s}$  を代入すると  $\dot{z}(t_0) = -g \times 4.5 \text{ s} \simeq -44 \text{ m/s}$  と求まる。よって、質点の地面に到達する時の速度  $v$  は下向きに  $v \simeq 44 \text{ m/s}$  となっている。これは  $100 \text{ m}$  走の速度  $10 \text{ m/s}$  と比べるとかなり速い事がわかる。それでも音速は約  $360 \text{ m/s}$  であるし、さらに光速は約  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  である。これらと比べるとこの地面到達速度  $v$  は遅いと言える。

### 1.4.2 放物線運動

地表面から  $\theta$  の角をなして、初速度  $v_0$  で投げ出された質量  $m$  の物体（質点）の運動を考えよう。この場合、運動方程式は  $x$ -軸、 $z$ -軸それぞれで考える必要がある。この質点に対する力は重力しかないので、 $x$ -軸方向に働く力はゼロである。 $z$ -軸方向に働く力は  $z$ -軸を鉛直上方にとると  $F = -mg$  である。よって、それぞれの運動方程式は

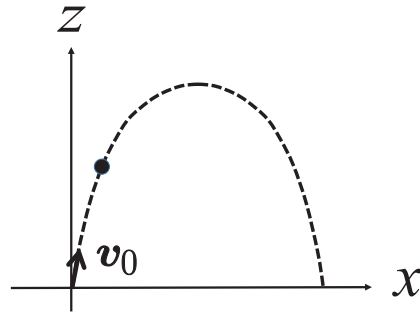


図 1.4: 放物運動

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg \quad (1.15)$$

と書ける。まず、 $x$ -軸の運動方程式を解くと、 $x = C_1t + C_2$  となる。ここで、 $C_1, C_2$  は積分定数である。次に、 $z$ -軸の運動方程式を解くと

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4 \quad (1.16)$$

と求まる。 $C_3, C_4$  は積分定数である。

- 未知定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  の決定： 未知定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を初期条件を使って決めて行こう。今回の初期条件は

$$t = 0 \quad \text{で} \quad \begin{cases} x = 0 & \dot{x} = v_0 \cos \theta \\ z = 0 & \dot{z} = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad \text{である。}$$

これより

$$x = (v_0 \cos \theta) t \quad (1.17)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta) t \quad (1.18)$$

が求まる．ここで  $t$  を消去して質点の軌道を求めると

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x \quad (1.19)$$

となる．これは2次関数なので放物線になっている．これを平方完成すると

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \left( x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1.20)$$

となり， $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$  の時に一番高くなる．その高さは  $\boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}$  である．

### 1.4.3 初速度 $v_0$ の問題

運動方程式を解いてその運動を決定するには初期条件が必要である．自由落下運動においては初速度を  $v_0 = 0$  とする場合が多く，これは問題ない．しかし，一般的に水平方向も含めた初速度を仮定する場合，その初速度はどのようにして決められるのかと言う疑問を持つ学生がいるものと思う．

• 垂直方向上向きの初速度：ここでその質問に答えておこう．初速度を  $v_0$  として，質量  $m$  の質点にこの速度を与える方法は瞬間的に一定の力  $F_0$  を加える事である．この力は運動方程式を解くときに現われた力とは無関係であり，例えば人が質点を押す力である．詳細は第2章で解説するが，ここでは結果だけを書いておこう．初速度  $v_0$  は  $\boxed{v_0 = \frac{\delta t F_0}{m}}$  と求められている．ここで  $\delta t$  は力  $F_0$  を加えている時間である．

## 1.5 地球からの脱出速度

地上から質量  $m$  の物体（質点）を鉛直方向に打ち上げるとしよう．この時，質点が地球の重力から脱出するために必要な初速度  $v_0$  の値を求めよう．

### 1.5.1 重力場中の運動方程式

地表から高さ  $z$  にある質点に働く重力は  $F = -\frac{GMm}{(R+z)^2}$  である．ここで地球の半径を  $R$ , 質量を  $M$ , 万有引力定数を  $G$  としている．この時, 質点の運動方程式は

$$m\ddot{z} = -\frac{GMm}{(R+z)^2} \quad (1.21)$$

である．ここで  $\dot{z}$  を掛けてエネルギー積分を実行すると

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{mgR}{1 + \frac{z}{R}} \quad (1.22)$$

となる．但し  $g$  は重力加速度  $g = \frac{GM}{R^2}$  であり, ポテンシャルは  $g$  を用いて書き直している．初期条件は  $t = 0$  で  $z = 0, \dot{z} = v_0$  である．これより  $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR$  なので質点が位置  $z$  にいる時のエネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{mgR}{1 + \frac{z}{R}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \quad (1.23)$$

となっている．

### 1.5.2 脱出速度

無限遠方 ( $z \rightarrow \infty$ ) でのエネルギーは  $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$  となっている．よって式 (1.23) は  $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR$  となる．脱出するとは無限遠方で運動エネルギーが有限 ( $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \geq 0$ ) となる事である．従って, この条件は

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \geq 0 \quad (1.24)$$

であり脱出の条件は  $v_0 \geq \sqrt{2gR}$  となっている．これより脱出するのに必要な初速度  $v_e$  は  $v_e = \sqrt{2gR}$  である． $R = 6.37 \times 10^6$  m,  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> なので  $v_e \simeq 11.2$  km/s となり, これが地球からロケットが脱出するための初速度である．実際のロケット噴射では発射後も加速しているのでこれとは異なる．

● 地球の公転速度との比較： 脱出速度を地球の公転速度  $V$  と比較しよう．地球軌道半径は光速  $c$  で約 8 分 ( $\sim 500c$ ) であり 1 年間は約 365.25 日 ( $\sim \pi \times 10^7$  s) なので公転速度は  $V \simeq \frac{2\pi \times 500c}{\pi \times 10^7} \simeq 30$  km/s である．従って, 脱出速度は地球の公転速度の約 3 分の 1 となっている．

## 1.6 地表での運動とコリオリ力

地球は自転しているため，地表での力学の方程式には重力以外の見かけの力としてコリオリ力と遠心力が現われている．コリオリ力による影響として台風の回転が常に反時計回りであることが知られている．風が台風の中心に流れ込む時，少し右にずれるため，反時計回りの回転となっている．

### 1.6.1 回転系でのニュートン方程式

回転系でのニュートン方程式の導出は式 (B.10) を使って実行する．ここではその結果だけを書いておこう．質点  $m$  に対するニュートン方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + m\omega^2\mathbf{r} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \quad (1.25)$$

となっている．

ここで右辺の第1項がコリオリ力であり，第2，3項が遠心力となっている．また最終項の  $\mathbf{F}$  は外から与えられた力を表している．地表での重力の場合， $\mathbf{F}$  は一様重力であり  $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$  となっている．

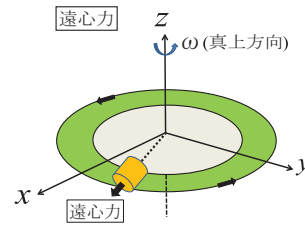


図 1.5: 遠心力

● 東京でのニュートン方程式： 東京での運動方程式を求めるためには式 (1.25) をさらに回転して緯度  $\theta$  での方程式に移す必要がある．ここでは簡単化のために遠心力を無視して，コリオリ力のみを取り出して議論しよう．まず，座標系として  $z$ -軸を鉛直上向きとする．また  $x$ -軸を南向き  $y$ -軸を東向きとしよう．この時，質量  $m$  の質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \theta \quad (1.26)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} \sin \theta - 2m\omega\dot{z} \cos \theta \quad (1.27)$$

$$m\ddot{z} = -mg \quad (1.28)$$

となる．但し， $\omega$  は地球の自転の角加速度で  $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  であり， $\omega^2$  の項は無視している．また  $\theta$  は東京の緯度で  $\theta = 36$  度としている．



### 1.6.2 地上100mから物体が落下した時のズレ

地上100mから質量  $m$  の物体を落下させた時、この物体は真下から東に少しずれる。この場合、 $x, y$  方向の速度はゼロとして充分であり、また  $\dot{z} = -gt$  なので運動方程式は

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{z} \cos\theta = 2\omega g \cos\theta t \quad (1.29)$$

となる。この方程式はすぐ解けて  $y = \frac{1}{3}\omega g \cos\theta t^3$  と求まる。地上100mから物体を落下させた時、地表に届く時間は式 (1.13) より、 $t_0 \simeq 4.5$  s であったのでコリオリ力によって東に約  $y \simeq 0.02$  m だけずれている。

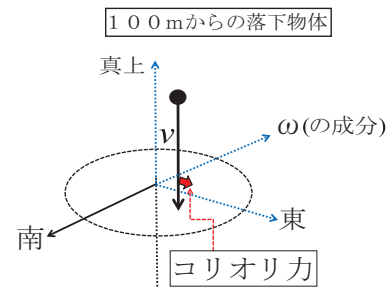


図 1.6: 100mからの落下物体

### 1.6.3 フーコーの振り子

振り子が  $x - y$  平面で単振動をしている場合を考えよう。この時、質点  $m$  に対するニュートン方程式はコリオリ力のみを考えると

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin\theta - m\omega_0^2 x \quad (1.30)$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} \sin\theta - m\omega_0^2 y \quad (1.31)$$

である。ここで  $\omega_0$  はフーコーの振り子の振動数である。この微分方程式の解法は色々あるがここでは複素変数  $u = x + iy$  を用いて解いて行こう。この時、式 (1.31) に  $i$  を掛けて式 (1.30) に辺々足し算すると  $u$  に対する方程式は

$$\ddot{u} + 2i\omega \sin\theta \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1.32)$$

と書く事ができる。ここで  $u = Ae^{i\alpha t}$  と置いて特性方程式を求めると  $\alpha^2 + 2\omega \sin\theta \alpha - \omega_0^2 = 0$  となる。また  $\omega_0 \sim 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega \simeq 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  なので  $\omega_0 \gg \omega$  である。よって  $\alpha \simeq -\omega \sin\theta \pm \omega_0$  であり、式 (1.32) の解は

$$u = Ae^{-i\omega \sin\theta t} (a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t) \quad (1.33)$$

となる。但し、 $a, b$  は定数である。

これよりコリオリ力による振動面は式 (1.33) の  $e^{-i\omega \sin \theta t}$  より右回り (時計回り) に回転し, その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta} = \frac{1 \text{ 日}}{\sin \theta}$$

と求まる. 従ってフーコーの振り子は約  $\frac{1 \text{ 日}}{\sin \theta}$  かけて一周する.

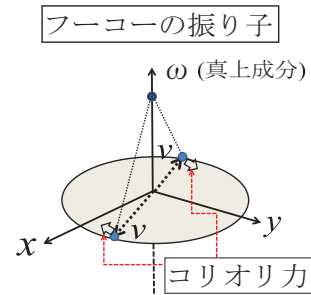


図 1.7: フーコーの振り子

- 台風の渦: 地球規模でコリオリ力の影響を示している現象はいくつか知られている. その中でも台風の渦が反時計周りに回っている事は良く知られている現象である. 台風は必ず, 右巻きになって渦ができていますが, これは台風の中心が上昇気流のため気圧が減少し, 風が中心に向けて吹き込むからである. この場合, 図で示したようにコリオリ力は右側に働いている.

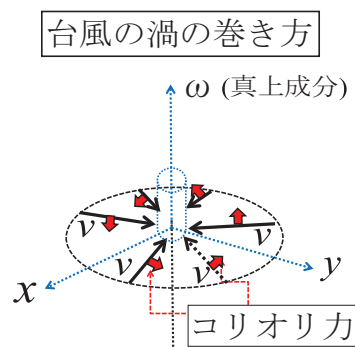


図 1.8: 台風の渦の巻き方

## 1.7 力学の例題

力学の問題は大きく分けて二つある．一つは重力下での運動であり，これはケプラー問題に集約される．二つ目として振動の問題がある．単振動にしても振り子にしても力学が一番うまく記述できる例題である．ケプラー問題は第3章で議論することにして，ここでは振動を扱って行こう．ここで最も重要な問題が調和振動子 (harmonic oscillator) による運動である．これが何故，現実に重要となっているのかについても，後程議論するが，一つには微小振動だと必ず調和振動子の運動になっていることもその重要な要因でもある．

### 1.7.1 バネの問題

質量  $m$  の質点を長さ  $\ell$  のバネ定数  $k$  の軽いバネに接続して微小振動を行わせよう．これは1次元調和振動子の運動である．力は変位  $x$  に比例しているが勿論，これは変位が小さい時のみ成り立っている．この時，力  $F$  はフック (Hooke) の法則より  $F = -kx$  と書けている．ここで方程式を解く前にポテンシャル  $U(x)$  を求めておこう．これは

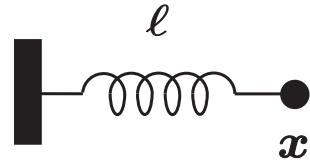


図 1.9: バネの問題

$$U(x) = -\int_0^x F dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.34)$$

となっている．但し，基準点を  $x = 0$  にとっている．

● 質点のニュートン方程式： この場合，ニュートン方程式は  $m\ddot{x} = -kx$  である．この微分方程式は  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$  を導入すると

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.35)$$

となる．この微分方程式の解き方は  $x = e^{\mu t}$  として式 (1.35) に代入し  $\mu^2 + \omega^2 = 0$  という特性方程式を求める事である．これは  $\mu = \pm i\omega$  となるので，微分方程式 (1.35) の解は

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (1.36)$$

と書ける． $x$  は実数なので  $\sin$  と  $\cos$  の表示を使う．この時，第2式から第3式への移行にはオイラーの公式  $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$  を使っている． $C_1, C_2$  および  $A_1, A_2$  は任意定数であり，条件を自分で入れないと決まらない定数である．例えば，初期条件として  $t = 0$  で  $x = 0$  と  $\dot{x} = v_0$  を取れば

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.37)$$

と求められる．これは質点が振動していることを示している．すなわち質点の座標が行ったり来たりの運動をしている．この振動子の周期  $T$  は  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  と与えられる．これは  $\sin$  の周期が  $2\pi$  であることからあきらかであるが，またグラフを書いてみれば直ちにわかる事でもある．

• エネルギー保存則を用いた解法： バネの問題の解法は上記による方法が最も簡単であるが，エネルギー保存則を用いた解法も良く知られている．今の場合，バネ全体のエネルギー  $E$  (但し  $E$  は任意定数) は式 (1.6) より

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1.38)$$

である．ここで  $k = m\omega^2$  を使っている．この時， $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}$  より

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \omega t + \alpha \quad (1.39)$$

となる． $\alpha$  は積分定数である．この積分は  $x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \theta$  と変換すると

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} (1 - \sin^2 \theta)}} = \theta = \omega t + \alpha \quad (1.40)$$

となる．よって

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (1.41)$$

となり，式 (1.36) で求めたものと一致している．

## 1.7.2 単振り子

単振り子は力学において標準的で重要な問題である．これをしっかり理解すれば，力学の本質が会得できる可能性がある．単振り子の問題を扱う場合，ラ

ラグランジェ方程式を使うと簡単なので、ここではこの方式で問題を解こう。ラグランジェ方程式の使い方は付録Cに説明してあるので参照して欲しい。これは一般座標で書かれているニュートン方程式そのものである。

● 単振り子に働く力： 単振り子に働く力は一様重力であり、それだけである。それ以外の条件としては振り子の糸が伸び縮みはしないという事である。この問題をニュートン方程式で解くと、糸に張力が働いてその垂直成分が重力と釣り合うとして方程式を立てている。一方、ラグランジェ方程式では質点に働くポテンシャルのみを求めれば良い。この違いは力のつり合いで問題を解くか、ポテンシャルから方程式を作るかによっている。今、質量  $m$  の質点を伸び縮みしない長さ  $l$  の軽い糸でつるし、このつるした点を座標の原点としよう。

この質点を静かに垂らした方向を  $y$ -軸の正方向とする。この質点を静かに  $x$ -軸方向にずらし、単振り子の振動を開始する。この時、質点の座標を  $(x, y)$  とし、質点が  $y$ -軸となす角度を  $\theta$  と定義する。この時、質点の座標とその時間微分は

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta, & y &= l \cos \theta \\ \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y} &= -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

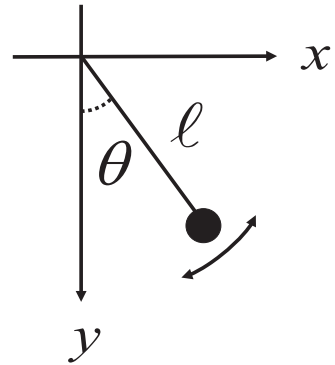


図 1.10: 単振り子

と書くことが出来る。従って、この質点の運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \quad (1.42)$$

である事が容易に確かめられる。一方、質点を感じるポテンシャル  $U$  は

$$U = -mgy = -mg\ell \cos \theta \quad (1.43)$$

と書ける。マイナス符号は  $y$ -軸の方向を下向きに取った事による。

● 単振り子のラグランジアン： この時、ラグランジアン  $L = T - U$  は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta \quad (1.44)$$

となる。ラグランジェ方程式は一般座標として  $\theta$  を取れば良いので

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad (1.45)$$

となる．これが単振り子に対する運動方程式である．微小振動の場合 ( $\theta \ll 1$ )

$$\sin \theta \simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \quad (1.46)$$

と展開できる．この場合，右辺第1項を取れば十分なので運動方程式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (1.47)$$

となる．但し，ここで  $\omega$  を  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  と導入した．この微分方程式はバネの問題と全く同じなのですぐに解く事が出来てその一般解は

$$\theta = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

となる．そして，この運動の周期  $T$  は  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  で与えられる事がわかる．

### 1.7.3 連成振動

図のように質量  $m$  の2個の質点をバネ定数  $k$  の軽いバネで結び付けたものを滑らかな水平面上に置いた．バネの両端は固定してあり，それぞれのバネの自然長は  $\ell$  である．この連成振動の問題を解こうとする時，そのコツはまず座標を決める事である．1個目と2個目の質点の座標を  $x_1, x_2$  としよう．

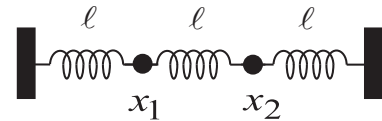


図 1.11: 連成振動

- 2個の質点の運動エネルギー： この時，質点の運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad \text{である．}$$

- 2個の質点のポテンシャルエネルギー： 2個の質点間はバネでつながっているため，それぞれが自然長  $\ell$  からどれだけずれたかにより，ポテンシャルエネルギーが決まってくる．それは

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \ell)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - 2\ell)^2 \quad (1.48)$$

である．ここで  $y_1 = x_1 - \ell, \quad y_2 = x_2 - 2\ell$  を導入すると  $U$  は

$$U = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}k(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 \quad \text{と書き直すことができる．}$$

- 2個の質点のラグランジアン： 2個の質点のラグランジアン  $L$  は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}ky_1^2 - \frac{1}{2}k(y_2 - y_1)^2 - \frac{1}{2}ky_2^2 \quad (1.49)$$

となっている．ラグランジェ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_2} \quad (1.50)$$

であり，これは

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 - k(y_1 - y_2) \quad (1.51)$$

$$m\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - ky_2 \quad (1.52)$$

となっている．

- 運動方程式の解： この運動方程式の解き方は良く知られているが簡単に解説しよう．まず  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$  とおく．さらに

$$y_1 = Ae^{i\omega t}, \quad y_2 = Be^{i\omega t} \quad (1.53)$$

とにおいて，これを式 (1.51–1.52) に代入する．簡単な計算により

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (1.54)$$

が求まる．今の場合， $\omega$  が未知数になっているので，式 (1.54) の行列の行列式がゼロ

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{pmatrix} = (\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - \omega_0^4 = 0$$

という条件より

$$\omega = \pm\omega_0, \quad \omega = \pm\sqrt{3}\omega_0 \quad (1.55)$$

の4個の解が見ついている．この解を式 (1.54) に代入して  $A, B$  の比を求めることができる．例えば  $\omega^2 = \omega_0^2$  を式 (1.54) に代入すると  $A = B$  が求まり， $\omega^2 = 3\omega_0^2$  を代入すれば  $A = -B$  が求まる．そしてこの関係式を用いて式 (1.53) を書き直すと質点の振幅が

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 e^{i\omega t} + A'_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\sqrt{3}\omega t} + A'_2 e^{-i\sqrt{3}\omega t} \\ y_2 &= A_1 e^{i\omega t} + A'_1 e^{-i\omega t} - A_2 e^{i\sqrt{3}\omega t} - A'_2 e^{-i\sqrt{3}\omega t} \end{aligned}$$

と求まる．但し  $A_1, A'_1, A_2, A'_2$  は任意の定数である．

#### 1.7.4 多体問題

2個以上の質点が相互に力を及ぼしあう時(相互作用という),この問題は多体問題という.単振り子の問題は一見,1体問題に見えるが実際には地球重力が働いているため2体問題となっている.純粋な1体問題としては自由粒子の場合のみがある.力学は比較的易しい科目であるが,しかし多体問題となると一気に難しくなり,ほとんどの問題は到底,解く事ができていない.例えば乱気流は空気分子の多体問題であり,何らかの理由で気流に強い揺らぎが生じて渦ができてからであると考えられる.しかしこの問題を多体問題として厳密に解くことは現実問題としては不可能である.



## 1.8 第1章の演習問題

問1 式(1.2)の微分を実行してこの式を確かめよ.

問2  $\nabla \times F = 0$  が成り立つと  $F = -\nabla U$  と書けることを確かめよ.

問3 微分方程式  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  の解が  $x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$  となっている事を確かめよ.

問4 式(1.42)の計算を実行せよ.

問5 地上で  $z$  軸を下向きにとると重力ポテンシャルは  $U = -mgz$  となる. これは何故かを考えよ.

問6 物体を地上から速度  $v_0$  で打ち上げた時, その最高点  $y$  を求めよ.

問7 ニュートン方程式 ( $m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ ) を一般座標  $q_1, q_2, q_3$  で書き直すと

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.56)$$

となりラグランジェ方程式が求まることを示せ. 但し  $L = T - U$ ,  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  である. ここで次式を使ってよい.

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ヒント:

$$I \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (1.57)$$

を考えて, ニュートン方程式を使い右辺をひたすら変形して行く.

## 第2章 保存則と対称性

物理学には様々な保存則があり、これらは常に重要な役割を果たしている。実際、その保存則をうまく利用すると物理が明解に理解できるものである。

### 2.1 エネルギー保存則

ニュートン方程式は2階の微分方程式であり、この微分方程式を解くと2個の定数が現われる。この定数のうちで保存量に関係しているものが必ず存在している。特に重要なものがエネルギー保存則 (energy conservation law) であるが、これはポテンシャルの形にも依っている。力と言う概念は、実は力学に固有のものであり、量子力学では力という概念は直接的には現われていない。基本的な力は必ず、ポテンシャルの微分として  $F = -\nabla U(\mathbf{r})$  と書かれている。

#### 2.1.1 エネルギー保存の証明法： エネルギー積分

エネルギー保存則を証明するためにニュートンの運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

に  $\dot{\mathbf{r}}$  を掛けると  $m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r})$  となる。ここで数学の公式

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

を使う。式 (2.3) で  $\mathbf{r}$  は時間のみ関数なので全微分となっている。これより

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E \quad (2.4)$$

というエネルギー保存則が求まる。ここで  $E$  は定数である。

## 2.2 角運動量の保存

角運動量  $L$  (angular momentum) を  $L = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  と定義しよう。初めてこの角運動量の定義式をみた初学者にとって、何故、このような面倒な物理量を導入しなくてはならないのかと言う疑問を持たれるものと思う。この角運動量導入の理由は、ある力の場合にこれが保存量 (時間に依らない物理量) になるからである。その力とは中心力、すなわち力  $F$  が  $r$  に比例する場合である。

### 2.2.1 中心力ポテンシャル

中心力ポテンシャルとは  $U = U(r)$  として  $r = |\mathbf{r}|$  の関数となっているものである。この場合、力  $F$  は

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.5)$$

と書かれている。ここで中心力中での運動では角運動量  $L$  が保存している事を証明しよう。この運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.6)$$

となっている。角運動量  $L$  が保存するとは  $\frac{dL}{dt} = 0$  を証明する事である。この計算を実行すると

$$\frac{dL}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times \frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \quad (2.7)$$

となっている。従って  $L$  は時間に依らない保存量 (定数) になっている。ここでベクトルの外積の性質  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$  を用いている。

### 2.2.2 角運動量保存の物理的意味

質点、例えばケプラー問題の場合の地球の重心、の角運動量が保存するとはどういう物理的な意味があるのだろうか？何か重要な「御利益」があるはずである。地球が太陽の周りを回転している場合、その角運動量はどうなっているのだろうか？実はその大きさ自体は具体的に数値を入れないと計算できないが、角運動量の保存から一つ重要なことが分かっている。それは地球の運動が

平面上を回転していると言う事である．この理由は簡単で，地球の角運動量  $L$  を  $z$  軸にとると地球の運動  $r$  は  $L$  と直交している事が証明できる．すなわち

$$r \cdot L = r \cdot (r \times m\dot{r}) = (r \times r) \cdot m\dot{r} = 0 \quad (2.8)$$

より明らかである．これより，地球の運動  $r$  は  $x - y$  平面であることが示されたのである．このように角運動量の保存則を使うだけで，運動のある部分がわかってしまうのであり，これは力学の方程式を解く事なしに理解できるという点で非常に重要である．

## 2.3 運動量の保存

運動量  $p$  (momentum) を  $p = m\dot{r}$  で定義している．この運動量  $p$  を用いてニュートン方程式を書き直すと

$$\dot{p} = F = -\nabla U(r) \quad (2.9)$$

となっている．これは明らかに保存量と直接は関係していない．しかしながら，もし力  $F$  がゼロの時は  $\dot{p} = 0$  となり運動量  $p$  は保存量である．これは自由粒子の運動を意味している．

### 2.3.1 2 体系の運動量保存

ここで2体系の運動を考えよう．今，質点  $m_1$  の座標を  $r_1$  とし質点  $m_2$  の座標を  $r_2$  としよう．この時，質点同士が衝突してそれぞれが力  $F_{12}$  を受けたとしよう．この時のニュートン方程式は

$$\dot{p}_1 = F_{12}, \quad \dot{p}_2 = F_{21} \quad (2.10)$$

となっている．ここで質点1が質点2に力を及ぼしている場合，そのベクトルの方向はそれぞれ逆になっている．従って， $F_{12} + F_{21} = 0$  である．よって  $\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0$  である．これから

$$p_1 + p_2 = C \quad (2.11)$$

が求まる．ここで  $C$  は定数ベクトルである．すなわち，2個の粒子の運動量の和は一定であることがわかる．

### 2.3.2 衝突における運動量保存

ここで衝突前後の運動量について考えてみよう．衝突 (collision) を考えるため，1の粒子の運動量を  $p_1$  として2の粒子の運動量を  $p_2$  としよう．この時，衝突の前後での運動量保存則は衝突後の運動量を  $p'_1, p'_2$  として  $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$  である．

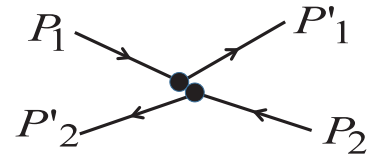


図 2.1: 衝突の運動量保存

ここで2の粒子は止まっていたとしよう．すなわち  $p_2 = 0$  と仮定する．この時，衝突前後のエネルギー保存は

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p'_1{}^2}{2m_1} + \frac{(p_1 - p'_1)^2}{2m_2} \quad (2.12)$$

となっている．これを解くと  $p'_1$  は  $p_1$  で表すことができる．

- 無限に重い物質との衝突：ここで簡単なために， $m_2$  の質量が無限に大きいとしよう．この時，式 (2.12) より  $p_1 = \pm p'_1$  となる．このうち  $p'_1 = -p_1$  の解のみが物理的に意味がある．すなわち，1の粒子は壁に衝突して同じ大きさの運動量を持って反対方向に跳ね返ってきたということである．

- 特殊相対論の場合：粒子の速度が光速  $c$  に近くなると，運動量保存式は変更されないがエネルギーの保存の式は少し変更を受ける．この時，式 (2.12) は  $\sqrt{(m_1c^2)^2 + p_1^2c^2} + m_2c^2 = \sqrt{(m_1c^2)^2 + p'_1{}^2c^2} + \sqrt{(m_2c^2)^2 + (p_1 - p'_1)^2c^2}$  となっている．これは非相対論の極限 ( $|p| \ll mc$ ) では式 (2.12) となる．

### 2.3.3 力積

力積 (impulse) という言葉が力学の教科書に出てくる．ニュートン方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.13)$$

であるが，これを変形すると  $\Delta\mathbf{p} = \Delta t \mathbf{F}$  となる．この右辺を力積と呼んでいて運動量の変化分に対応している．

- 一定の力  $F$ ：力  $F$  が一定の時，短い時間  $\delta t$  で式 (2.13) を積分すると

$$\int_0^{\delta t} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p}_{(t=\delta t)} - \mathbf{p}_{(t=0)} = \mathbf{p} = \delta t \mathbf{F} \quad (2.14)$$

となる．但し，最初，この質点は止まっていたと仮定したので  $p_{(t=0)} = 0$  である．また  $p_{(t=\delta t)} = p$  と置きなおしている．

- 粒子の初速度  $v_0$  : この質点の質量を  $m$  としよう．この質点に力  $F$  を加えると質点が動き始めるが，その初速度  $v_0$  は  $v_0 = \frac{p}{m} = \frac{\delta t F}{m}$  である．

## 2.4 力のモーメント

角運動量は  $L = r \times m\dot{r}$  で定義されている．今  $N$  個の質点系の角運動量を

$L = \sum_{i=1}^N r_i \times m\dot{r}_i$  で定義しよう．ここで  $\frac{dL}{dt}$  を計算してみよう．この時

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N r_i \times m\ddot{r}_i \quad (2.15)$$

となる．簡単のためにそれぞれの質点が  $m\ddot{r}_i = F_i$  というニュートン方程式に従っていると仮定しよう．これより  $\frac{dL}{dt}$  は

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N r_i \times F_i \quad (2.16)$$

となっている．式 (2.16) の右辺を  $N$  と定義して力のモーメントという． $N$  は

$N = \sum_{i=1}^N r_i \times F_i$  である．

- 静的な過程 : ここで系が力学的な運動はしていなく静的な場合 (static case), 明らかに  $\frac{dL}{dt} = 0$  である．従って，この時は力のモーメントは保存量となっている．すなわち

$$N = \sum_{i=1}^N r_i \times F_i = 0 \quad (2.17)$$

である．これは釣り合いを議論するときに良く使う方程式である．

### 2.4.1 釣り合い

最も簡単な例題として、天秤の釣り合いを議論しよう。今、支点を  $O$  としてこれを原点としよう。重さが無視できる 1 本の棒を  $x$  軸上に置き、支点  $O$  から負の方向の長さは  $l_1$ 、正の方向の長さ  $l_2$  としよう。また、 $y$  軸の正の方向が垂直上向きとしよう。この時、棒  $l_1$  の左端に質量  $M_1$ 、棒  $l_2$  の右端に質量  $M_2$  のおもりを置いたとしよう。この時、式 (2.17) を当てはめると

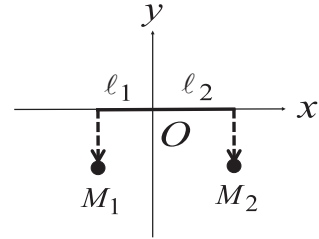


図 2.2: 釣り合い

$$(-l_1 \mathbf{e}_x) \times (-M_1 g \mathbf{e}_y) + l_2 \mathbf{e}_x \times (-M_2 g \mathbf{e}_y) = 0 \quad (2.18)$$

である。よって  $l_1 M_1 = l_2 M_2$  が釣り合いの条件となっている。

## 2.5 連続方程式

電磁気学や量子力学では重要な保存則になっているのが「電荷保存」の式である。これは連続方程式 (continuity equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.19)$$

と言う式で表されている。ここで  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電荷密度と電流密度である。量子力学ではこの  $\rho$  は密度そのものである。と言うよりも、実は電荷密度の方が、むしろ、質量の分布関数であると言った方が正しい。電荷という孤立した存在があるわけではなく、例えば、電子の密度そのものである。従って、式 (2.19) は粒子の流れに対する保存則を表している。

### 2.5.1 電荷保存

この電荷保存 (conservation of charge) の内容をもう少し詳しく見るため、式 (2.19) を半径  $a$  の球で積分して見よう。

$$\int_{r \leq a} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 r = - \int_{r \leq a} \nabla \cdot \mathbf{j} d^3 r = - \int_{r=a} j_n dS_n \quad (2.20)$$

ここで第2式から第3式への移行ではガウスの定理 (B.18) を使っている．今，体積  $V$  の中の総電荷を  $Q = \int_V \rho d^3r$  と定義すると連続方程式は

$\frac{dQ}{dt} = - \int_{r=a} j_n dS_n$  となる．この式の左辺は「単位時間あたりに電荷がどれだけ増えたか」を意味している．一方，この式の右辺はマイナス符号を除いて「球の表面から流れ出る電流を足したもの」である．法線方向の定義が球の表面から外向きであることからマイナス符号まで入れると，右辺の意味は「この球に流れ込む電流の総量」を意味している電荷の保存式そのものである．

## 2.6 時間反転と空間反転

時間  $t$  を  $-t$  にして，運動方程式がどう変化するかを見る場合がある．このことを時間反転 (time reversal) に対して運動方程式の不変性を検証すると言う言い方をしている．一方，空間反転 (parity transformation) の場合は  $r$  を  $-r$  とする変換である．この空間反転の事をパリティと言い，弱い相互作用のみがこのパリティ変換に対する不変性を持っていない．

### 2.6.1 時間反転

時間反転の演算に対してニュートン方程式は変わらない．これは

$$t \rightarrow -t \text{ に対して } m\ddot{r} = \mathbf{F} \rightarrow m(-)(-)\ddot{r} = m\ddot{r} = \mathbf{F} \quad (2.21)$$

となっていて不変である．このことはニュートン方程式が時間の2階微分である事と関係している．時間反転の作用に対しては量子力学の方程式 (シュレディンガー方程式) も不変であり，また電磁気学の基礎方程式であるマックスウェル方程式も不変である．

● 時間反転不変性を破る相互作用： 現在までのところ，時間反転不変性を破る力は見つかってはいない．もし，中性子の電気双極子モーメント (EDM) が有限の値で見つかったら，これは時間反転不変性を破ることになっている．しかしながら，これまで行われたどの実験においても，中性子の電気双極子モーメントが有限値で報告されたという話はまだない [5] ．



### 2.6.2 空間反転

空間反転の事をパリティと呼んでいる．演算として  $r \rightarrow -r$  とすることである．この時，ニュートン方程式は

$$r \rightarrow -r \text{ に対して } m\ddot{r} = F \rightarrow m(-)\ddot{r} = -F \quad (2.22)$$

となって不変である．力  $F$  はベクトルなのでパリティ変換で符号を変える．このことは，例えば重力の場合を見てみると  $F = -G\frac{Mm}{r^3}$  となっていて，確かにパリティ変換で符号を変えている事がわかる．ちなみに角運動量  $L$  はパリティ変換で符号を変えないため，これは擬ベクトルと呼ばれている．

- 空間反転を破る相互作用： ニュートン方程式も電磁気学のマックスウェル方程式もパリティ変換に対して保存する力である．また，原子力などを記述する強い相互作用 (strong interaction) もパリティは保存している．さらに重力相互作用 (gravitational interaction) もパリティ変換に対して保存する力である．ところが，崩壊などを記述する弱い相互作用 (weak interaction) はパリティを大きく破っている．従って，ニュートリノ関連の力は全てパリティを破る相互作用によって記述されている．この弱い相互作用のみが空間反転に対して不変ではないと言う事は確かな実験事実であるが，しかしそれが何故なのかと言う事は現在も良くわかっていないわけではない．

### 2.6.3 対称性の破れ

物理系にある対称性があるとそれに付随した保存則が存在している事が一般的に証明されている．例えば「系」が時間の平行移動  $t \rightarrow t + a$  に対する不変性を持っているとこの系にはエネルギー保存則が証明され，また空間の平行移動  $r \rightarrow r + a$  に対する不変性は運動量の保存を保証している．

- 対称性の自発的破れ： これらのいかなる対称性においても，その対称性が破れる場合にはその対称性を破る相互作用が必ず存在している．ある時期，場の理論のあるモデルが持っている対称性が自然に破れるという「自発的対称性の破れ」の理論が議論されたことがある．しかしこの現象が自然界で起こっている事実はなく，また現在では「理論モデルの対称性が自然に (自発的に) 破れることはない」と言う事が理論的にも証明されている [3, 4]．

## 2.7 第2章の演習問題

- 問1 運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$  からエネルギー保存則を導け.
- 問2 力  $F$  が中心力の時, すなわち  $F = f(r)\mathbf{r}$  の時, 角運動量  $L$  が保存することを示せ.
- 問3 光の運動量を  $k$  とする時, そのエネルギーは  $E = |k|c$  となっている. この光が静止している質量  $m$  の粒子と衝突してその粒子の運動量が  $p$  となったとしよう.
- (a) この時, 運動量保存則は  $k = p$  であることを示せ.
  - (b) エネルギー保存則はどう書かれるか? 但し粒子の相対論的なエネルギーは  $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$  である.
  - (c) このエネルギー保存則を充たす運動量は存在しない事を示せ.
- 問4 ニュートン方程式がパリティ変換  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  に対して不変であることを示せ.
- 問5 ニュートン方程式が時間反転  $t \rightarrow -t$  に対して不変であることを示せ.
- 問6 座標を表すベクトル  $\mathbf{r}$  はパリティ変換に対して符号を変えた. 角運動量  $L$  はどうなっているか?

## 第3章 重力場中の運動

地上におけるすべての物質は地球の重力 (gravity) による引力 (attractive force) を感じている。地上において重力ポテンシャルは一様重力と近似できており、そのポテンシャル中の運動は第1章で幾つかの例題を議論している。この章で取り扱う重力ポテンシャルは星と星の間に働く  $1/r$  の形のものであり、主に地球の運動 (公転) を議論することになる。実際、地球は太陽の強い重力により太陽の周りを楕円運動している。しかもその運動はほとんど平面運動となっている。何故、楕円で平面運動なのかと言う疑問には、ニュートン方程式を解くときちゃんと答える事ができる。この微分方程式の解き方はよく知られているが、この方程式の予言力は惑星運動を正確に記述できることである。力学の方程式は量子力学の方程式からその近似式として得られているが、しかしこの惑星の運動の記述は、ほとんど厳密なものと考えても充分である。誤差が生じるとしたらそれは相対論的な効果であり  $\sim 10^{-8}$  程度の大きさである。

### 3.1 ケプラー問題

力学で最も重要な問題はケプラー (Kepler) 問題である。ニュートン方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.1)$$

となる。一度、時間微分を外すため上式の両辺に  $\dot{\mathbf{r}}$  を掛ける。この時

$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$  となる。これは直ちに变形できて  $\frac{m}{2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GMm}{r}$  となり、これはすでに解けた形になっている。積分定数を  $E$  と置くと

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (3.2)$$

となる。この式は1個だが、もともと3個なのであと2個の式が必要である。

- 運動は平面： 中心力の場合、角運動量は保存している。従って、この  $L$

の方向を  $z$ -軸に選んでも一般性を失う事はない．このとき，運動は  $x-y$  平面になる．これは明らかで，運動を表す座標は  $r$  であるが

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

であるから運動は  $L$  と直交している．それはすなわち  $x-y$  平面となっている．角運動量  $L$  の方向は  $z$ -軸にとっているので，その大きさを  $\ell = |L|$  と置くと2次元極座標表示では  $\ell = |L| = L_z = mr^2\dot{\varphi}$  となっている．

• 2次元極座標でのエネルギー  $E$ ： ここで，2次元極座標表示では

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3.3)$$

となっている．その時間微分を実行すると

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (3.4)$$

である．この事よりエネルギー  $E$  の式は極座標で書けて

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (3.5)$$

となる．ここで， $\ell = mr^2\dot{\varphi}$  を用いれば

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (3.6)$$

と変形される．これは  $r$  に対する1階の微分方程式になっているが，この微分方程式の解法はすべて解析的に知られている．

### 3.1.1 軌道は楕円

地球が太陽の周りを回転しているが，その軌道 (orbit) は楕円である．以下にその楕円軌道を導出しよう．この問題では保存量としてエネルギー  $E$  と角運動量  $\ell$  がある．エネルギー  $E$  の式から  $\dot{r}$  そして角運動量の式から  $\dot{\varphi}$  を

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \quad (3.7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (3.8)$$

と求めよう．但し， $\alpha = GMm$  を導入した．この2式を辺々割り算すると

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad (3.9)$$

と求まる．さらにここで積分を簡単に解ける形にするために  $r = \frac{1}{s}$  の変数変換をする．この時，上式は

$$-d\varphi = \frac{\ell ds}{\sqrt{2m \left( E + \alpha s - \frac{\ell^2 s^2}{2m} \right)}} = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2} s - s^2}} \quad (3.10)$$

となる．ここでルートの中は  $s$  の2次関数だから，必ず因数分解した形に書き直す事が出来る．従って，上式は

$$-d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)}} \quad (3.11)$$

と書かれる． $s_1$  と  $s_2$  はルートの中をゼロとした時の根であり

$$s_1 = \frac{m\alpha}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}}$$

$$s_2 = \frac{m\alpha}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}}$$

で与えられる．この式 (3.11) の積分は積分変数を  $s$  から  $\chi$  へ

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \chi$$

と置き換えると直ちに出来てしまい，答えは  $\varphi_0 - \varphi = 2\chi$  である． $\chi$  を  $s$  に戻しさらに  $s$  を  $r$  に戻して，後は細かい係数を入れると

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.12)$$

となる．但し，積分定数  $\varphi_0$  を  $\varphi_0 = \pi$  とした．また  $A$  と  $\varepsilon$  は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad (3.13)$$

と与えられている．この事より， $E$  が負であれば  $\varepsilon < 1$  となるので，確かに軌道が楕円である事がわかる（ケプラーの第1法則）

## 3.1.2 面積速度一定

ケプラー問題には面積速度一定の法則がある。これは角運動量保存則そのものである。楕円における微小面積は  $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\phi$  と書けるので、面積速度は  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$  となる。ところが、 $\ell = mr^2\dot{\phi}$  であるから

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m} \quad (3.14)$$

となり、「面積速度一定」が導かれる。  
(ケプラーの第2法則)

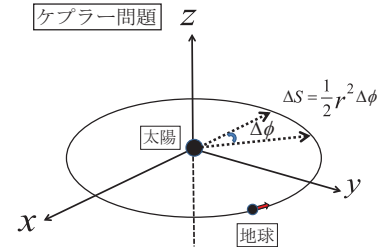


図 3.1: ケプラー問題

## 3.1.3 周期の2乗が長半径の3乗に比例

ケプラー問題には周期の2乗が長半径の3乗に比例するという法則がある。ここで楕円は  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  で表され、 $a$  が楕円の長半径、 $b$  が短半径である。式 (3.12) の焦点は  $x-y$  座標の原点ではないので平面幾何を解く必要がある

$$a = \frac{A}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (3.15)$$

与えられる事がわかる。面積速度の式を全体で一周するとこれが周期  $T$  に対応するので  $S = \frac{\ell}{2m}T$  が求められる。楕円の面積  $S$  は  $S = \pi ab$  なので

$$S = \pi ab = \frac{\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi \sqrt{A} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\ell}{2m}T \quad (3.16)$$

となり、 $T^2 \propto a^3$  となっている (ケプラーの第3法則)

• 直接積分による周期： この式 (3.16) は積分を直接行っても当然求められる。それは  $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$  を周期  $T$  に渡って積分すれば得られる。すなわち

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\phi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \phi)^2} d\phi \quad (3.17)$$

を計算すればよい．この積分は積分公式を参照すると

$$\frac{\ell}{m}T = \frac{2\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.18)$$

となり，幾何学的に求めた結果と一致している．

## 3.2 潮汐力

潮汐力 (tidal force) について簡単に解説しておこう．潮汐力とは月と太陽が地球に及ぼす力であるが，これは地球が有限の大きさを持っている事と関係している．まず月による潮汐力の影響を議論しよう．月と地球の間の重力の力は

$$F_x = -\frac{GmM}{(R+x)^2} \quad (3.19)$$

で与えられている． $R$  は月と地球の距離である．

ここで月の重心座標を  $x$  軸上 ( $-R$ ) の所に置こう．地球の中心を原点に置き，従って  $x$  は地球の中心から表面までの距離 (地球の半径) に対応している． $x \ll R$  なので展開すると

$$F_x \simeq -mg + \frac{2GmM}{R^3}x \quad (3.20)$$

となり，この式は潮汐力が1日に2回働く事を示している．

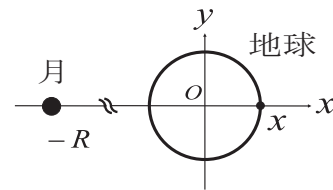


図 3.2: 潮汐力

- $x > 0$  の時： これは地球表面で月からは遠方側にある場所を意味している．この場合，力は斥力となっている．従って，例えば海水は地球の外側に引っ張られる力を受けている．よって海水が外側に少し膨らむ事を意味している．

- $x < 0$  の時： この場合は地球表面で月に近い方の場所を意味している．この場合，力は引力となっている．従って，例えば海水は月側，すなわち，地球の外側に引っ張られる力を受けている．この場合も海水が外側に少し膨らむ事を意味している．地球の自転の間，月はほとんど同じ場所にいると仮定してもそれ程悪い近似ではないので，潮汐は1日に2回起こる事を示している．これは実際，観測されている事実と一致している．

● 太陽の影響： 太陽による潮汐力も地球に働いている．その大きさを評価しよう．太陽質量は  $M_s = 1.99 \times 10^{30}$  kg, 月の質量は  $M_m = 7.3 \times 10^{22}$  kg である．また, 太陽と地球の距離は  $R_{se} = 1.5 \times 10^{11}$  m, 月と地球の距離は  $R_{me} = 3.8 \times 10^8$  m である．よって, 式 (3.20) より太陽による潮汐力を月の潮汐力と比較するとその比  $\eta$  は

$$\eta = \frac{\frac{2GmM_s}{R_{se}^3}}{\frac{2GmM_m}{R_{me}^3}} = \frac{1.99 \times 10^{30}}{7.3 \times 10^{22}} \left( \frac{3.8 \times 10^8}{1.5 \times 10^{11}} \right)^3 \simeq 0.47 \quad (3.21)$$

となり, 月の約半分程度である．このため, 太陽と月が同じ方向で一直線にそろえば潮汐力が大きくなる．これが大潮と関係している．月の公転周期が 27 日程あるため, 太陽と月が一直線になるのは 1 か月に約 2 回である．従って大潮がひと月に約 2 回ある事が理解できる．一方, 月が太陽の方向とは直角方向にある場合, 小潮に関係している．これが単純化した海水の力学である．

### 3.3 太陽模型

太陽を構成している粒子は主に陽子 (proton) である．それ以外にも D, He, C, N, O などの原子が相当数の割合で存在している事がわかっている．これらの粒子は自分自身による重力により太陽を形成している．太陽内部では核融合が起こっていて, これが太陽の輻射エネルギー源となっている．ここでは非常に単純化された太陽模型により, 太陽内部の温度を計算してみよう．

#### 3.3.1 太陽の単純化模型

星の単純化した模型として球形の気体を考える．また密度  $\rho_0$  は一様とし, 各点で理想気体の状態方程式が成立するものとする．すなわち

$$P(r) = \frac{\rho_0}{\mu} kT(r) \quad (3.22)$$

$k$  は気体定数,  $\mu$  は太陽大気分子量である．この場合, 圧力  $P(r)$  と温度  $T(r)$  は球対称性を仮定しているので, 座標  $r$  のみの関数となっている．

● 太陽内部の重力場： この時, 圧力と重力の釣合を考えよう．太陽内部では物質密度が一定であると仮定している．このため太陽内部の重力場は

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R \\ -\frac{GM}{r}, & r > R \end{cases} \quad (3.23)$$



となっている．ここで  $R$  は太陽半径である．

● 圧力と重力の釣合： 太陽内部で中心から  $r$  の点における小さな円筒を考えよう．この円筒の面積を  $S$  としてその長さを  $dr$  とする．この円筒に働く重力は引力であり，これと大気圧と輻射圧による力が釣り合っている．ここでは輻射圧は無視しているが，これを考慮することが難しいからである．

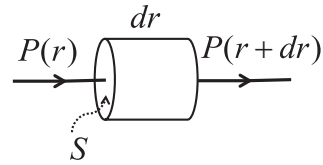


図 3.3: 圧力と重力の釣合

太陽内部の重力の式 (3.23) を用いて運動方程式は

$$S\{P(r+dr) - P(r)\} = -(\rho_0 S dr) \frac{GM}{R^3} r \quad (3.24)$$

と書かれる．従って次式が示される．

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM\rho_0}{R^3} r \quad (3.25)$$

この場合，分子運動による圧力の方向は外側を向いているが，これは分子運動が必ず，拡散する方向になっているからである．月のように重力が弱いと大気は拡散してしまい，存在していない．

● 太陽の中心温度： 式 (3.22), (3.25) より，温度  $T$  に対する方程式は

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\mu GM}{kR^3} r \quad (3.26)$$

となる．これはすぐに解けて

$$T(r) = T_0 - \frac{\mu GM}{2kR^3} r^2 \quad (3.27)$$

と求まる．但し， $T_0$  は中心温度である．また表面温度は約 6000K と仮定する．この時， $r = R$  で  $T(R) \simeq 6000 \text{ K}$  なので  $T_0$  は

$$T_0 \simeq 1.15 \times 10^7 \text{ K} \quad (3.28)$$

と求まる．ここで  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ J} \cdot \text{m}/\text{kg}^2$ ， $k = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}/\text{K}$ ， $\mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{kg}$ ， $M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ， $R = 7 \times 10^8 \text{ m}$  を用いている．

### 3.4 銀河の衝突

銀河間の衝突力学は重力ポテンシャル中の運動であり，しかもそれが1次元運動であるという特殊な問題になっている．ここではアンドロメダと天の川銀河 (Milky Way) の衝突が起こる時期を計算しよう．この衝突の場合，質量がそれ程変わらない物体間の衝突となっている．このため，まずは2体問題として扱う必要があり，重心 (center of mass) と相対運動 (relative motion) に分離する事から始める必要がある．

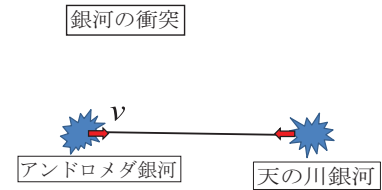


図 3.4: 銀河の衝突

#### 3.4.1 2体系のエネルギー

質量  $m_1$ ,  $m_2$  の2個の質点のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 \quad (3.29)$$

である．これを換算質量 (reduced mass)  $m$  と全質量 (total mass)  $M$

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2 \quad (3.30)$$

および相対座標 ( $\mathbf{r}$ ) と重心座標 ( $\mathbf{R}$ )

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.31)$$

を用いて書き直すと  $E = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$  となる．重力ポテンシャルは  $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$  なのでこの系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (3.32)$$

となる．これより相対座標に対する運動方程式は  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  より

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.33)$$

と書ける．ここで  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L$  として定義している．また，重心は自由運動である．この式 (3.33) を  $m$  で割ると  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$  となる．

### 3.4.2 銀河の衝突力学

ニュートン方程式は  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2} \mathbf{e}_r$  であるが衝突は1次元なので

$$\ddot{x} = -\frac{G(M+m)}{x^2} \quad (3.34)$$

と書ける．ここで  $M, m$  はそれぞれの銀河の質量， $r$  は2個の銀河間の相対距離である．ここで  $M+m$  が現れたのは，2個の銀河の質量が近いので換算質量を導入したからである．この式のエネルギー積分を行うと

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{G(M+m)}{x} = \varepsilon \quad (3.35)$$

となり， $\varepsilon$  はエネルギーに関係した積分定数である．衝突するまでの時間  $T$  は

$$T = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon + \frac{2G(M+m)}{x}}}$$

となる．この積分は  $x = \left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right) \sin^2 \theta$  と置くと簡単に解けて

$$T = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}} \left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right) \left\{ (\theta_0 - \theta_1) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_1) \right\} \quad (3.36)$$

と求まる．但し， $\varepsilon$  は負である．現在，アンドロメダは天の川銀河に  $1.2 \times 10^5$  m/s の速さで近づいている．よって初期条件として  $t=0$  で  $v_0 = 1.2 \times 10^5$  m/s を取る．さらに銀河間の距離  $L$  が  $L \simeq 2.5 \times 10^6$  光年であり，また銀河のサイズが約  $1.2 \times 10^5$  光年なので

$$\begin{aligned} \sqrt{-2\varepsilon} &= 1.4 v_0 \\ -\frac{G(M+m)}{\varepsilon} &= 3.8 \times 10^6 \text{ 光年} \end{aligned}$$

が求まる．ここで銀河の質量として  $M \simeq m \simeq 4 \times 10^{42}$  kg とした．これより  $x_0 = 2.5 \times 10^6$  光年と  $x_1 = 1.2 \times 10^5$  光年が求まり，従って  $\theta_0 = 0.94$ ， $\theta_1 = 0.18$

である．これらの値を式 (3.36) に代入すると計算結果は  $T \simeq 30$  億年 となっている．よって約 30 億年後には二つの銀河は融合し始める事になる．

● 重力圏の突入時期： 2 個の銀河が互いの重力圏に突入した時期を評価してみよう．「何か」が起こった時期の計算は上の計算と同じで初期条件のみ変えれば良い．重力圏に入り始めた距離を  $R$  とすると  $R = 1.5x_0$  となるので， $\theta_R = \frac{\pi}{2}$  となっている．その結果， $T \simeq 69$  億年である事がわかり，これは今から  $\boxed{\text{約 } 69 \text{ 億年前}}$  に「何か」が起こった事に対応している．

### 3.5 重力場と一般相対論

この節では重力場と一般相対論 (general relativity) を解説している．このため「物理的な考え方」が少し難しくなっているかも知れない「場」と言う概念を力学では教えないが，重力場中での質点の運動については第 1 章で扱っている．その意味では場の概念はすでに出ているが，しかし重力場に対する方程式は何かと言う問い掛けは力学にはない．一般相対論の方程式も場の理論ではなく，むしろ古典力学的な考えに近い．長い間，人々は「一般相対論は重力の理論である」と信じてきたが，しかし一般相対論を重力理論と結びつける事は，実は不可能である．ここでは一般相対論の問題点を簡潔に説明しよう．

#### 3.5.1 重力場

「重力場」(gravitational field) という概念を最初に説明しよう．「何故，場なのか？」であるが，それはどの場所でも必ず力を受ける事と関係している．まず，地球上での重力をみてみよう．地球の中心 (重心) から地上にいる観測者までの距離を  $r$  とすると，地球上での重力場  $\phi_g(r)$  は  $\boxed{\phi_g(r) = -\frac{GM}{r}}$  と書かれている．ここで  $M$  は地球の質量を表している．この重力場  $\phi_g(r)$  とは地球が生み出している重力ポテンシャルである．地上の観測者 (質量を  $m$ ) は地球からポテンシャル  $U(r) = m\phi_g(r) = -\frac{GmM}{r}$  を感じている．この場合，両者間には力が働き，その力は  $F = -\nabla U(r) = -\frac{GmM}{r^2}e_r$  となっている．地上で力の方向を鉛直上向き ( $z$ -軸方向) にとると力  $F$  は

$$F = -\frac{GmM}{(R+z)^2} \simeq -mg \quad (3.37)$$

と書くことができる．ここで  $R$  は地球の半径であり， $z$  は地表から測った距離である．また  $g = \frac{GM}{R^2}$  は重力加速度である．この力は常に引力である．

### 3.5.2 慣性質量と重力質量

ここで質量について簡単に解説しよう．地球も人もその質量の起源は原子（電子，陽子，中性子の集合体）であり，それが質量の起源であることは間違いない．しかし歴史的には「物の質量」として具体的に測定されている．

- 慣性質量： ニュートン方程式  $m\ddot{r} = F$  の質量  $m$  の事を慣性質量 (inertial mass) と呼んでいる．これは実際に粒子の運動から測定されたものである．

- 重力質量： 質量  $m$  の質点と地球質量  $M$  の間には  $F = -\frac{GmM}{r^2}$  の強さの引力が働き，これが重力である．但し，距離  $r$  は地球中心と質点との距離である．この質量  $m$  の事を重力質量 (gravitational mass) と呼ぶ．重力質量と慣性質量が同じであると言う実験事実は非常に重要であり，この事は新しい重力理論によって初めて理解されている [3, 4] ．

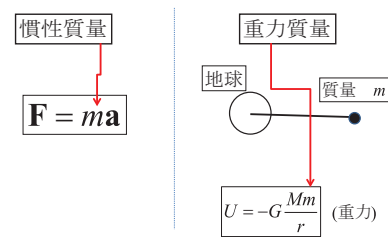


図 3.5: 慣性質量と重力質量

### 3.5.3 重力相互作用の強さ

重力相互作用は非常に弱い事が実験的に知られている．しかしながら，星達を形成する力は重力である．何故，重力がある段階では強くなってくるのだろうか？この疑問に答えるためには二つの事実を知っておく必要がある．

- 重ね合わせの原理： 一つ目として「重ね合わせの原理」(superposition principle) がある．質量を持つ粒子が集まるとその間に重力が働くが，その重力の強さは集まった粒子の質量の和に比例するという事実があり，これは重ね合わせの原理から示されている．この重ね合わせの原理は重力に限らずより一般的であるが，実際，物理学におけるすべての基本方程式が線形方程式であるということからこの原理は導出されている．特に重力においてはその力が常に

引力であるため、沢山の粒子が集まって星のような大質量の集合体の形成が可能である。また星と星の間にも強い重力が働くことになり、従ってより大きな星が作られて行き、さらには星達が集まって銀河系を形成している。

- 遠距離力： 二つ目として「重力相互作用は遠距離力」(long range force) であると言う事実がある。このため遠くにある星達にも影響が及んでいる。これらの理由により、重力相互作用は非常に弱いにもかかわらず、結局は宇宙の広範囲の星に力が及び、銀河を形成する最も重要な力となっている。

### 3.5.4 重力場のポアソン型方程式

重力場  $\phi_g$  は重力場のポアソン型の方程式の解として求められる。この重力場のポアソン型の方程式は重力理論における場の方程式から求められ

$$\nabla^2 \phi_g(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}) = 4\pi GM \delta(\mathbf{r}) \quad (3.38)$$

である。 $\rho(\mathbf{r})$  は質量の分布関数で、ここでは質量  $M$  の質点が原点にあると仮定した。この式は電磁気学におけるポアソン方程式 [(6.9) 式参照] とそっくりであるが、この右辺の符号が電磁気学とは逆になっている。このため、この方程式の解は  $\phi_g = -\frac{GM}{r}$  であり、重力では常に引力となっている。

### 3.5.5 一般相対論

一般相対論を初年次生向けの物理学の教科書に入れる事は無謀だと思われるかも知れない。実は、アインシュタイン (Einstein) 方程式は「座標系に対する方程式」であり、その物理的な意味合いが良くわからない理論である。この理論が自然界とどうかかわっているのかを理解しておく必要がある。

- ローレンツ不変な微小距離の 2 乗： ここではアインシュタイン方程式の本質は保ちながら、最も単純化された空間 1 次元でのアインシュタイン方程式を考案して一般相対論とは何なのかについて解説しよう。今、微小距離 2 乗を  $(dx)^2$  としてローレンツ不変な微小距離を  $(ds)^2$  としよう。今の場合  $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2$  である。これを「一般化」して

$$(ds)^2 = g_0(x)(cdt)^2 - g_1(t)(dx)^2 \quad (3.39)$$

と書き換えよう。 $g_0(x)$ ,  $g_1(t)$  は計量 (テンソル) と呼ばれている。もとの式と比べてみれば明らかに  $g_0(x) = 1$ ,  $g_1(t) = 1$  である。アインシュタインはこ

の計量  $g_0(x)$ ,  $g_1(t)$  が 1 からずれるとして, さらに一般化してこれらが時間と空間に依存すると仮定して方程式を構築したのである.

- 注意書き: 一般化が常に正当化されるとは限らない. 計量テンソルの一般化は最も重要な相対論的不変性を破っているため深刻な問題となっている.

### 3.5.6 超・簡単化されたアインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式とはこの計量  $g_0(x)$ ,  $g_1(t)$  に対する 2 回の微分方程式のことである. このうちで  $g_0(x)$  に対する方程式を

$$\frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} = 2G \varrho_0(x) \quad (3.40)$$

と書こう. これは超簡単化された方程式ではあるが, その基本構造は 4 次元のアインシュタイン方程式と同じである.  $\varrho_0(x)$  は質量  $M$  の物質により生じた物理的な作用である. これは 4 次元のアインシュタイン方程式ではエネルギー・運動量テンソルに対応していて, 基本的には星の質量分布である.

- 質量分布記述の座標系: ここで問題なのは  $\varrho_0(x)$  を記述する座標系は古い座標系と考えられるが, これはどこで設定されたのであろうか? 質量分布があると座標系の計量が変化を受けるとしても, それと  $\varrho_0(x)$  を記述する座標系との関係が良くわからない. これは因果律を破っている可能性がある.

### 3.5.7 一般相対論と重力理論の関係

一般相対論がこれまで信じられてきた主な理由はアインシュタイン方程式から重力場のポアソン型方程式 (3.38) が導出されると考えられていたからである. ところがこの導出を証明することは実は不可能である. その証明には物理的に正当化できない方程式が仮定されているからである. その式とは

$$g_0(x) \simeq 1 + 2\phi_g \quad (3.41)$$

である. こうすると確かに, 1 次元の重力ポアソン型方程式 (3.38) が導出されることが簡単に確かめられる. これは 3 次元重力場でも同じである.

- 力学変数と座標系: ところが, この仮定の式 (3.41) は物理的に無意味である事がすぐにわかる. それは, 計量テンソルは座標系であるのに対して, 重力場  $\phi_g$  は無次元ではあるが, 力学変数である事に依っている. これは異なる

カテゴリーを足し算しているため、どのように頑張っても物理学の式として承認することには無理がある。繰り返すが  $g^{00}(x)$  の右辺の 1 は座標系の単なる数字であり、 $\phi_g$  は力学変数である。この  $\phi_g$  は運動方程式の解であり、その解が座標系に現れる事は物理的に許される事ではない。しかしこの式を認めたため、一般相対論が重力理論であると人々は思い込んできたことは事実である。

- アインシュタイン方程式の矛盾点： 超簡単化されたアインシュタイン方程式 (3.40) の右辺における密度関数  $\rho_0(x)$  がどのように計算されるかと言う問題を検討して見よう。密度関数は星の分布関数に対応しているので、これは重力場のニュートン方程式を解くことにより求めることができる。すなわち、星の分布関数を計算するためには重力場  $\phi_g$  の下における星達の多体系の運動方程式を解けばよい。従って、この解として求められた密度関数  $\rho_0(x)$  を右辺としているアインシュタイン方程式の解  $g_0(x)$  が重力場  $\phi_g$  に関係付けられることは、勿論、あり得ない事である。

- 重力理論の今後： 上記に見たように、一般相対論が重力理論と無関係であることが証明されている。それでは今後、重力理論はどのようなのであろうか？この疑問に対しては、幸い新しい重力理論が提案されており、これまでの重力関係のすべての観測結果はこの新しい重力理論により矛盾なく説明されることがわかっている。とくに慣性質量と重力質量の等価性が自然な形で証明された事実が重要である [4]。



### 3.6 第3章の演習問題

問1. 中心力の場合，角運動量は保存量であった．この時，運動  $r$  は平面運動になる事を示せ．

問2. 重力ポテンシャルにおけるニュートン方程式からその運動の軌道を決める方程式

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m \left( E + \frac{GMm}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}$$

を導出せよ．

問3. 同じ質量  $m$  をもつ2体系の運動エネルギー  $E = \frac{1}{2}m\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_2^2$  を相対座標 ( $r$ ) と重心座標 ( $R$ ) で書き直せ．

問4. 太陽風とは太陽から放出される水素原子のことである．太陽風の地球軌道での平均密度を  $10$  個/cm<sup>3</sup>，速度を  $500$  km/sec とする． $50$  億年の間この割合で放出したら太陽質量は何%減少するかを求めよ．

問5. 慣性質量と換算質量について説明せよ．

問6.  $g_1$  に対する簡単化されたアインシュタイン方程式を

$$\frac{d^2 g_1(t)}{dx^2} = G\varrho_1 \quad (3.42)$$

としよう．但し  $G$  は重力定数である．また  $\varrho_1$  は正の定数と仮定する．

(a) この時，式 (3.42) の解は

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\varrho_1 t^2 + 1 \quad (3.43)$$

となる事を示せ．但し  $g_1(0) = 1$ ， $\frac{dg_1(0)}{dx} = 0$  である ..

(b)  $g_1(t)$  は時間とともに増大している．これはシュワルツシルト解 (Schwarzschild) に似ているが物理的には何を意味していると思うか？

(c) この解が相対論と矛盾しないかどうか検討せよ．

## 第4章 工学系の基礎力学

力学が工学系と理学系で異なっていると言う事は勿論、ない。しかし工学における力学はロボットの歩行やボールの回転や金属のひずみと言った問題を主に取扱っている。これらは剛体の問題であり、質点の運動ではない。このような「塊」に対する基礎方程式は勿論、ニュートン方程式ではあるが、しかしその方程式から導かれた運動力学は質点とは大きく異なっている。

それでは、現実の世界における「何かの塊」の運動はどのように記述されるのであろうか？例えば、テニスボールは表面にだけ物質がある球状の物体であり、質点とはおよそ異なっている。前章までの質点の力学ではこのテニスボールの運動はその重心座標の方程式により記述されている。しかしながら、現実にはこのテニスボールは自転によるスピンのエネルギーが大きな役割を果たしているので剛体としての運動が非常に重要になっている。

力学ではこれらの物体を「剛体」(rigid body)として扱っている。その場合、剛体の定義は単純に言って、硬いのでバラバラにはならないと言う仮定である。また、固体(特に金属物質)における微小変形の問題は運動力学ではないが、非常に重要である。ここでは応力の問題も含めて解説して行こう。この場合、扱っているのは基本的な変形(線形変形)であり、現象としては単純ではあるがそれで十分であると考えている。

### 4.1 剛体の回転運動

まずは剛体について解説しよう。日常の物理学で関係してくる質点以外の力学は基本的には剛体の運動と流体の運動である。ところが、流体力学に関しては明確な理論体系が存在しているとは言えず、もう少し簡単明瞭な理論体系ができない限り、学部生への解説には無理がある。従って、ここでは流体力学の解説は行わないで、剛体の運動のみ議論しよう。

### 4.1.1 剛体の運動エネルギー

剛体の記述方法は良く知られており，剛体をまず小さなつづつに分ける事から始める．その  $n$  番目のつづつづの質量を  $m_n$ ，座標を  $r_n$  としよう．こうすると，この剛体の運動エネルギー  $T_{RB}$  は

$$T_{RB} = \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{r}_n^2 \quad (4.1)$$

と書ける．

ここで  $n$  の和は剛体全体に渡って行われる事としている．ここでこの剛体の運動エネルギーをその剛体と一緒に回転している回転系で書き直してみよう．回転系への変換については付録で議論している．質量  $m$  の質点の静止系での運動エネルギー  $T = \frac{1}{2} m \dot{R}^2$  は回転系での座標  $r$  により式 (B.10) で与えられている．すなわち，

$$T = \frac{1}{2} m \dot{R}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$$

である．ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は回転座標系の回転角速度である．従って，剛体と一緒に回転している座標系では，式 (4.1) は

$$T_{RB} = \sum_n \frac{1}{2} m_n (\dot{r}_n + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \quad (4.2)$$

となる．ここで剛体の重心 ( $R_G$ ) を座標系の原点に選ぶと

$$\mathbf{R}_G = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = 0 \quad (4.3)$$

となっている．さらに，剛体に乗っている系なので剛体は静止している．従って  $\dot{r}_n = \mathbf{v}$  は同じであり剛体の重心の速度である．よって式 (4.2) は

$$T_{RB} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + \sum_n \frac{1}{2} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 \quad (4.4)$$

となる． $M = \sum_n m_n$  は剛体の全質量である．第1項は剛体全体の並進運動のエネルギーであり，第2項が剛体の回転エネルギーに対応している．

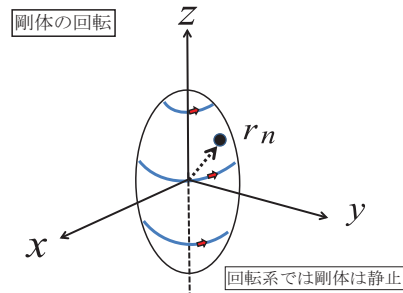


図 4.1: 剛体

## 4.1.2 剛体の回転エネルギー

第2項の剛体の回転エネルギーを  $T_R$  としよう．これはまだ，つづつづの言葉で表現しているが，これを連続極限を取った形式で書いておこう．

- 連続極限： ここで  $m_n$  は密度分布に関係しているので，連続極限は  $\sum_n m_n \rightarrow \int \rho(\mathbf{r}) d^3r$  となる．この場合，回転エネルギーは

$$T_R = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 d^3r \quad (4.5)$$

となる．さらに恒等式  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \boldsymbol{\omega}^2 r^2 (1 - \cos^2 \theta) = \boldsymbol{\omega}^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2$  を用いて式 (4.5) を書き直して行こう．ここで表現を簡単にするため

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

という表記を導入しよう．この時，式 (4.5) はちょっとした計算で

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] d^3r \quad (4.6)$$

となる事がすぐにわかる．

- 慣性モーメント  $I_{ij}$ ： 慣性モーメント (moment of inertia)  $I_{ij}$  を

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] d^3r \quad (4.7)$$

で定義しよう．この慣性モーメントは単なる定数であり，運動力学は  $\boldsymbol{\omega}$  によって担われている．これは当然で，我々は剛体と一緒に回転している回転系に移っているからである．従って，剛体の力学変数は座標系を回転したその回転の角速度  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  によって記述されている．

- 慣性モーメントの物理的意味： 結局，回転のエネルギーは

$$T_R = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (4.8)$$

となっている．慣性モーメント  $I_{ij}$  は対称行列であり，このためこの行列は必ず対角化することができる．すなわち， $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$  と書ける．この証明は付録の式 (A.33) で紹介されている．従って適当なベースを選ぶと式 (4.8) は

$$T_R = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (4.9)$$

と書く事ができる．この式をじっと眺めてみるとわかるように，慣性モーメントは回転しているときの「回転質量」のようなものである．

### 4.1.3 慣性モーメントの例題

慣性モーメントを具体的に計算してみよう．慣性モーメントはどの回りの慣性モーメントであるかを最初に特定しておく必要がある．一般的には重心の回りの慣性モーメントの計算が良く行われている．

- 質量  $M$ 、半径  $R$  の一様球の慣性モーメント： この球の重心(中心)の回りの慣性モーメントを計算しよう．この場合，明らかに  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$  である．よってこの球の密度を  $\rho_0$  とすると  $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$  なので

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{1}{3} \int \rho_0 [y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2] d^3r \\ &= \frac{2}{3} \int \rho_0 r^2 d^3r = \frac{8\pi}{3} \rho_0 \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

となっている．この結果は覚えておいても損はしないものと思う．

- 質量  $M$ 、半径  $R$  の球表面分布の慣性モーメント： テニスボールの重心の回りの慣性モーメントを計算しよう．この場合，明らかに  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$  である．よってこの球表面の面密度を  $\sigma$  とすると  $M = 4\pi\sigma R^2$  なので

$$I = \frac{2}{3} \int \sigma \delta(r - R) r^2 d^3r = \frac{8\pi}{3} \sigma \int_0^R \delta(r - R) r^4 dr = \frac{2}{3} MR^2 \quad (4.11)$$

となっている．これより，同じ質量の場合，一様球(野球のボール)よりもテニスのボールの方が約 1.7 倍だけ回転質量が大きい事がわかり，テニスではスピニングが重要な役割を果たしている事が理解できる．

- 質量  $M$  長さ  $\ell$  の棒の慣性モーメント： 質量  $M$ 、長さ  $\ell$  の棒の一端を原点において  $z$  軸に沿っておいた場合の棒の慣性モーメントを計算しよう．この場合， $z$  軸回りの慣性モーメントはゼロとなっている．これは棒の太さを無視した場合の事であるが，充分と良い近似である．次に  $x$  軸の回りの慣性モーメントを計算しよう．棒の線密度を  $\lambda$  とすると  $M = \lambda\ell$  である．この時

$$I = \lambda \int_0^\ell z^2 dz = \frac{1}{3} \lambda \ell^3 = \frac{1}{3} M \ell^2 \quad (4.12)$$

となっている．これも覚えておいて損はしないと思う．ここでコメントであるが，この棒の慣性モーメントはその重心の回りで計算すると  $I_G = \frac{1}{12} M \ell^2$  であることに注意しよう．

## 4.2 剛体の運動

コマの回転や地球の自転を扱うためには、剛体に対する運動方程式を立てる必要がある。この運動方程式はラグランジェ方程式を用いるのが便利である。しかしこの節は専門家にとってさえも難しい数学が含まれているので、参考のために読むか、または読み飛ばしても良いと思う。

### 4.2.1 オイラー方程式

剛体の回転エネルギー  $T_R$  は式 (4.9) により与えられている。ここで回転軸を  $x_1, x_2, x_3$  としてその回りの回転として考えて行こう。ラグランジアンは  $L = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$  と書けている。ところが、この  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は独立変数になっていないため、この変数からラグランジェ方程式を求める事はできない。

それで独立変数であるオイラー角を用いる必要がある。しかしながらこのオイラー角による計算は相当に面倒で複雑である。またこれは物理の本質とは直接の関係はないのでここではオイラー角の解説は省き、その結果だけを書くことにしよう。 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  をオイラー角  $\theta, \varphi, \psi$  で表すと

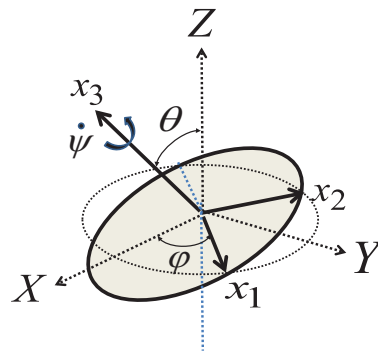


図 4.2: オイラー角

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \quad (4.13)$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \quad (4.14)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (4.15)$$

となっている。この場合、 $\dot{\psi}$  は  $x_3$  軸回りの回転角速度である。その  $x_3$  軸は静止座標系の  $Z$  軸から角度  $\theta$  ずれていて、極座標表現の  $\theta$  と同じである。 $\varphi$  は回転している剛体が全体として回転している歳差運動を記述する角度を表している。この時、ラグランジアン  $L$  は

$$L = \frac{1}{2} \left[ I_1 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + I_2 (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

なので  $\psi$  に対するラグランジェ方程式  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$  を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= I_1 \omega_1(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) - I_2 \omega_2(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \\ &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

となる．ここで， $-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi = \omega_2$ ， $\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = \omega_1$  を用いている．よって

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \quad (4.16)$$

が求まる．さらに，ラグランジアン  $L$  は 1,2,3 のインデックスに対してサイクリックな対称性を持っているので，その運動方程式もサイクリックな対称性があることがわかっている．従って

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad (4.17)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad (4.18)$$

が求まる．この3つの方程式がオイラー (Euler) 方程式である．

#### 4.2.2 地球の自転軸の歳差運動

地球を剛体として考えると  $I_1 = I_2$  としてよいので，式 (4.16) より  $\omega_3$  は定数となる．ここでこれを  $\omega_0$  と置く．これは地球の自転 (rotation of the earth) の角速度であり，よって自転の周期は  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  (24 時間) である．今， $\Omega \equiv \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \omega_0$  と定義すると式 (4.17-4.18) の微分方程式が直ちに解けてしまい

$$\omega_1 = A \sin \Omega t, \quad \omega_2 = A \cos \Omega t \quad (4.19)$$

となっている．ここで地球の慣性モーメント  $I_1, I_3$  の観測値を代入すると，地球自転軸の歳差運動の周期  $T$  は  $T \simeq 305 T_0$  となっている．これは地球自転軸が約 300 日で1周していることを示している．ちなみに現在の観測値は約 440 日と考えられている．

### 4.3 金属物質の変形：静的な変位

ある種の金属物質は力が加えられるとその形をほんの少しだけ変形する。加えられた外力とその変形具合を調べることはそれ程簡単な事ではないが、それはこの変形自体が物資に依存しているためである。ここでは、基本的な事だけ議論しよう。特に、微小変形の場合、その取扱いはそれ程難しくはないし、変形の本質を理解するためにはこの線形変形で充分である。

#### 4.3.1 応力

材料力学では力  $F$  を金属物質に加えた時、力で議論することはなく、応力 (stress) で問題を解く事になる。応力とは「単位面積あたりの力」である。従って、これは圧力と基本的には同じである。何故、応力を考えるかと言う問題は直感的には明らかであろう。物質の性質を考える場合、その物質全体に加えられた力が問題とはならず、単位面積あたりの力が関係してくるからである。

● 圧力と応力： それでは応力と圧力はどう違うのであろうか？これは難しい質問であらうが、一般的には圧力は大気などが容器の面に衝突して起こるような、割合、広範囲における力を扱う場合が多い。この場合、力自体が物理的な対象とはなり難く、どうしても「単位面積あたりの力」を考える必要がある。一方、金属面に力を加えた時、その物質が変形するのであるが、この場合やはり単位面積あたりの力が重要になる。そしてこれが応力である。

#### 4.3.2 ひずみ

金属材料 (metal material) に応力を加えるとその物質はひずむことになる。この場合、まずは1次元で考えてみる事が大切である。3次元で考える必要性は物質の異方性が重要になる場合である。しかしここでは単純化してひずみ (strain) の本質を理解する事が重要である。今、直方体の物質を引っ張る事にしよう。この時、引っ張る力 (単位面積当たり) を応力  $\sigma$  とし、また「ひずみ」を  $\varepsilon$  としよう。この時、ひずみが小さい範囲では

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.20)$$

が成り立ち  $E$  をヤング率と呼ぶ。この式はひずみが充分小さい場合に限られている。また、このヤング率  $E$  は金属材料の種類に強く依存している。



●ヤング率：それぞれの物質のヤング率を示しておこう。これらのデータは理科年表から持っている。理科年表は物理屋に取って必携であるが、学部生に取っても非常に有用であると思う [6]。

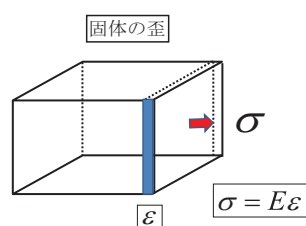


図 4.3: 固体のひずみ

表 1. ヤング率 (応力の単位は Pa  $\equiv$  Nm<sup>-2</sup>)

物質	$E/\text{Pa}$	物質 (針金)	$E/\text{Pa}$	物質	$E/\text{Pa}$
亜鉛	10.84	アルミニウム	7.03	ナイロン	0.12 ~ 0.29
鉄 (軟)	21.14	木材	1.3	ポリエチレン	0.04 ~ 0.13

この表では典型的な物質のヤング率の値を書いている。この表の数字は  $(E/\text{Pa}) \times 10^{10}$  の単位で示されている。

### 4.3.3 引張り強さ

金属材料に応力を加えて引っ張るとある所でその物質は破壊される。この破壊される物質の最大応力を  $T$  としよう。この最大応力は物質によって異なるが、幾つかの実例を挙げておこう。これは「理科年表」に載っているものである。

表 2. 引張り強さ (応力の単位は Pa  $\equiv$  Nm<sup>-2</sup>)

物質	$T/\text{Pa}$	物質 (針金)	$T/\text{Pa}$	物質	$T/\text{Pa}$
亜鉛	1.1 ~ 1.5	アルミニウム	2.0 ~ 4.5	絹糸	2.6
鉄 (鋼)	7.0 ~ 10.8	鉄 (ピアノ線)	18.6 ~ 23.3	クモ糸	1.8

この表の数字は  $(T/\text{Pa}) \times 10^8$  の単位で示されている。これを見て驚く事はクモ糸の最大応力の大きさである。これは非常に強い事を意味している。クモの巣に良く引っかかった著者にとって、それを取り除くときの大変さを考えると確かに納得することではある。

### 4.3.4 応力テンソル

材料力学ではよく応力テンソル (stress tensor) という物理量が出てきている。これは応力がベクトルであり、さらに力を加える表面に3つの方向が考えられるため、 $3 \times 3$  の要素が原理的には出てくることになっている。しかし応力を理解するためには式 (4.20) で充分である。

## 4.4 固体の歪：動的な変位

固体が変形すると、その変形は再び元に戻そうとする力が働く場合がある。この時、固体には振動が生じる。例えば、水晶 (quartz) の結晶に力を加えると非常に規則正しい振動を開始する。その振動の周期は非常に規則正しい事が知られていて、実際、これがクォーツ時計に応用されている。

### 4.4.1 圧電効果

ある種の結晶体 (crystal) に機械的応力 (圧力) を掛けるとその結晶体の対称性が破れ、それに応じて電気分極 (electric polarization) が起こることが知られている。このためその結晶体には分極により電束密度が生じる。これは Pierre Curie が100年以上も前に発見している現象である。この現象の事を圧電効果 (piezoelectric effect) という。この効果の応用は幅広く行われている。

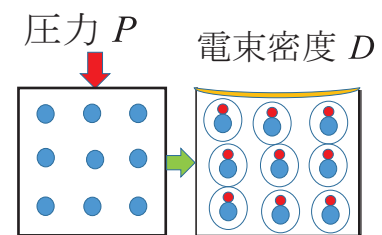


図 4.4: 圧電効果

- 液晶タッチパネル： 最近では、よく知られている現象として液晶 (liquid crystal) のタッチパネルがある。これは機械的な力のある種の結晶体に加えると、その結晶構造の対称性を少し壊すため電気分極が起こる。このため、電束密度が誘起され、この電気信号を直接に結びつけてコンピュータ画面を操作している。この圧電効果は機械的な力と電気力を結びつける現象であるため、この応用は現在では非常に広範囲に渡っている。

#### 4.4.2 水晶の逆圧電効果

圧電効果と丁度反対の物理現象が知られている(逆圧電効果)。それは電場を掛けると結晶が変形し、このため機械的な振動を起こす現象の事である。その性質を示す物質としては水晶(quartz)がよく知られている。電場をかけると結晶の対称性が破れるため、この対称性をもとに戻そうとする力が働き、振動を開始する。そしてこの振動は非常に正確である。この正確な振動動の振動数により時間の単位を刻むように作られたものがクォーツ時計である。

## 4.5 第4章の演習問題

問1 剛体の回転エネルギー  $T_R$  が

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] d^3 r \quad (4.21)$$

と書かれることを示せ.

問2 質量  $M$ , 半径  $R$  の一様球の慣性モーメントを計算せよ.

問3 質量  $M$ , 長さ  $\ell$  の棒の重心回りの慣性モーメントを計算せよ.

問4 オイラー方程式

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad (4.22)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad (4.23)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \quad (4.24)$$

を解いて地球の自転軸の歳差運動について論ぜよ.

問5 応力は単位面積あたりの力である. 何故, 単位面積の力を考えるのか説明せよ.

問6 図のように長さ  $\ell$ , 質量  $m$  の2個の棒がちょうつがいによって連結されている. この一方は  $O$  点につながられていて, その鉛直面で自由に回転できる2重振り子となっている.

(a) 棒  $A$  の点  $O$  の回りの慣性モーメントを求めよ. またその棒のラグランジアン  $L_A$  を求めよ.

(b) 棒  $B$  の運動エネルギーは並進運動と重心の回りの回転運動の和である. 棒  $B$  のラグランジアン  $L_B$  を求めよ.

(c) 微小振動の場合, その運動を論ぜよ.

## 第5章 熱力学

熱力学は自然現象を理解する上で重要な理論体系であるが、熱と言う概念は通常、日常生活で体験している割にはそう簡単に理解できるものではない！「熱」の問題を考え始めると、初年次の学生にとっては難しすぎるかも知れない。実際、専門家にとっても熱を物理的に正確に取り扱う事は容易な事ではない。ここでは熱力学 (thermodynamics) の物理とその基本的な方程式を統計物理学 (statistical physics) の言葉を交えながら解説して行くが、その場合の物理過程は全て準静的 (熱力学系の状態変化がない) であるとしている。

### 5.1 熱量

熱量 (heat value) は通常、変化分で定義されている。今、それを  $\delta Q$  と書こう。ここで単原子からなる気体を考えて、それがあつた体積  $V$  の中に閉じ込められているとしよう。

- 内部エネルギー  $U$  : この場合、気体の内部エネルギーを  $U$  としよう。気体の内部エネルギーとは気体分子の運動エネルギーのことであり、気体間の相互作用エネルギーはここでは考慮していない。この内部エネルギーの大きさ自体にはそれ程重要な物理的な意味はなく、内部エネルギーの変化分  $dU$  が重要な物理量である。この微小な変化は微分に対応していて、熱量の場合の変化分  $\delta Q$  とは異なっている。後で議論するように、この熱量の変化分  $\delta Q$  はその仕事の経路に依存してしまい、積分と関係づける事ができない。

- 圧力  $P$  : この体積の一端の面を考えて、その面積にかかる圧力 (pressure) を  $P$  としよう。圧力  $P$  とは単位面積あたりに働く力である。すなわち、圧力  $P$  に面積を掛けるとそれはその面積に働く力となっている。これは質点系の力学を学んだ学生には理解しにくいかも知れない。しかし、例えば、分子が壁に衝突している場合、平面全体が一様に力を受けていると考えれば、単位面積あたりの力という概念が物理的に意味を持っているのである。

- 地球の重力と気体の圧力： 気体が地球上で平衡状態にあるのは、勿論、この気体に働く地球の重力と分子運動が釣り合っているからである。一方、水の場合は地球重力が勝っているため、地表面にしか存在しない。但し、水蒸気は水分子の集合体ではあるが、これはむしろ気体に近い振る舞いを持っていると言える。水蒸気の集合体がどの程度集まれば、雨滴になるかと言う問題は興味深い、難しくて著者達が答えられる問題ではない。

## 5.2 熱力学の法則

熱力学は実験から求められた経験法則をもとにして構築された理論体系である。従って、この熱力学の基本法則は常に正しいものとなっている。しかしながらこの法則は現象論的に求められているため、その基礎的な部分に立ち入ってくると、必ずしも明解とは言えない部分がある。特に、温度とは何かという疑問に対して、簡単には答えられない。ある程度は統計物理学の言葉により理解できるが、しかし熱力学は基本的にはマクロスケール(長さとして cm を超える大きさ)の物理を扱うためこれは多体問題となっている。その多体系の平均値として熱力学があり、このため熱力学の方程式を厳密に理解する事は非常に難しい。これは古典力学でも事情は同じ場合があり、例えば乱気流を理論的に理解することはほとんど不可能である。

### 5.2.1 熱力学の第 1 法則

内部エネルギーの増加分  $dU$  と圧力による仕事量  $PdV$  を足したものが熱量の増加分になっている。これを  $\delta Q$  と書くと

$$\delta Q = dU + PdV \quad (5.1)$$

となっている。これはエネルギーの保存則を表していて、熱力学で最も重要な方程式であり熱力学の第 1 法則と呼ばれている。

- $PdV$  は何故、仕事量か？： 式 (5.1) 右辺第 2 項が仕事量である事を確かめよう。仕事量はポテンシャルエネルギーと関係しているがこれは

$$\text{仕事量} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

と定義されている。ポテンシャルエネルギーとは符号が逆である事に注意しよう。この符号の違いは「仕事量は気体が外部(円筒の蓋)にしたエネルギー」で

ある事と関係している．ポテンシャルエネルギーの場合は，外力，例えば重力が質点にした仕事になっているため符号が逆になっている．今，半径  $r$ ，長さ  $\ell$  の小円筒を考えて，この円筒の蓋は移動が可能であるとしよう．この円筒の端が力  $F$  により  $dz$  だけ増加したとしよう．この時，この円筒面  $\pi r^2$  に対する圧力を  $P$  とすれば，仕事量は

$$\text{仕事量} = Fdz = P\pi r^2 dz = PdV \quad (5.3)$$

となっている．これは考えている系のエネルギー（熱量）が増えている事に対応している．従って，式 (5.1) が求められたのである．

### 5.2.2 エントロピー $S$ の導入

式 (5.1) の熱量の増加分は実験的に「その仕事をする経路」に依ってしまふ事がわかっている．しかしながらこの熱量の増加分を温度  $T$  で割った量

$$\frac{\delta Q}{T} \equiv dS \quad (5.4)$$

は経路に依らない事が実験的に証明されている．

この式 (5.4) の右辺で定義した  $S$  をエントロピー (entropy) と呼んでいる．このように，熱量の増加分を温度  $T$  で割った量が経路 (path) によらないと言う実験事実は熱力学では最も重要であり，これが熱力学の本質である．一般的には式 (5.1) を

$$TdS = dU + PdV \quad (5.5)$$

と書いて，これを熱力学の第1法則と呼ぶ場合が多い．

### 5.2.3 熱力学の第2法則

導入したエントロピー  $S$  は微分としての数学的な取扱いが可能となっている．ここで，このエントロピー  $S$  はほとんど増大するという法則がある．エ

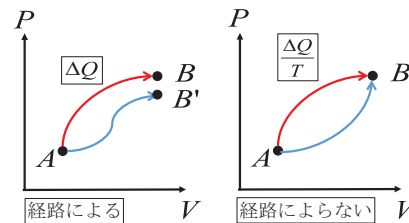


図 5.1: カルノーサイクル

ントロピー増大の法則とも呼ばれているが、これが熱力学の第2法則である。しかしこのことが物理学へどのような影響を与えているかと言う問題はそれ程明解とは言えない。むしろ、エントロピーの変化分  $dS$  は経路には依らないと言う実験事実をしっかりと理解する事が物理的には遥かに重要である。

### 5.3 熱力学関数

熱力学では式 (5.5) に微分の公式を使うと面白い関係式が求められる。式 (5.5) は微分学の立場からすると、エントロピー  $S$  が  $U$  と  $V$  の関数になっている事 ( $S = S(U, V)$ ) を示している。この場合、数学の公式として

$$dS = \frac{\partial S}{\partial U} dU + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (5.6)$$

が知られている。従って、これを式 (5.5) と比較すると次式が証明される。

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \quad (5.7)$$

#### 5.3.1 内部エネルギー $U$

式 (5.5) を書き直して  $\boxed{dU = TdS - PdV}$  としてみよう。この時、エネルギー  $U$  は エントロピー  $S$  と体積  $V$  の関数となっている。従って

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P \quad \text{が証明される。}$$

#### 5.3.2 ヘルムホルツの自由エネルギー $F$

ヘルムホルツ (Helmholtz) の自由エネルギー (free energy)  $F$  は

$$F = U - TS \quad (5.8)$$

で定義されている。この時、 $\boxed{dF = -SdT - PdV}$  が示される。これは自由エネルギー  $F$  が  $T$  と  $V$  の関数になっている事を示している。これは、自由エネルギー  $F$  が温度と体積の変化に対してどう反応するかを見る時に重要な役割を果たしている。この時、次式が証明される。

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial F}{\partial V} = -P \quad (5.9)$$



### 5.3.3 その他の熱力学関数

実際の応用としてはギブスの自由エネルギー  $G = F + PV$  ( $dG = -SdT + VdP$ ) やエンタルピー  $H = U + PV$  ( $dH = TdS + VdP$ ) などが良く使われている。どの変数を変化させるかに応じて (例えば  $G$  では  $T$  と  $P$ ) それぞれ熱力学関数が定義されているからである。

## 5.4 統計物理学

統計物理学の主要目的は系の分配関数  $Z$  を計算する事である。  $Z$  は

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (5.10)$$

で定義されている。物理的な観測量は分配関数 (partition function) によりその期待値として計算される。ここで  $E_n$  は状態  $n$  におけるエネルギー固有値であり、 $k$  はボルツマン定数である。エネルギーの平均  $\langle E \rangle$  は

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \quad (5.11)$$

となる。この  $\langle E \rangle$  は内部エネルギー  $U$  と考えてよい。 $E_n$  は量子力学のエネルギー固有値であり「統計力学」という力学は存在しない事に注意しよう。

● ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  と分配関数  $Z$  : ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  は分配関数  $Z$  によって

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (5.12)$$

と書かれる。ここでこの式 (5.12) を証明しておこう。エントロピー  $S$  は

$$S = -k \sum_n p_n \ln p_n, \quad \text{但し, } p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \quad (5.13)$$

と  $n$  状態の確率  $p_n$  の言葉で書く事ができる。これより式 (5.13) を変形すると

$$\begin{aligned} S &= -k \sum_n \left[ \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \ln \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \right] = k\beta \sum_n \frac{E_n e^{-\beta E_n}}{Z} + k \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \ln Z \\ &= \frac{U}{T} + k \ln Z \end{aligned} \quad (5.14)$$

となっている。この式 (5.14) は  $TS = U + kT \ln Z$  と変形できるので、 $F$  の定義式  $F = U - TS$  と比較してみると式 (5.12) が示される事がわかる。

## 5.4.1 分布関数

統計物理学における観測量は平均値 (アンサンブル・アベレージ) である。従って、どの分布関数で平均するののかと言う事だけが物理的な興味である。実際には分布関数としてカノニカル分布が一義的に決まってしまうので、その意味においては統計物理学は単純明快である。

- ミクロカノニカル集団： まず、ミクロカノニカル集団 (孤立系) を考えて、その状態数を  $W(E_t)$  としよう。この時、 $E_t$  はその孤立系の全エネルギーである。この系の中で、微小な部分を考えて、その微小部分のエネルギーを  $E$  とする。この時、この微小部分が実現される確率  $p(E)$  は

$$p(E) = \frac{W(E_t - E)}{W(E_t)} = \exp [\ln(W(E_t - E)) - \ln W(E_t)] \quad \text{である。}$$

ここで確率  $p(E)$  は  $p(0) = 1$  を満たしている。また、 $\exp$  化したのはカノニカル分布が導出される事を予想しているためである。ここで重要な事は「微小部分が実現される確率  $p(E)$  の計算において  $W(E)$  の関数形が  $E_t$  と  $E_t - E$  で同じである」という仮定である。これは恐らくは  $E$  が  $E_t$  と比べて十分小さいと仮定している事から正当化されるものと考えてよい。

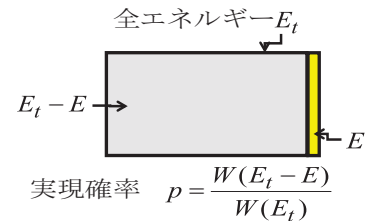


図 5.2: カノニカル分布導出

- カノニカル分布：  $E$  は微小量であるためその状態数が  $W(E)$  で与えられるとは限らない。 $W(E_t - E)$  はその関数形として  $W(E_t)$  と同じと仮定して十分意味があると考えられるが、これと  $W(E)$  は全く別物である可能性が高い。実際問題として微小部分の状態数は  $W(E_t)$  の関数形からは予想出来ないと言う事である。今、 $E$  が  $E_t$  と比べて十分小さいので展開すると

$$\begin{aligned} p(E) &\simeq \exp \left[ \ln \left( W(E_t) - \left( \frac{\partial W(E)}{\partial E} \right)_{E=E_t} E \right) - \ln W(E_t) \right] \\ &\simeq \exp \left[ - \left( \frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} \right)_{E=E_t} E \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる。これから見ても、確かに分布関数は

$$p(E) \simeq \exp(-aE) \quad (5.16)$$

の形をしており、これがカノニカル分布に対応している。この時、観測されているカノニカル分布と一致するとするならば

$$a = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} \quad \text{である事がわかる。}$$

### 5.4.2 エントロピー

この分布関数を熱力学に結びつける事を考える。熱力学の基本方程式は  $TdS = dE + pdV$  であった。この式と数学の微分公式より  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$  である事がわかっている。従って、 $\frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} = \frac{1}{kT}$  と比較すると  $S = k \ln W$  の関係式が予想される。即ち、統計物理において分布関数がカノニカル分布である事を要求し、さらにその係数  $a$  は熱力学の公式から予測される  $\frac{1}{kT}$  と同じであるとするとエントロピーが状態数の Log に比例する事がわかる。

• エントロピーと観測量： この時、 $S$  のエネルギー依存性を考える事が重要である。即ち、

$$S(E) = k \ln W(E) \quad (5.17)$$

におけるエネルギー  $E$  はミクロカノニカルなエネルギー  $E_t$  である。従って、 $S$  自体は物理的な観測量に直接は結びつかない。観測量に結びつくのは  $S$  の変化分  $\Delta S$  つまりその微分値のみである。従って、エントロピーの取り扱いには十分な注意深さが必要である。

•  $n$  状態の確率  $p_n$  によるエントロピー： エントロピー  $S(E)$  を  $n$  状態の確率  $p_n$  により

$$S(E) = -k \langle \ln p_n \rangle \quad (5.18)$$

と定義しよう。 $\langle * \rangle$  は状態平均を表している。これがミクロカノニカルの確率だとすれば  $S = -k \ln p = k \ln W$  になっていて、式 (5.17) と一致している。実際は、 $n$  状態の確率  $p_n$  によって平均する必要がある。これは

$$S(E) = -k \langle \ln p_n \rangle = -k \sum_n p_n \ln p_n \quad (5.19)$$

となっていて、式 (5.13) そのものである。

## 5.5 統計物理学の例題

熱力学および統計物理学において重要な問題は理想気体 (ideal gas) である。これをきちんと理解する事が最も重要であり、統計物理学の目的の大半を占めている。ここではその基本を見据えるとともに、統計物理学がどのように応用されているかという具体的な例題も議論しよう。但し、この場合、統計操作の本質と直感的に関連する部分を主に取り扱って行こう。

### 5.5.1 理想気体：ミクロカノニカル集団

質量  $m$  の  $N$  個の粒子が一辺が  $L$  の立方体の中に閉じ込められているとしよう。この時、エネルギーが  $E$  の場合の状態数  $W(E)$  の計算を実行しよう。状態数の計算は体積が充分大きいとして和を積分で置き換える

$$\sum_n = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \int d^3p \quad (5.20)$$

の公式を用いている。この時、状態数  $W(E)$  は

$$W = \frac{1}{N!} \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^{3N} \int_{p_1^2 + \dots + p_N^2 \leq 2mE} d^3p_1 \cdots d^3p_N \quad (5.21)$$

となる。  $N!$  で割り算しているのは粒子の区別ができないためである。

- 同種粒子： 状態数の計算において、量子統計では  $N!$  での割り算が自然に理解できている。しかしながら古典統計ではこの因子を理解することは容易ではない。古典力学には「状態」という概念が存在しないからである。このことは「古典統計力学」は物理的に定義できていない事を意味している。実際、位相空間の積分が状態数の和に一致するのは、自由粒子の場合の特殊性である。この教科書では、古典統計の記述はすべて省く事にしている。

- 半径  $R$  の  $N$  次元球の体積： ここで半径  $R$  の  $N$  次元球の体積  $V(R)$  は  $V(R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} R^N$  と書ける事が簡単に示される。この式の証明はある数学の技術を用いており、付録 (B.6) で解説しているので参照して欲しい。よって

状態数  $W(E)$  は  $W(E) = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3N} \frac{(2\pi mE)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$  となる。

• エントロピー  $S$  : エントロピー  $S$  は  $S = k \ln W(E)$  であり, また式 (5.7) より  $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$  だから

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{kN}{V} \quad (5.22)$$

となっている. これは  $PV = NkT$  であり理想気体の状態方程式である.

### 5.5.2 理想気体 : カノニカル集団

質量  $m$  の  $N$  個の粒子が温度  $T$  で一辺  $L$  の立方体の中に閉じ込められているとしよう. この時, 分配関数  $Z$  は

$$Z = \left( \sum_{\mathbf{n}} e^{-\beta E_{\mathbf{n}}} \right)^N \quad (5.23)$$

で与えられている. 但し  $E_{\mathbf{n}} = \frac{p^2}{2m}$ , ( $\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\mathbf{n}$ ) である. また式 (5.20) で示されたように状態和は運動量積分となる. この計算は

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{-\beta E_{\mathbf{n}}} = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \int e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} d^3 p = \left( \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \times \left( \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right)^3$$

となるので, 分配関数  $Z$  は  $Z = \left( V \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \right)^3 \right)^N$  である. よって

$$\ln Z = N \ln V - \frac{3N}{2} \ln \beta + \frac{3N}{2} \ln \left( \frac{2m\pi}{(2\pi\hbar)^2} \right) \quad (5.24)$$

となっている. 一方, ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  は式 (5.12)

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (5.25)$$

で与えられているので, その立方体の面における圧力  $P$  は式 (5.7) より

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NkT}{V} \quad (5.26)$$

となる. よって  $PV = NkT$  となり, これは理想気体の状態方程式である.

### 5.5.3 熱容量

ある系を考えた場合，温度  $T$  の時にどれだけエネルギーを蓄える事ができるかという物理量の事を熱容量 (heat capacity) と呼び

$$C_X = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_X \quad (5.27)$$

と定義されている．ここで  $X$  は条件式を意味している．例えば  $C_V$  は体積を一定にした定積熱容量 (比熱) を表している．

- 単原子分子の定積熱容量： 温度  $T$  の単原子分子集団の定積熱容量を計算しよう．まず，この気体の内部エネルギー  $U$  は

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (5.28)$$

で与えられているので，式 (5.24) より

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{3N}{2} kT \quad (5.29)$$

となっている．よって定積熱容量  $C_V$  は  $C_V = \frac{3kN}{2}$  と求まる．

## 5.6 熱伝導

熱力学は通常，温度  $T$  で定義されたある体積中の物質についての物理である．しかし日常生活でよく見る現象は熱の伝達である．この熱伝導 (heat conduction) は 2 個以上の物質系が接している場合に起こる現象である．

### 5.6.1 物質の流れはない熱伝導

ここで議論する熱伝導は 1 次元系のエネルギーの流れとして考えている．2 個の物質系がそれぞれ異なった温度で境界面で接触しているとしよう．この場合，物質は移動しないでエネルギーだけが移動すると仮定している．

- エネルギー (熱量) の流れ  $q$ ： 今，単位時間あたりの熱量の流れを  $q$  としよう．この時，単位長さあたりの内部エネルギーを  $u$  とすると，そこには流

れの保存則 (連続方程式) が成り立っている (内部エネルギーの時間変化が熱量の流れに一致するという法則) . これは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5.30)$$

と書かれている . ちなみに3次元では  $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  となっていて , 電荷の連続方程式 ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ) と同じ形になっている .

### 5.6.2 フーリエの法則

熱量の流れ  $q$  と温度勾配の間には現象論的な法則が知られている . これは

$$q = -\kappa \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \quad (5.31)$$

という関係式でフーリエ (Fourier) の法則と言う . ここで  $\kappa$  は熱伝導率である . また , 内部エネルギー  $u$  と温度関数  $T(t, x)$  の間には , 式 (5.27) からわかるように定積比熱  $c_v$  (但し , 単位長さあたり) により

$$u = c_v T(t, x) \quad (5.32)$$

という関係式がなりたつ . これら  $q, u$  を式 (5.30) に代入すると

$$c_v \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} \quad (5.33)$$

という熱伝導の方程式が求まる .

- 熱量の移動 : 微小熱量移動  $\Delta Q$  は式 (5.31) より ,

$$\Delta Q = q \Delta x = -\kappa \Delta T \quad (5.34)$$

となっている . これは熱量移動が温度差  $\Delta T$  に比例している事を示している . 夏に 30 と 37 で体感温度は大きく異なっている . この理由としては , 熱量放射が温度差に比例している事が挙げられるだろう . 熱量移動はその差に比例しているので , 人間の体温 36.5 と比べてみると

$$30 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = (36.5 - 30) = 6.5 \text{ より } \Delta Q = 6.5\kappa \quad (5.35)$$

$$37 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = (36.5 - 37) = -0.5 \text{ より } \Delta Q = -0.5\kappa \quad (5.36)$$

となっている．このため，37 では熱量の移動がなくなってしまい，これでは非常に暑く感じるのは当然であろう．

- **注意書き：** ここで二つのコメントをしておこう．

(1) フーリエの法則は実験を記述している現象論的な経験法則である．これは電磁気学における「オームの法則」に近いものであるが，このオームの法則も実は，理論的な導出はまだできていない．しかし両者ともに実験をうまく再現している法則であることは間違いない．

(2) 熱伝導の方程式は3次元では

$$C_v \frac{\partial T(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(t, \mathbf{r}) \quad (5.37)$$

と書かれている．この方程式の特殊解が ブラック・ショールズによって経済学に応用されたことがある．残念ながら，この試みは成功はしなかったが，しかしこれが経済物理学の出発点になったことは確かであろう．

### 5.6.3 真空中の熱移動

熱の伝導は物質を通して行われる．それでは真空中では熱(エネルギー)の移動はあるのだろうか？例えば地球の外側は事実上，真空であるが地球の冷却は実際，起こっている．この冷却はどのようなメカニズムなのであろうか？その答えは簡単である．地球は放射冷却によってのみ，熱エネルギーを発散している．そしてこの放射冷却は黒体輻射 (black body radiation) により行われる．ここではこの黒体輻射の物理的な機構について解説しよう．

● プランクの公式： プランク (Planck) は光には最小単位である「量子」があるとして，この量子仮説のもとに黒体輻射の正しい理論式を発見して実験を見事に説明した．今，フォトン(光子)は粒子的であると仮定しよう．この場合，フォトンの運動量が  $p$  と  $p + dp$  にある時の光の強度  $I(p)$  は，単位体積当り何個のフォトンが放射されたかと言う物理量である．それを式で書くと

$$I(p)dp = 2 \langle p \rangle \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = 8\pi \langle p \rangle \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (5.38)$$



となる．最初の 2 はフォトンの偏極度である．ここでエネルギー  $E_n$  (但し  $E_n = npc = nh\nu$ ) を持つフォトン集団の分配関数  $Z$  は温度  $T$  の場合に

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta nh\nu} \quad (\text{但し } \beta = \frac{1}{kT})$$

となっている．よってフォトンの平均運動量は

$$\langle p \rangle = \frac{1}{c} \langle E \rangle = \frac{1}{cZ} \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{cZ} \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{c} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

となる．ここで強度  $I$  を振動数  $\nu$  で表すとプランクの公式

$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5.39)$$

が求まる．

● シュテファン・ボルツマン則： 有限温度の物質は輻射によりエネルギーを失っている．例えば地球は太陽からの輻射エネルギーを吸収し続けているが，地球の表面温度が一定値であるのはシュテファン・ボルツマン (Stefan-Boltzmann) 則  $[U = \sigma T^4]$  によるエネルギー放射と太陽からの輻射エネルギーが平衡状態になっているからである．

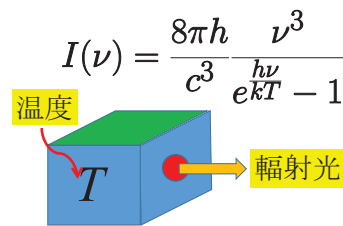


図 5.3: Planck の公式

このシュテファン・ボルツマン則は式 (5.39) を  $\nu$  で積分すれば

$$U = \sigma T^4, \quad \text{但し,} \quad \sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

と求まる．

#### 5.6.4 粒子数変化と化学ポテンシャル

2 個の熱力学系が接している時，粒子数変化 ( $dN$ ) により熱伝導が起こる場合が生じる．この時，ギブス (Gibbs) の自由エネルギー  $G$  は

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \quad (5.40)$$

と変更される．ここで  $\mu$  は化学ポテンシャル (chemical potential) と呼ばれている．この  $\mu$  は式を見れば明らかなように，エネルギーの次元を持っている．このため，化学ポテンシャルと言うことである．さらに，粒子数はそのポテンシャルが高い所から低い所へと変化して行くことになっている．

- 化学ポテンシャル  $\mu$  : この化学ポテンシャルは圧力と温度が一定の場合にはギブスの自由エネルギーから

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} \quad (5.41)$$

と与えられている．ここで括弧の右下の  $T, p$  は温度と圧力が一定であることを表している．

- ドライアイスとシャボン玉 : 粒子数が実際に変化する具体例を解説しよう．まず，カラの水槽の底にドライイスを敷き詰める．この場合，水槽の底は炭酸ガスで覆われる事になる．そこにシャボン玉を入れよう．この時，シャボン玉は炭酸ガスと接触して空間に停止している．しばらくするとこのシャボン玉は少し大きくなって行く．この理由として，シャボン玉の中は空気であるが，その炭酸ガスは少量であり，化学ポテンシャルは水に溶けた炭酸ガスの移動を促すからである．従ってシャボン玉が少し大きくなって行くことが理解できる．

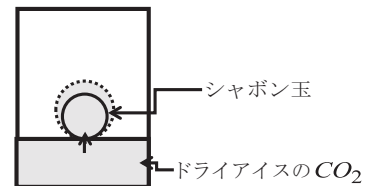


図 5.4: CO<sub>2</sub> の移動

- シャボン玉内の化学ポテンシャル : この場合，シャボン玉内の化学ポテンシャルはドライアイス上の炭酸ガスの塊の化学ポテンシャルよりも低い事になっている．この化学ポテンシャルに対する微視的な計算は相当に難しいものと思われる．

## 5.7 経済物理学

近年，経済物理学 (econophysics) が少しずつ発展し始めている．経済学を物理的な観点から研究することは，非常に面白い事ではある．最初の発展は金融工学 (financial engineering) への応用から始まったと考えてよいであろう．しかしこの考え方は必ずしも経済物理としての進展を意味するものとは言えない面があり，その後の発展はあまり見られていない．一方，株価のゆらぎ分布の問題は物理的なモデルにより詳細に研究されている．実際，株価の平均値からのゆらぎ (fluctuation) の分布はランダム行列という物理学における手法により，非常にうまく記述されることがわかっている．

ここでは金融工学で導入された概念とそれに関する方程式について簡単に解説しよう．また今後，経済物理学の発展の基礎となるべき「リスク管理 (risk management)」の考え方についての解説を試みて行こう [7]．

### 5.7.1 ブラック・ショールズの方程式

金融工学という一見，奇妙な分野を発展させたのはブラック (Black) やショールズ (Scholes) 達によるものであろう．この場合，投資の対象となる「金融商品」に対して，デリバティブズ (金融派生商品) という量が考案されている．まずは，その言葉の解説を簡単にしておこう．

- 先物取引： 例えば，ある商品がある期日に「予定価格」で売買する取り決めを「先物取引」としよう．これは単純で，商談が成立すればその価格で取引が行われる事になる．しかし実際に売買された価格は「予定価格」と異なる可能性が高くそのリスクは避けられない．
- オプション： ここで新しい考え方として「オプション」と言う商品が提案されている．それはある商品がある期日に「予定価格」で売買する権利のことである．その場合，そのオプションに対して少額のプレミアムを付けることで先物取引で起こるリスクを軽減しようという事である．
- ブラック・ショールズの方程式： ブラック・ショールズの方程式はそのデリバティブズが満たすべき微分方程式であり，

$$\frac{\partial W_d(\tau, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W_d(\tau, z)}{\partial z^2} \quad (5.42)$$

と書かれている．ここで  $W_d$  がデリバティブズの分布関数であり，また  $\sigma$  は商品価格変動の標準偏差である． $\tau$  は時系列の流れに関係しており，また  $z$  と

言う変数は価格変動を記述する時系列変数に関係している．しかしこれらの説明はここでは省略しよう．式 (5.42) には特殊解が知られている．それは

$$W_d(\tau, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2\tau}} \quad (5.43)$$

となっている． $c$  は任意定数である．現実的にはこの解が有用とは到底考えられないものであり，実際に成功を収めたと言う事実はない．熱の伝達を売買価格の変動と関係すると考えたことはある程度は，理解できる．しかしながら，そこに「人為性」が入らないという保証はなく，従って方程式が予測している価格変動の分布関数が充分信頼できるとは到底，言えるものではない．

### 5.7.2 ランダム行列とゆらぎの分布関数

経済物理学において株価などの価格変動の平均値を記述しようとしても，それを予測することは不可能であろう．この事は経済活動が単純に「自然界の現象」として扱う事ができない事と関係している．従って，価格変動の平均値を解析して，その変動が何を意味しているのかと言う問題を議論することは科学的に意味がある事であろうが，予測はできないことである．

- 経済物理における観測量： それでは価格変動に関するもので，自然現象として扱える「観測量」は存在するのであるか？これは重要な質問であるが，ある程度「自然現象」として扱う事ができるものが知られている．それは価格変動における「ゆらぎ」である．ゆらぎとは，価格変動に対してその平均値からのズレを意味している量である．そしてこの価格変動のゆらぎはランダム行列による予言値により，正確に記述される事が知られている．この事はゆらぎの分布は何らかの普遍性 (universality) がある事を意味している．しかしここで使っている数学はそう易しいものではないので，その詳細な数式を追う必要はない．その結果だけを応用することを学んでほしい．
- 量子論のハミルトニアン： ランダム行列を議論する場合，その出発点になるものがハミルトニアン  $H$  である．これは量子力学において最も重要な物理量である．量子力学では基本的に状態のエネルギーを求める事が目標である．このため，その状態のエネルギーを決める物理量が基本的なものとなり，それがハミルトニアンである．そしてその固有値がエネルギーとなっている．固有値が実数であるためにはハミルトニアンはエルミート行列である事が必要である．ここで扱うランダム行列ではそのハミルトニアンが実対称行列と仮定されている．従ってその行列要素はすべて実数である．

• ランダム行列： ランダム行列の方法とは，ある量子系を考えたとして，その「ハミルトニアン<sup>1</sup>の各行列要素がすべてランダムな分布をしている」と仮定するものである．簡単な模型として2行2列のハミルトニアン  $H$  を

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

としよう．この時，それぞれの行列要素  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{12}$  がすべてランダムな量だとして，これらが ガウス直交系アンサンブルの分布関数  $P(H)$  に従っていると仮定しよう．すなわち

$$P(H) = P(H_{11})P(H_{22})P(H_{12}) = Ne^{-\alpha(H_{11}^2+H_{22}^2+2H_{12}^2)} \quad (5.45)$$

である．但し  $N$ ,  $\alpha$  は定数である．ここで，式 (5.44) のハミルトニアンの固有値を  $E_1$ ,  $E_2$  とし，その差を  $s = |E_1 - E_2|$  としよう．この時，このエネルギー固有値の差  $s$  の分布関数  $P(s)$  は

$$P(s) = \frac{\pi}{2D^2} s \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \left( \frac{s}{D} \right)^2 \right\} \quad (5.46)$$

となる事が示されている．ここで  $D$  は  $\alpha$  に関する量であり，また  $P(s)$  は規格化されている．この分布関数はウィグナー分布と呼ばれていて，例えば原子核における複合核のエネルギー準位間差のゆらぎの分布関数の実験値と非常によく一致することが分かっている．

### 5.7.3 リスク管理

自然界で観測されたゆらぎの分布関数がランダム行列による理論計算と一致した事実は重要である．実際，これは何かもっと普遍的な現象である可能性が高いと言える．実際，確率的な現象におけるゆらぎの分布関数はこのランダム行列により普遍的に理解されることがわかっている．

• 株価のゆらぎへの応用： このランダム行列の模型計算が株価の変動に対するゆらぎの問題に応用されている．そして，観測された株価のゆらぎがランダム行列による予言値により，非常によく再現されている事が知られている．詳細は説明できないが，基本的にはエネルギー準位のゆらぎの記述と同じものと考えて分布を取り扱おうと上手く行くと言うことである．この事は，株価の平均値自体は自然科学の対象にはならないが，その株価平均値からの変動である

ゆらぎ分布は物理学の対称になるという事である．従って，このゆらぎを扱う模型計算が経済物理学の一つの方向を示していると言える．

- リスク管理への応用： この事実を利用してリスク管理の考え方に応用した例題を議論しよう．今，例えば1000社の株価のゆらぎ分布を解析したとしよう．この時，基本的には，すべての会社の株価のゆらぎ分布は理論と一致することが予想される．しかしながら，このうち3社の株価のゆらぎ分布は理論の予想から大幅にずれていた事がわかったとしよう．この場合，理論の予言値と一致しなかった3社の株価のゆらぎ分布はどのように理解したら良いのであろうか？

- 不一致の原因： 株価のゆらぎ分布が理論計算と合わなかった原因はそう単純ではないであろう．しかしながら，これは「普遍性」からずれているという意味で，この3社の株価ゆらぎに何らかの問題があることを示している．株価の変動に何らかの人為性が加わることは良くあることであろう．しかしこの影響がゆらぎに反映された場合，その株の会社が持っている何らかのトラブルが影響した可能性があるとも言える．



図 5.5: 株と平均値

まだその原因まで関係付けることはできていないが，これがリスク管理の問題である．残念ながら，そのリスクが何であるかは理論的にはわからないが，しかし何か問題が発生している可能性がある事は指摘できている．純粹に数学的な指標により，その企業に対するある種の「リスク」の存在がわかることは面白い手法と言えよう．

- 経済物理学の将来： この分野はまだ始まったばかりではあり，様々な問題点が出てくるものと思う．しかしながら，経済の現象においてもある種の「物理量」をうまく取り出すことができれば科学的な解析がある程度は可能になると言う事であろう．

## 5.8 第5章の演習問題

問1 熱力学の第1法則  $TdS = dU + PdV$  のそれぞれの項の物理的な意味を解説せよ。

問2 分配関数を  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  とする時,  $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$  であることを示せ。

問3 ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  は  $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$  と表されることを示せ。

問4 ミクロカノニカル集団からカノニカル集団における分布関数

$$p(E) \simeq \exp[-aE] \quad (5.47)$$

を導け。

問5 プランクの公式

$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5.48)$$

を導出せよ。

問6 微分方程式

$$\frac{\partial W_d(\tau, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W_d(\tau, z)}{\partial z^2}$$

の特殊解は

$$W_d(\tau, z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2\tau}}$$

であることを確かめよ。

## 第6章 電場の物理

電磁気学を教養物理学の教科書で解説することは、それ程容易な事とは言えない。電磁気学は場の理論であり、力学と比べると一挙に難しくなっているからである。しかし電磁気学の物理の本質は明解であり、ここでは電磁気学における「場」の概念を簡明に解説しよう。しかしこれを自分のものとするためには、かなり考え込まないと難しいものであることは間違いない。

### 6.1 電気とは

電気はすでに紀元前から知られていた。琥珀(樹脂化石)を毛布で擦ると電気が起こる事がわかっており、従ってこれが electron (ギリシャ語の琥珀) の起源である事は良く知られている。今は electron は電子の事である。

- 雷の生成： 雷も摩擦による帯電現象である。大量の水蒸気を含んだ上昇気流が上空で冷やされ水滴になり、さらに氷の小粒になり、お互いに激しく衝突を繰り返す。この過程で氷の小粒は正の電荷 (positive charge) を帯びてより上空に行き、水滴は負の電荷 (negative charge) を帯びて雲の下層部を形成す。これらがマクロスケールで一定以上たまると放電する、それが雷である。

#### 6.1.1 電流と電池

電流 (electric current) の発見は Galvani による蛙の筋肉の痙攣実験から始まった事はよく知られている。この現象は異なった金属版の間に塩水を置くと電位差ができ、従ってここに電気力が生じる事により起こったものである。

- 電流： この現象の原因を実験で明確に示したのが Volta である。彼は2種類の金属間に塩水を含む紙などを置くことにより、この間に電位差が生じて電流が流れる事を示したのである。
- 電池： 静電気を集めてもその利用は一瞬の放電でしかない。それに対して



電池 (battery) を作り電流を流してその電気力を利用する場合、電気を定常的に利用できる事になり、利用価値は飛躍的に増大した。そして2種類の金属板の間に塩水を含む紙をはさんだものを単位としてこれを何層か重ねたものが電池の基礎となっている。

## 6.2 電場と電位

電気の力は荷電粒子の間に力が働く事が出発点である。この力は時間に依らないので、これを静電場 (static electric field) という。この電場  $E$  という「場」について解説して行こう。

### 6.2.1 クーロンの法則

電磁気学の最も基本的な法則はクーロンの法則である。2つの電荷  $q, Q$  間には力が働き、その力  $F$  は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \left( \mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (6.1)$$

である。ここで電荷  $q$  は原点にあるとし、電荷  $Q$  は点  $r$  に存在していると仮定している。また  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  は定数であり、 $\mathbf{e}_r$  は  $r$ -方向の単位ベクトルである。

●クーロンポテンシャル：クーロン力を表す時、その力をポテンシャルで記述する事が良くある。2つの電荷  $q, Q$  間に働くポテンシャル  $U(r)$  は

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

と表されている。この場合に重要な事は、2つの電荷  $q, Q$  間に働く力は相互に及ぼし合っている事実 (相互作用) を理解することである。

●電荷とは何か？：電子の電荷 (charge) を  $e$  と書く。しかしこの  $e$  は電気的な力 (電子と電磁場の相互作用) の強さを表している。それではプラスやマイナス電荷とは何なのだろうか？これは場の理論の言葉で表す事になるが、荷電粒子にはその電荷に関する量子数が存在している。電子はその量子数が「-1」であり、陽子は「1」である。そして同じ量子数間では斥力になり、異なった量子数間では引力になっている。この物理を正確に理解する事は簡単ではなく、場の理論を学んだ時に、しっかりと考えればよいと思う。

### 6.2.2 電場

クーロンの法則はそれぞれの電荷がそれぞれの電場を形成して、お互いに力を及ぼし合うという解釈がより自然である。ここで式 (6.1) において電荷  $Q$  を取り除いたものを  $E$  と定義しよう。すなわち

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (6.2)$$

である。これは電荷  $q$  が原点にあり、その電荷が点  $r$  に作る電場である。従って、電場  $E$  近くにある他の荷電粒子には式 (6.1) のような力が働いている。

### 6.2.3 電位

この電場に対応して電位  $\phi$  を  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  により導入しよう。従って、式 (6.2) の電場に対応する電位 (electric potential) は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{定数} \quad (6.3)$$

となっている。ここで定数は境界条件をつけて決まる量である。

- 電位差： 電位が定数を含んでいるためそれ自体が直接の観測量にはならない。物理的な観測量は  $V \equiv \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2)$  であり、定数は消えている。回路の問題で出てくるのはこの電位差 (potential difference)  $V$  である。

## 6.3 電場のエネルギー

電荷  $q_1, \dots, q_n$  が存在している系を考えよう。この時、電荷  $q_i$  に注目すると、この電荷が他の全ての電荷から受ける電位は

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (\text{但し } j \neq i)$$

である。従って  $n$  体系の荷電粒子間のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j \phi_j \quad (6.4)$$

となる．2で割っているのは重複を回避するためである．ここで荷電粒子が連続的に分布していると仮定して，次の置き換えを行おう．

$$\sum_i \Rightarrow \int d^3r, \quad q_i \Rightarrow \rho(\mathbf{r}), \quad \phi_i \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) \quad (6.5)$$

よって式(6.4)は

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.6)$$

と書ける．ここでポアソン方程式  $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$  を使って式変形すると

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla^2\phi(\mathbf{r}))\phi(\mathbf{r}) d^3r$$

となる．さらに部分積分を使い計算して行くと電場のエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r \quad (6.7)$$

と求まる．ここで  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  を使っている．この電場のエネルギーの式は大変重要なので結果を必ず覚えておこう．

## 6.4 ガウスの法則

マックスウェル方程式の一つであるガウス (Gauss) の法則は，電荷密度がある時に電場がどのような形になるのかを決める式である．ガウスの法則は電場の発散が電荷密度分布に一致するという方程式である．このガウスの法則に関して，数学のガウスの定理と混同しないように覚えておく事も大切である．

### 6.4.1 ガウスの法則 (微分形)

ガウスの法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

である．ここで  $\rho(\mathbf{r})$  は電荷密度を表している．この方程式は1個であるが，その未知変数  $\mathbf{E}$  は3個ある．従って，この式だけで問題を解く事はできなく，

他に条件が必要である．ここでファラデーの法則を書くと  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  となっている．今，磁場がない場合を考えているので  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  である．従って，電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  と置く事ができる．この場合ガウスの法則は

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (6.9)$$

となり，ポアソン (Poisson) 方程式が求まる．これは方程式の数と未知変数の数が一致しており，従って  $\phi$  を決める事ができる．

### 6.4.2 ポアソン方程式

ここでは，ポアソン方程式の解を電荷密度が特別な場合に対して求めてゆこう．ポアソン方程式は式 (6.9)  $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$  であった．あとは電荷密度が与えられて境界条件さえわかれば，電位  $\phi$  を決める事が出来る．

• クーロンの法則 (点電荷の場合)： 点電荷  $q$  が原点にある場合，その電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$  と書いている．一方において数学の公式として

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (6.10)$$

がわかっているので，ポアソン方程式 (6.9) の解は直ちに求まり

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (6.11)$$

となる．但し定数の不定性は常にある．この電位はクーロンの法則そのものであり，クーロンの法則がガウスの法則から導出される事がわかる．

• 一般の電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  の場合： 実は電荷分布が一般の電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  の場合でもポアソン方程式は解けてしまう事がわかる．これはグリーン関数の方法として知られているが，ここではその基礎となる式

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.12)$$

を使って天下りの的に行う．この時ポアソン方程式 (6.9) の解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (6.13)$$

と書いている．これは式 (6.13) に  $\nabla^2$  を作用すれば直ちに証明できる．

### 6.4.3 ガウスの法則 (積分形)

数学のガウスの定理を用いると、ガウスの法則が積分形で表す事が出来る。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.14)$$

この式は1個しかないので、一般的にはこれで電場を決定する事は出来ない。しかし、ある種の対称性がある場合、例えば球状に電荷が分布している場合、未知変数である電場は  $E_r$  のみとなっていて確かに、この1個の方程式(6.14)から電場を決定できる。

## 6.5 静電場の例題

電磁気学の基本問題はある与えられた電荷密度に対してそれにより形成される電場はどうなっているのかを解く事である。ここでは幾つかの例題をあげて具体的に計算しながら解説して行こう。

### 6.5.1 球殻に一様電荷分布

今、半径  $a$  の球殻に電荷  $Q$  が一様に分布している場合を考えよう。これは非常に単純な問題ではあるが現実の物質で実現されており重要である。

- (1)  $r > a$  の場合： ガウスの法則の積分形を半径  $r$  の球において考えると

$$\int_{|\mathbf{r}'| < r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' = \int_{|\mathbf{r}'|=r} E_r(r') r'^2 d\Omega' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となる。ここで  $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi$  であり立体角と呼ばれる。よって、電場は

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{である。}$$

- (2)  $r < a$  の場合： 球内に電荷は存在しないので  $E_r(r) = 0$  である。

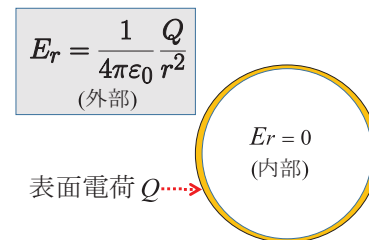


図 6.1: 球殻に一様電荷分布

## 6.5.2 平面に一様電荷分布

平板に電荷  $Q$  がある場合その面積を  $S$  とすれば面電荷密度  $\sigma$  は  $\sigma = \frac{Q}{S}$  となる．この平板を  $x-y$  平面におき，それと垂直の方向を  $z$ -軸としよう．この時， $x-y$  平面をそれと平行に含む面積  $S$  の薄い直方体を考えてガウスの法則を適用しよう．これは  $2E_z S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$  となる．よって

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad (6.15)$$

と求まる．この場合，端の効果は無視している．

• コンデンサー： 面積  $S$  で距離  $d$  の2枚の平板を平行において，上の平板に電荷  $Q$ ，下の平板に電荷  $-Q$  を与えた．それぞれの平板が作る電場は (6.15) で与えられる．上の平板と下の平板が作る電場は符号が逆なので，平板間の電場は  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  となる．平板間の電位差  $V$  は

$$V = \phi_2 - \phi_1 = \int_0^d Edz = Ed \quad (6.16)$$

となるので  $V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{d}{S\epsilon_0} Q$  と表す事が出来る．

• 静電容量： 2枚の平行平板間の電位差が  $V$  の時，その平行平板にどれだけ電荷  $Q$  を貯める事ができるかを考える時，その比例係数を容量と呼んでいる．従ってこの場合の定義は  $Q = CV$  となっていて，この  $C$  の事をコンデンサーの静電容量 (electrostatic capacity) と呼ぶ．今の場合  $C = \frac{S\epsilon_0}{d}$  となる．

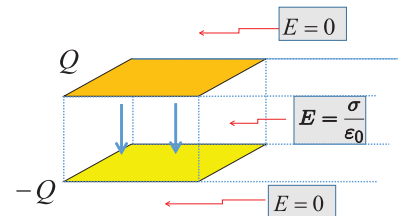


図 6.2: コンデンサー

## 6.6 誘電体

誘電体 (dielectric) の物理はかなり難しいと考えられているし、実際、電場を掛けたらその物質の内部に新たな電場ができる点で確かに複雑ではある。しかし多くの物質は誘電体であり、この性質を理解しておくことは重要である。

### 6.6.1 分極と電気双極子モーメント

誘電体とは電場  $E$  をかけると物質の中の電子がその原子の重心から電場の向きと反対方向に平均して少しずれると考えられる物質である。電子がずれると原子全体としてはプラスの電荷が電場と同じ方向に少しずれたように見える事になっている。この正・負の電荷は遠くから見ると電気双極子に対応している事がわかる。この事を分極 (polarization) という。これは電気双極子 (モーメント) (electric dipole moment) の集まりになっている。

- 電気双極子が作る電位と電場： 正・負の電荷がマイクロサイズの距離 (長さとして の大きさ)  $d$  でペアとして存在する時は、電気双極子 (モーメント)  $p \equiv qd$  による電場が生成される。この  $p$  が点  $r$  離れた場所に作る電位  $\phi$  は

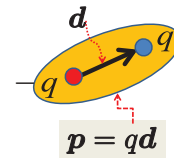


図 6.3: 電気双極子

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-q}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}|} + \frac{q}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}|} \right]$$

となるが、遠方の点 ( $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ ) では  $p$  が作る電位  $\phi_d$  は

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{となる.}$$

- 分極ベクトル  $P$ ： 分極ベクトルという物理量  $P$  を  $P = np_d$  と定義する。ここで  $p_d$  は誘電体の内部で誘起された電気双極子である。また、 $n$  はその電気双極子が誘電体内部で分布している分布関数 ( $n = n(\mathbf{r})$ ) である。

## 6.6.2 分極電荷密度と誘電率

今, 分極電荷密度を  $\rho_p$  とする. 但し,

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (6.17)$$

と定義されている. この時, ポアソン方程式は物質中に存在する真電荷密度を  $\rho_r$  として  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r + \rho_p$  となる. 電束密度  $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  と定義するとポアソン方程式は  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r$  となる. この電束密度  $\mathbf{D}$  は

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (6.18)$$

と書ける. 但し,  $\varepsilon$  は物質の誘電率と呼ばれていて  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$  である. ほとんどの誘電体ではこの誘電率  $\varepsilon$  は定数と仮定して十分良い近似である.

## 6.6.3 誘電体と電束密度

電束密度 (electric flux density) を  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  で定義したので, 誘電体内のガウスの法則は  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r$  と書き直された. ここで真電荷  $\rho_r$  に関して, ほとんどの場合でこの真電荷  $\rho_r$  はゼロとしている. 従って, 誘電体とは誘電率が真空の  $\varepsilon_0$  から  $\varepsilon$  にかわった物質と考えれば十分である.

## 6.6.4 誘電体のミクロな解釈

ここで誘電体の物理を比較的簡単に理解できる描象を解説しよう. しかしこの説明はかなり難しいので読み飛ばしてもよい部分ではある. 誘電体とは電場をその物質に掛けた時に電気双極子が誘起され, それによる電場が加わって電束密度ができる物質の事である.

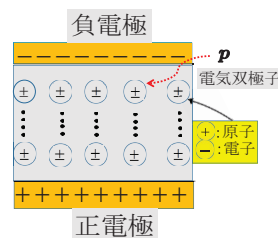


図 6.4: 誘電体

誘起された全ての電気双極子  $p_d$  によって作られる電位  $\phi_d(\mathbf{r})$  は  $n(\mathbf{r})$  を電気双極子の分布関数とすると

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int n(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{p}_d \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} d^3R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int (\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{R}}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R$$



となる．部分積分を用いてこの式を書き直すと電位  $\phi_d(\mathbf{r})$  は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (6.19)$$

となる．ここで  $\rho_p$  は式 (6.17) で  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  と定義されている．この事より誘電体中の電気双極子の作る電位を集めたら，それは分極電荷密度  $\rho_p$  が作る電位になる事が示されたのである．よってガウスの法則は誘電体中で修正されて  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r + \rho_p$  となっている．これは式 (6.18) に対応していて，確かに電束密度の式が導出されている．

## 6.7 第6章の演習問題

問1 点電荷  $q$  が原点にある時, 点  $r$  に作る電場は  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$  である.

- (a) この時,  $\nabla \cdot E$  を計算せよ.
- (b)  $\nabla \cdot E = 0$  となるが, これはガウスの法則と矛盾しているように見える. この原因を検証せよ.
- (c)  $(\nabla \cdot E)$  を原点を中心とした半径  $a$  の球で体積積分を実行して  $\int_V \nabla \cdot E d^3r = -4\pi$  を示せ.

問2 原点にある点電荷  $q$  が点  $r$  に作る電場は  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$  である. この電場のエネルギー  $U$  を計算せよ. この電場のエネルギー  $U$  は無限大であるが, この物理的意味は何だと思うか?

問3 電気双極子  $p$  が原点にありそこから十分離れた点  $r$  に作る電位  $\phi$  は

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

である事を確かめよ. この時「十分離れた場所」とは何と比べて十分離れていれば良いと思うか?

問4  $\nabla^2$  を極座標で表す式を用いて  $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$  を証明せよ. また

$\int_{|r|<a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = -4\pi$  を示せ. ゼロのものを足したら有限になったのだが, この基本的な理由は何だと思うか?

問5 接地された無限に広い平らな導体があり, そこから距離  $d$  に点電荷  $q$  がある. (a) 導体面に誘起される電荷の面電荷密度を求めよ. (b) 点電荷に働く力の大きさを求めよ. これは引力か斥力か?

問6 電束密度  $D$  と 電場  $E$  とを比べるとどちらがより基本的な物理量であると思うか? また物質中での分極とは何であると思うか?

## 第7章 電流と磁場の物理

ここでは磁場について簡単な解説をしよう．磁場 (magnetic field) とは電子の流れ (電流) があると，その近くに生成される「場」のことである．特に電流が円のように流れている円電流は磁気双極子 (モーメント) に対応していて，それが特有な磁場を生成している．ところが電流とは別に電子はスピン磁気双極子を持っているため，このスピンによっても磁場が生成される．実際，鉄などの磁石はその結晶中の電子のスピン磁気双極子はその方向をそろえるため大きな磁場を生成している．電場は電荷があると作られるが，磁場には電荷に対応する「磁荷」は存在しない．磁場の最小単位は磁気双極子である．

### 7.1 磁気とは

荷電粒子の流れがあるとその周りに磁場ができ，それが磁気である．そして最も重要な事は，荷電粒子が磁場中にあると磁場から力を受けるという事実である．この現象を読者は経験で良く知っていると思う．例えば，磁石が2個あると磁石同士がくっ付き合ったり反発したりする．この力の原因を理解するためには場の理論を学ぶ必要がある．結果は勿論，わかっている荷電粒子が磁場  $B$  の中にあると  $F = ev \times B$  というローレンツ力 (Lorentz force) が働いている．しかしこの力は粒子を加速させることはなくエネルギー保存には影響しない．一方，磁場  $B$  の中に磁気双極子  $m$  があると磁気双極子と磁場の相互作用エネルギーは  $U = -m \cdot B$  となっていてこれが磁石間の力の源である．

#### 7.1.1 磁気双極子モーメント

磁場の場合，電荷に対応する「磁荷」が存在しない．このため磁気双極子 (モーメント) が基本単位となっていて非常に重要な役割を果たしている．

- 円電流： この磁気双極子 (magnetic dipole moment) は円電流があると生成される．ここで電流  $J$  が半径  $a$  の円電流を作っているとこの磁気双

極子  $m$  は  $m = J\pi a^2 e_n$  である。但し、 $e_n$  は円に垂直な右ねじ法則に沿った単位ベクトルである。この場合、磁気双極子  $m$  が作る磁場は

$$B = -\nabla\phi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m}{r^3} - \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} \right], \text{ 但し } \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m \cdot r}{r^3} \right) \text{ である。}$$

$\phi_m$  (磁位) には物理的な意味はなく、電位との類推で導入されている。

- 磁気双極子は最小単位： 磁荷 (magnetic monopole) が存在しないため、磁場では磁気双極子が磁場を作り出す最小単位となっている。

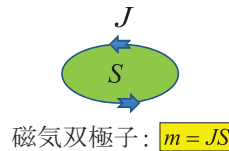


図 7.1: 磁気双極子

## 7.2 導体とオームの法則

導体 (conductor) とは銅などの金属でそこには隣に飛び移れる準自由電子が十分多く存在している物質である。導体中を流れる電流とは比較的自由に動ける伝導電子が隣の格子 (原子) に一斉に飛び移る事を繰り返す現象である。従って負電極から正電極までマクロの距離でも電子が一斉に隣の格子に飛び移れば、負電極から正電極まで即座に電流が流れた事になっている。

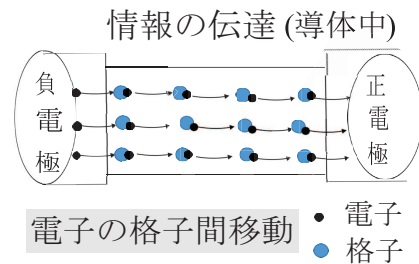


図 7.2: 電子の流れと電流

すなわち、電流が負電極から正電極まで流れた (情報の流れ) 時間は、大雑把には電子が隣の原子に飛び移る時間であるから、まさに瞬間である。

- 電流の定義： 電流の定義は「電荷の時間微分」である。今、電荷密度を  $\rho$  とする時、ある体積  $V$  の中に存在する電荷は  $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$  で与えられる。よって電流は  $J = \frac{dQ}{dt}$  である。一方、電流密度を  $j$  とする時、その体積  $V$  の表面から流れ込む「カレント」を電流  $J$  として  $J = \int j \cdot dS$  と定義されている。この定義のどちらも有用である。

## 7.2.1 オームの法則

オーム (Ohm) の法則とは電流密度  $j$  と電場  $E$  の間に成り立つ  $j = \kappa E$  という関係式である。ここで  $\kappa$  は電気伝導率 (electric conductivity) であり電流の流れ易さを表している。これは電流がその物質に掛けられた電場に比例しているという一見わかりやすい式となっている。しかしこの式を基本方程式とみなす事は出来ない。それはこの方程式が時間反転に対する対称性を持っていないからである。すなわち  $t$  を  $-t$  にすると、電場は変わらないが電流はマイナスの符号が出る事で理解できる。場の理論では、時間反転不変性を破る方程式があると、それは粒子のエネルギーの一部がどこかで消失する事を意味している。実際、オームの法則では電気抵抗のためエネルギーが失われている。ここでは電気伝導率  $\kappa$  を導入したが、この逆数が電気抵抗率  $\sigma = \frac{1}{\kappa}$  であり後で使う抵抗値 (electric resistance)  $R$  と関係している。この  $R$  は電流  $J$  が流れた時に電位差  $V$  がどれだけになるのかを示す量で  $V = RJ$  と書かれる。

- 電気抵抗率：ここで導体、半導体そして誘電体 (絶縁体) の場合の抵抗値を大雑把に定義しておこう。これは一つの目安でしかないが、しかし物質の多様性を知る上でも大切であると思われる。下記の電気抵抗率  $\sigma$  の数値は理科年表から引用している [6]。

導体：	$\sigma \leq 50 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{l} \text{銅：} \quad \sigma \simeq 1.7 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{ニクロム線：} \quad \sigma \simeq 108 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$
半導体：	$\sigma \sim (10^{-6} \sim 10^6) \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ゲルマニウム：} \sigma \simeq 6.9 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{海水：} \quad \sigma \simeq 2.0 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$
絶縁体：	$\sigma \geq 10^7 \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{l} \text{磁器：} \quad \sigma \simeq 3 \times 10^{14} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{水晶：} \quad \sigma \simeq 7.5 \times 10^{17} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$

7.2.2 電流  $J$  と電流密度  $j$ 

電流  $J$  は電流密度  $j$  を面積に垂直な方向で面積分した  $J = \int j_n dS$  で定義したので、オームの法則を使うと

$$J = \int j_n dS = \kappa \int E_n dS \quad (7.1)$$

となる。今、電場  $E_n$  は面積  $S$  で積分する時、その座標には依らないと仮定すると  $J = \kappa E_n S$  である。また距離  $d$  の間の電位差を  $V$  とすると  $V = E_n d = \frac{d}{S\kappa} J$  となっている。実験的には電位差が電流に比例して  $V = RJ$  と書けている。この  $R$  は電気抵抗と呼ばれていて  $R = \frac{d}{S\kappa}$  である。

## 7.2.3 キルヒホフの法則

キルヒホフ (Kirchhoff) の第1法則は回路 (circuit) における電流の保存である。すなわち、任意の閉回路に対して  $\sum_i J_i = 0$  が成り立つ。一方、キルヒホフの第2法則は回路における電位差の保存である。すなわち、任意の閉回路に対して  $\sum_i R_i J_i = \sum_i V_i$  が成り立つ。これらの式は電流が電子の流れである事を考えれば当然の式であり、物理的にはそれ以上の意味はない。

7.2.4  $RC$ -回路

回路の例題として  $RC$ -回路を考えよう。容量  $C$  のコンデンサーと抵抗  $R$  を直列につないでそれに電位差  $V_0$  を与えたとしよう。コンデンサーは半径  $a$  の円板が距離  $d$  で平行に並べてあるものと仮定しよう。この時コンデンサーの電場  $E$  とその容量  $C$  は  $E = \frac{V_0}{d}$ ,  $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$  となる。ここで回路にながれる電流を  $J$  とすると回路の方程式は

$$V_0 = RJ + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \left( \text{但し } J = \frac{dQ}{dt} \right)$$

となる。ここで初期条件として  $t = 0$  で  $Q = 0$  とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \text{ と求められる。}$$

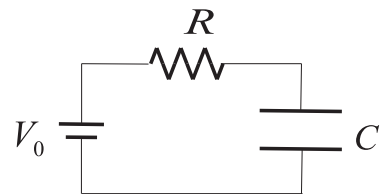


図 7.3:  $RC$  回路

これより電流  $J$  は  $J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$  となる．ここでコンデンサーの電場の方向を  $z$ -方向として

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{V_0 C}{\epsilon_0 \pi a^2} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \mathbf{e}_z \quad (7.2)$$

である．この電場は時間によっているので変位電流  $j_d$  が生じる．それは

$$\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V_0}{R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_z \quad (7.3)$$

である．変位電流が流れるとそれに伴ってコンデンサーの円盤中心から半径  $r$  の点で  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_d r}{2} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 r V_0}{2 R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$  の磁場ができています．この時ポインティングベクトルは  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{V_0^2}{2 \pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \mathbf{e}_r$  と求まる．

● ポインティングベクトル  $\mathbf{S}$  : このコンデンサーのエネルギーは電場のエネルギー  $\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$  に加えてポインティングベクトル  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  によりコンデンサー内のエネルギーが増減する．しかしこのポインティングベクトルのエネルギーは電磁波の放出とは無関係である．この系のエネルギーは抵抗により熱エネルギーとして失っているが、コンデンサーの部分は保存系でありこのエネルギーの外部放出はない．

### 7.2.5 LCR 回路

抵抗  $R$ 、コンデンサー  $C$  そしてコイル  $L$  からなる回路に電位差  $V(t)$  を与えた時、電流  $J$  が流れたとしよう．この時、この回路の方程式は

$$L \frac{dJ(t)}{dt} + RJ(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t) \quad (7.4)$$

である．この式 (7.4) を時間で微分すると

$$L \frac{d^2 J(t)}{dt^2} + R \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{J(t)}{C} = \frac{dV(t)}{dt}$$

となる．例として  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  の形に電位差を仮定して上式を書き直すと

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} J(t) = \frac{\omega V_0}{L} \cos \omega t \quad (7.5)$$

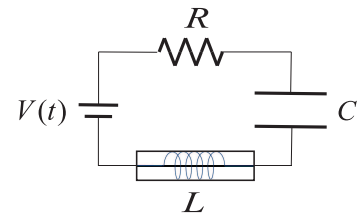


図 7.4: LCR 回路

となる．この微分方程式の解き方はよく知られていて，特解  $J_s(t)$  を

$$J_s(t) = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega t}\} \quad (\text{但し, Re は実数部}) \quad (7.6)$$

の形に仮定する．これを式 (7.5) に代入して計算すると  $A$  は直ちに

$$A = \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} \quad (7.7)$$

と求まる．従って，電流の特解  $J_s(t)$  は

$$J_s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} e^{i\omega t} \right\} \quad (7.8)$$

と決まる．式 (7.5) の解はその右边をゼロとした時の方程式

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} J(t) = 0$$

の一般解  $J_0(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t]$  を特解に加えたものである．ここで  $C_1, C_2$  は任意定数であり，また  $\gamma^2 \equiv \frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2$  は正の値 ( $\gamma$  は実数) と仮定している．これより式 (7.5) の一般解  $J(t)$  は

$$J(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t] + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} e^{i\omega t} \right\}$$

と書ける事がわかる．

## 7.3 電流の作る磁場

電流は電子の流れである．そして，電流が流れるとその周りには磁場  $B$  ができる．この磁場の生成を記述する方程式がアンペール (Ampère) の法則である．またこのアンペールの法則を積分の形に書き直して  $B$  を直接計算できる形にしたものがビオサバル (Biot-Savart) の法則である．

### 7.3.1 アンペールの法則

アンペールの法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.9)$$

と書けている．この方程式を積分表示した式がビオサバルの法則である．



### 7.3.2 ビオサバールの法則

ビオサバールの法則は電流  $J$  が線  $C$  に沿って流れる時、磁場  $B$  が

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.10)$$

という線積分で書ける事を示した式である。従って、電流  $J$  の形が与えられたら、この積分を積分公式を参照して実行すれば磁場  $B$  が求まる。

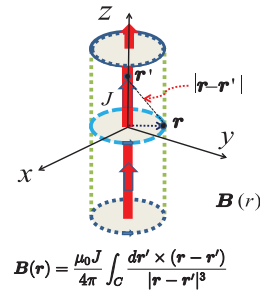


図 7.5: ビオサバールの法則

### 7.3.3 アンペールの法則の積分系

定常状態におけるアンペールの法則は  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  であった。この式に対してストークスの定理  $\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$  を応用すると

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 J \quad (7.11)$$

となる。ここで  $C$  は半径  $r$  の円周に沿った線、 $S$  はその面積であり、 $J$  はその半径  $r$  のループ中を通過する電流である。この式をアンペールの法則の積分形という。但し、この式は対称性がある時のみ使える。実際には電流が直線で流れる場合にのみ簡単になっている。

### 7.3.4 直線電流の作る磁場

$z$ -軸の正の方向に電流  $J$  が流れている場合を考える。この場合、 $z$ -軸を中心とした半径  $r$  の円を考えて、この円の中でアンペールの法則の積分形を応用する。面積分  $dS$  と線積分である  $d\mathbf{r}$  については付録で解説している。ここで、半径  $r$  の円の線積分は  $d\mathbf{r} = r e_\theta d\theta$  である事から、

$$\mu_0 J = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = r \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta d\theta = r 2\pi B_\theta$$

となり、これより  $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$  と求められる。

### 7.3.5 円電流の作る磁場

半径  $a$  の円電流  $J$  を考えよう．この円は  $x - y$  平面にあるとして観測者の座標を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とする．この時，磁場はビオサバールの法則より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{za \cos \theta \mathbf{e}_x + za \sin \theta \mathbf{e}_y - (ya \sin \theta + xa \cos \theta - a^2) \mathbf{e}_z}{(r^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.12)$$

と求まる．この積分は厳密には出来ないが，簡単にできる例題を示そう．

- 円電流の作る磁場 (遠方) : 遠方 ( $r \gg a$ )  
では被積分関数を  $a/r$  で展開すると式 (7.12) の積分は直ちに出来て

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[ \frac{3zx}{r^5} \mathbf{e}_x + \frac{3zy}{r^5} \mathbf{e}_y + \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \mathbf{e}_z \right]$$

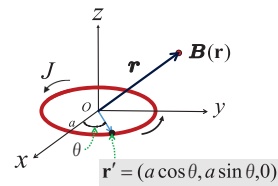


図 7.6: 円電流が作る磁場

と求められる．ここで定義した  $m = J\pi a^2$  は

磁気双極子 (magnetic dipole) モーメントと呼ばれるものである．

今，  $\mathbf{m} = (0, 0, m)$  を導入すると磁場は  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$  となる．

### 7.3.6 磁化と磁石

導体とは割合自由に動ける電子が十分多く存在している物質である．従って外から磁場を掛けるとそれらの準自由電子は円運動をする事になる．

- 磁化 : 円電流は磁気双極子に対応しているため，これが内部磁場を生成する．この磁場を全て集めたのが磁化 (magnetization) である．磁化は外からの磁場を打ち消すように生成される．これは自然界は必ず物質中の磁場の全エネルギーが最小になるように選択するからである．

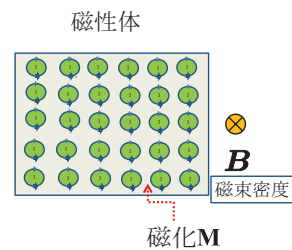


図 7.7: 磁化

電子が円運動してもエネルギーを消費しないが，この電子が周りの電子または格子と衝突するとエネルギーを失う．この場合は円運動が起こらないので磁化により外から掛けた磁場が物質内部で完全に消滅する事は一般的にはない．

• 磁石： 通常の物質は外部からの磁場を取れば内部磁化は消滅する．しかし内部磁場が消滅しない場合がありこれが磁石 (magnet) である．しかし磁荷がないので，磁石のように物質の内部で生成される磁場はすべて磁気双極子によるものである．通常は外部磁場をはずしたら磁気双極子の方向がいずれ揺らぎ始め，最終的には平均すればゼロになるはずである．しかし磁石は何らかの理由で  $m$  の方向が揃ったままの状態が半永久的に実現されている．現実の磁石では電子のスピンによる磁気双極子 ( $m \simeq \frac{e}{m} s$ ) の方が円運動による磁化よりも重要である．従って最初に最外殻の電子のスピンを揃わせるのは外から掛けた磁場であろう．しかし一度揃ってしまうと磁石では何らかの理由でスピンの揃ったままの状態が優先され，ランダムにはならない．しかし，この強磁性体の現象は理論的にはまだ良くわかっているとは言えない．

### 7.3.7 磁場のエネルギー

今，荷電多粒子系を考えよう．ある粒子の電流密度を  $j$  とするとこれは他の粒子の作る磁場と相互作用している．この時，系全体の相互作用エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (7.13)$$

となる．ここで2で割るのは数えすぎを防ぐためである．また，右辺第2項への移行はアンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  を用いている．ここで部分積分をすることにより式 (7.13) は

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d^3r \quad (7.14)$$

と求まる．この磁場のエネルギーの式は大切なので覚えておこう．

• 電磁場の仕事率： 電磁場のエネルギーに加えて仕事率  $W$  も重要な物理量であり  $W = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r$  と定義されている．この仕事率をアンペール・マックスウェルの法則  $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  を使って変形すると

$$W = - \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int \left( \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) d^3r \right] + \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r \right\} \quad (7.15)$$

となる．ここで  $\mathbf{S}$  はポインティングベクトル  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  である．

### 7.3.8 超伝導とマイスナー効果

電場や磁場を物質に掛けた時、準自由電子は何らかの運動をする。電位差があれば電子は運動して電流を生成する。しかし、この電子は他の電子や格子と衝突するとエネルギーを失う事になりこれが電気抵抗の原因である。

- 超伝導： 伝導電子が隣に飛び移って格子と衝突してもエネルギーを失わない時にその物質は超伝導 (superconductor) 状態となっている。超伝導状態では、恐らく何らかの理由で電子と格子等との散乱が弾性散乱しか起こらない状態が実現されているのであろう。超伝導を説明する理論としてBCS理論が知られているが、これは超低温ではエネルギーギャップが生じて、そのために伝導電子が励起状態に遷移できないことから超伝導状態になっているという説明である。しかしこれは条件としては強すぎる事がわかっている。このため超伝導現象を多重散乱の言葉で理解しない限り、その本質が理論的にわかったとは言えない。これは電気抵抗の問題と共にいずれ明らかにされるであろう。

- マイスナー効果： 超伝導物質の上に磁石を置くとその磁石は浮き上がる事がある。これは磁石の磁場が超伝導物質内部に侵入するとそれを打ち消し合う磁化が生成されるからである。この内部で生成された磁場は当然、外側にも有限の場で存在している。この磁場が磁石と斥力的に相互作用している事から磁石が浮き上がる現象が起こっている。そして内部の磁場が完全に消滅する場合を Meissner 効果という。

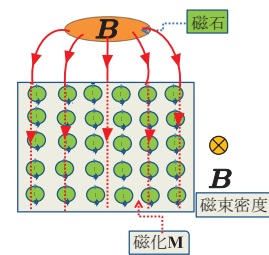


図 7.8: マイスナー効果

## 7.4 電磁誘導

磁場が時間変動すると起電力が生じる現象は電磁誘導 (electromagnetic induction) と呼ばれていて、これを記述するファラデーの法則は電磁気学のうちでも一番良く知られているものである。この現象は発電の原理にもなっていて割合馴染みの深い法則である。しかしこの方程式には電荷や電流が現れていないため、物質の存在が直接的にはかかわっていない法則である。

- ファラデーの法則： ファラデーの法則は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.16)$$

と書かれている。微分の形だとわかりにくいので積分形にしたものが良く使われる。すなわち、上式の両辺を面積  $S$  で積分するのである。ここで左辺をストークスの定理で書き直すと起電力  $V$  となり  $V = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  である。また磁束  $\Phi$  を

$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{で定義すると式 (7.16) は } V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{となる。}$$

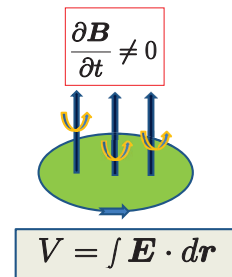


図 7.9: ファラデーの法則

### 7.4.1 ローレンツ力

アンペールの法則では相互作用ハミルトニアン  $H' = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$  における  $\mathbf{j}$  が重要な役割をしている。一方、ローレンツ力  $\mathbf{F}$  として知られている力は磁場  $\mathbf{B}$  によって荷電粒子が受ける力であり、これも相互作用  $H'$  が起源となっている。このローレンツ力は

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.17)$$

であり  $\mathbf{v}$  が荷電粒子の速度を表している。この方程式にはベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  がファラデーの法則を満たしているという事実がどこかに反映されているものと考えられる。

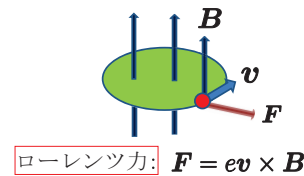


図 7.10: ローレンツ力

• ローレンツ力による運動： 荷電粒子に磁場を掛けると運動方程式は  $m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$  となりローレンツ力による運動となっている。ここで  $z$ -軸方向に一樣な磁場  $B$  を掛けたとしよう。この時、運動方程式は

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -eB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0 \quad (7.18)$$

となる。この方程式は直ちに解けて

$$x - x_0 = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (7.19)$$

$$y - y_0 = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad (7.20)$$

$$z - z_0 = A_3 t \quad (7.21)$$

となる。 $\omega = \frac{eB}{m}$  はラーマ 振動数で  $x_0, y_0, z_0, A_1, A_2, A_3$  は定数である。運動は円運動(らせん運動)であり、その周期  $T$  は  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$  である。

#### 7.4.2 モーター

モーターは磁場中に流れる電流が力を受ける事を利用している。ファラデーの法則は磁場の時間変化が起電力を生み出すというものであるが、ローレンツ力は荷電粒子と磁場との相互作用を含んだ法則である。電磁気学全体として見たらそれぞれの法則がお互いに絡み合っただけで電磁現象につながっている。モーターの原理に対応する回転力そのものは相互作用によっているが、その相互作用はベクトルポテンシャル  $A$  で書けている。その意味において、モーターの動作機構全体としては電磁誘導と関係していると言える。

• モーターの整流子： 磁場  $B$  の下に置かれたコイルに電流を流すとこの電流を担っている電子(その速度  $v$ ) はローレンツ力  $F = ev \times B$  を受ける。このコイル全体が力を受けて回転できるようにうまく工夫された機器がモーターである。この時、外部電流をコイルの回転方向に応じて切り替え、回転を一定方向に保つために工夫されたものが整流子(commutator)である。

### 7.4.3 誘導加熱：IH

近年よく使われる誘導加熱 (Induction Heating) も電磁誘導の法則を利用している。まず磁場をうまく時間変化させる事により導体中に起電力を起こさせる。そしてこの起電力により導体中に電流を流し、その電気抵抗により導体物質を発熱させる事ができる。この原理は非常に簡単であり、エネルギー効率もかなり良いものと考えられる。また直接の発火現象を伴わないため安全性も優れている。但し発熱させる機器が絶縁体では効果がない。

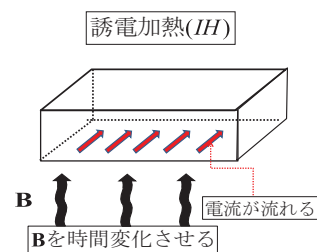


図 7.11: 誘導加熱

## 7.5 第7章の演習問題

- 問1 半径  $a$  の円形コイルが  $x-y$  平面内にあり, その中心を原点においてある. このコイルに電流  $J$  を流した時, (a)  $z$ -軸上の磁束密度 (b) 原点から十分はなれた点  $r$  における磁束密度をそれぞれ求めよ.
- 問2 電子の磁気双極子モーメント  $\mu$  は角運動量  $L$  とスピン  $s$  に関係していて  $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}(2s + L)$  と書かれている. 円電流が磁気双極子モーメントと関係している物理的な理由は何だと思うか?
- 問3 水素原子の模型として, 陽子 ( $+e$  の電荷) の周りに電子 ( $-e$  の電荷) が円運動しているとする. 但しその半径は  $r = 0.53 \times 10^{-8} \text{cm}$  とする.
- (a) ニュートン力学を用いて電子の速度  $v$  を  $r$  で表せ. 次に電子の電流  $J$  を求めよ.
- (b) 水素原子の磁気双極子モーメント  $\mu = \mu_0 S J$  を計算せよ. また電子の運動により陽子にどれだけの磁場ができていますか?
- 問4 物質に束縛されている質量  $m_e$  の電子が平衡位置からのズレに比例する力を受けるとする. すなわち  $F = -m_e \omega^2 r$  の力である. この電子に  $z$ -軸に一樣な磁場  $B$  を掛けた時, この電子の運動を論ぜよ.
- 問5 変位電流  $j_d$  の定義を書き, それが何故マクスウェル方程式に必要であったかを論ぜよ.
- 問6 電場と磁場のエネルギーを  $U = \int \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) d^3r$  とする時, 仕事率  $W = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r$  は  $W = -\frac{dU}{dt} - \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r$  となる事を示せ. 但し  $\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  はポインティングベクトルである.



## 第8章 初等量子論

量子論は日常的な自然界において直接的に観測できる現象ではないため、その直感的な描像を作ることが容易ではない。基本的には、量子論は物質中に存在する電子の振る舞いを記述する理論的な枠組みであると考えて十分である。量子力学の基本方程式はディラック (Dirac) 方程式であるが、今の場合、この方程式から出発する必要はなく、そのディラック方程式を非相対論の方程式に近似したシュレディンガー (Schrödinger) 方程式で議論して十分である。

量子力学は場の理論である。場とは力学変数が時間・空間の関数になっている事であり、実際、量子状態を記述する波動関数 (状態関数)  $\Psi$  は空間  $r$  の関数である。電磁気学における電場・磁場も場所の関数になっている。さらに現代物理の基礎である4個の相互作用はすべて場の理論で書かれている。従って、物理現象を理論的に理解しようとしたら、場という概念に慣れておくことが大切である。その「場」の基本である状態関数は分布関数と考えてよい。

### 8.1 量子論の物理量

量子力学は状態関数  $\Psi$  に対する2階の微分方程式 (シュレディンガー方程式) であり、この方程式を解くと状態関数  $\Psi$  とエネルギー固有値  $E$  が求められる。従って量子論ではこの方程式の解き方を理解する事が重要である。

#### 8.1.1 状態関数 (波動関数)

量子論で最も重要な物理量は状態関数  $\Psi$  であり、これが例えば電子の状態を記述している。この  $\Psi$  は時間と空間の関数、すなわち  $\Psi = \Psi(r, t)$  となっている。この状態関数は比較的局在している場合が多く、電場や磁場のように  $\frac{1}{r}$  の様な振る舞いはしていない。そのため、状態関数が遠方まで場を作っているということはあまりない。但し、自由粒子の場合、その状態関数は局在していないため箱に閉じ込めた波動関数となっている。

• 量子とは何か? : それでは「量子」(quanta)とは何であろうか?この言葉の物理的な意味を正確に理解するためにはかなり深く量子論を学び、沢山の演習問題を解いて初めて少しわかるものと思われる。量子に対して直感的な描像を持つ事は容易なことではないと言えよう。

• 量子とは何かの答え: ここで量子とは何かと言う質問に答えてみよう。量子とは「粒子(電子)の状態を指定する物理量である」と言えるであろう。量子力学においては、電子がどのような状態にいるのかという事が重要になる。すなわち、電子の量子状態を知る事が最も大切な問題となっている。電子の量子状態とは電子がどのようなエネルギーの状態にいて、どのような広がりのある分布関数として記述されるかと言う事である。その量子状態を指定する物理量が「量子数」(quantum number)である。この量子数は飛び飛びの値を必ず持つものであり、それを量子力学は保証している。

### 8.1.2 量子力学の方程式

電子の状態は状態関数  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  で記述され、その状態関数に対する方程式がシュレディンガー方程式であり

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (8.1)$$

と書かれる。 $\hat{H}$  はハミルトニアンと呼ばれ空間座標の関数である。式の左辺に複素数  $i$  が現れた理由はこの方程式が時間反転に対して不変性を保つためである。電子が束縛されている状態を取り扱う場合  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(\mathbf{r})$  と置いて時間依存性を取りはずして議論する。

• 時間に依らないシュレディンガー方程式: この場合  $\psi(\mathbf{r})$  に対するシュレディンガー方程式は

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad \text{但し} \quad \hat{H} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \quad (8.2)$$

となっている。このハミルトニアン  $\hat{H}$  は1粒子系のもので仮定している。 $m$  は電子の質量、 $U(\mathbf{r})$  は電子が感じるポテンシャルである。 $E$  は電子状態のエネルギーであり、これをエネルギー固有値と呼んでいる。ハミルトニアン  $\hat{H}$  はエルミート演算子であり、従ってその固有値  $E$  は常に実数である。この微分方程式を解くと波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  とエネルギー固有値  $E$  が同時に求まる事に

なっている．その時に状態を指定する量子数  $n$  が現われてくる．そしてこの量子数  $n$  によって指定されるために，状態関数に  $n$  をくっ付けて  $\psi_n(r)$  で表している．エネルギー固有値も同じで量子数  $n$  によって指定されるので  $E_n$  と書くのが一般的である．

- ポテンシャル  $U(r)$  は他粒子との相互作用：  $U(r)$  は電子が感じるポテンシャルであり，座標  $r$  はポテンシャルを生み出す中心から測られている．このポテンシャル  $U(r)$  は電子以外の何者か，例えば，水素原子では陽子がついているものである．この場合，電子は陽子に束縛されているという描像を取る．この時，陽子は止まっていると仮定しているがこれは充分良い近似になっている．この理由としては，陽子は電子と比べて約 2000 倍重いからである．

### 8.1.3 運動学

自由電子の量子状態はその運動量  $p$  とエネルギー  $E$  で表す事ができる．この場合， $p$  と  $E$  の間に関係式があり  $E = \frac{p^2}{2m}$  と書けている．この関係式は分散関係式 (dispersion relation) と呼ばれていて，これは運動学 (kinematics) として重要な役割を果たしている．この時，あるエネルギー  $E$  に対してその運動量はどのくらいかと言う事を大雑把に知って置く必要がある．この場合，運動量をその大きさを表し， $p = |p|$  と書くと分散関係式より  $p$  は  $p = \sqrt{2mE}$  となる．また，波数 (wave number) は  $k = \frac{p}{\hbar}$  と定義され，これは波長 (wave length)  $\lambda$  と  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  と結びついている．

- エネルギー  $E = 1 \text{ eV}$  の時，その運動量と波長は？： 運動量  $p$  は

$$p = \sqrt{2 \times 0.51 \text{ MeV}/c^2 \times 1 \text{ eV}} = 1010 \text{ eV}/c \quad \text{であり}$$

波長  $\lambda$  は  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{1010 \text{ eV}} = \frac{2\pi \times 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1010 \text{ eV}} = 1.22 \times 10^{-7} \text{ cm}$  であるが，これは  $12.2 \text{ \AA}$  に対応している．但し， $1\text{\AA} = 1.0 \times 10^{-8} \text{ cm}$  である．

### 8.1.4 ブラケットの表記法

量子論ではよくブラケットの表記法を使う．これは特に意味があるわけではなく，ただ単純に便利であるため使っているに過ぎない．状態関数  $\psi_n$  を  $\psi_n = |\psi_n\rangle = |n\rangle$  などと書く．この理由は状態関数をベクトル空間の状態と見

なすことができるからである．このため，内積を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_m dx \equiv \langle \psi_n | \psi_m \rangle \equiv \langle n | m \rangle$$

などと表現する．これは状態関数が量子数だけで指定されるからである．

• ハミルトニアン の 行列 表現： ハミルトニアン を 行列 で 表す 場合， ます 完全規格直交系の状態関数  $\psi_n$  ( $n = 1, \infty$ ) を用意して，その状態関数によりハミルトニアン の 期待値 を  $H_{nm} = \langle \psi_n | \hat{H} | \psi_m \rangle$  と取る．この  $H_{nm}$  はハミルトニアン の 行列要素 を 表して あり， 確かに 行列表現 となっている．この無限次元のハミルトニアン 行列 を 対角化 できると， 厳密な エネルギー固有値 が 求まる．

### 8.1.5 物理的観測量

量子力学の方程式を解けばエネルギー固有値  $E$  と波動関数  $\psi$  が求められる．エネルギー固有値  $E$  は観測量 (observables) になっている．それではそれ以外の物理的な観測量を得るにはどうしたら良いのであろうか？例えば水素原子を考えた場合，電子は確かに分布している．しかし，主にはどの辺にいるのか当然興味がある．その場合，物理的な観測量になるのは期待値であり，例えば

$$\langle r^2 \rangle_n \equiv \langle n | r^2 | n \rangle = \int \psi_n^*(\mathbf{r}) r^2 \psi_n(\mathbf{r}) d^3r \quad (8.3)$$

を状態ごとに計算すればよい．この場合， $\sqrt{\langle r^2 \rangle_n}$  が水素原子における  $n$  状態の電子軌道半径の平均値に対応していることがわかる．

## 8.2 古典力学極限

量子力学の方程式からニュートン方程式を導出する方法のことを古典力学極限と言う．それには  $\hbar \rightarrow 0$  の極限をとる方法などが知られているが，ここではエーレンフェスト (Ehrenfest) の定理を紹介しよう．

### 8.2.1 エーレンフェストの定理

シュレディンガー方程式からニュートン方程式を導出したのがエーレンフェストの定理と呼ばれるものである．

• 時間発展の方程式： 今，演算子を  $\hat{O}$  としてその期待値の時間発展をみて行こう．シュレディンガー方程式はハミルトニアンを  $\hat{H}$  とすると

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r},t), \quad -i\frac{\partial\Psi^\dagger(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi^\dagger(\mathbf{r},t) \quad (8.4)$$

である．この場合，演算子  $\hat{O}$  の期待値  $\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle$  に対する時間微分を行うと

$$i\frac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{O}\hat{H}|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{H}\hat{O}|\Psi\rangle = \langle\Psi|[\hat{O}, \hat{H}]|\Psi\rangle \quad (8.5)$$

である事がすぐに確かめられる．但し  $[A, B] \equiv AB - BA$  である．

• ニュートン方程式： ここで最も簡単な場合として， $\hat{H}$  が

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r) \quad (8.6)$$

で与えられる1粒子系を考えよう． $\hat{O} = r$  の時は

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|r|\Psi\rangle = \frac{1}{m}\langle\Psi|\hat{p}|\Psi\rangle \quad (8.7)$$

となる．また， $\hat{p}$  についても同じ計算を実行すると

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{p}|\Psi\rangle = -\langle\Psi|\nabla U|\Psi\rangle \quad (8.8)$$

と求まる．古典力学との対応を見やすくするために，古典的な物理量を

$$\mathbf{r} \equiv \langle\Psi|r|\Psi\rangle, \quad \mathbf{p} \equiv \langle\Psi|\hat{p}|\Psi\rangle, \quad \nabla U(r) \equiv \langle\Psi|\nabla U|\Psi\rangle \quad (8.9)$$

と定義しよう．この時，運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U(r) \quad (8.10)$$

となり，これはニュートン方程式そのものである．式(8.9)から明らかなように古典力学の  $r$  の時間依存性はすべて  $\Psi$  から来ている．

• 力とポテンシャル： シュレディンガー方程式からニュートン方程式が導出された事には物理的に重要な意味がある．それは量子力学ではポテンシャルにより全て記述されていて，力は基本的な物理量ではないことである．従って，古典力学においても力はポテンシャルの微分として捉えるべきである．それでは様々な形の力は何故でてきたのであろうか？これは実は多体系の問題を1体問題に無理やり帰着させると，複雑なポテンシャルが現われるからである．

## 8.3 自由粒子

電子に力が働かなければそれは自由粒子の状態となっている．自由粒子は束縛状態ではないので，その粒子は何処に存在しても構わない事になる．しかしその粒子が「月に存在する可能性」を議論する事は馬鹿げているし，実際には局在している電子を考えて充分である．このため，自由粒子を箱の中に閉じ込めた描像を取るのが正しい手法である．

### 8.3.1 自由粒子のシュレディンガー方程式

質量  $m$  の質点が自由粒子の場合，そのハミルトニアンは  $H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  であり，従ってそのシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (8.11)$$

と書かれている．自由粒子なのでエネルギー  $E$  は正であることに注意しよう．ここで波数  $k$  を  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  と定義すると式 (8.11) は

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.12)$$

と書ける．この微分方程式 (8.12) はすぐに解けて，その一般解は

$$\psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (8.13)$$

と書けている．ここで1個条件をつけることが必要となる．

• 運動量演算子の固有状態： 自由粒子のハミルトニアン  $H_0$  と運動量演算子  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$  は交換する．すなわち  $[H_0, \hat{p}] = 0$  である．このためこの状態関数は  $H_0$  と  $\hat{p}$  の同時固有状態となっている．よって

$$H_0\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (8.14)$$

$$\hat{p}\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\psi(\mathbf{r}) \quad (8.15)$$

である．この場合，この条件式から  $A = 0$  か  $B = 0$  である事がわかる．ここでは  $B = 0$  としよう．この時，式 (8.13) は  $\psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  となる．この状態関数の採用によって解の一般性が失われる事はない．

### 8.3.2 周期的境界条件

固有値を求めるためには境界条件が必要である。自由粒子の場合、粒子を箱の中に閉じ込めて、さらにそこに周期的境界条件 (periodic boundary condition) を課している。今の場合、粒子を一辺が  $L$  の箱に閉じ込めたとして

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y + L, z + L) \quad (8.16)$$

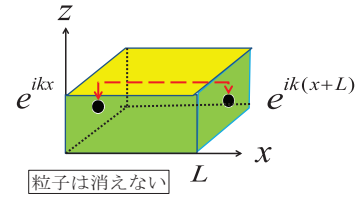


図 8.1: 周期的境界条件

が周期的境界条件である。この式に  $\psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  を代入すると  $\mathbf{k}$  が

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \quad (n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と求められる。

- 固定端の境界条件： 媒質を伝わる波の場合、その波動関数は実数 ( $\sin$  と  $\cos$ ) である。この場合、境界条件として固定端の境界条件を使っている。媒質の振動は波の存在確率とは無関係であるため、その振動がゼロになっていても不思議な事ではない。それに対して量子力学における自由粒子の状態関数は存在確率と関係しているので、状態関数がゼロになる事はない。従って、周期的境界条件は至極、自然な条件であることが納得できると思う。

- 規格化条件： 自由粒子の状態  $\psi(\mathbf{r})$  は一辺が  $L$  で体積  $V = L^3$  の箱の中に閉じ込められている。従ってこの粒子の状態関数  $\psi(\mathbf{r})$  は  $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  は整数) となっている。この状態関数が規格化条件 (normalization condition) を満たす事は簡単に示される。すなわち  $\int_V |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = \frac{1}{V} \int_V e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = 1$  より状態関数は規格化されている。

### 8.3.3 自由粒子のエネルギー固有値 $E_n$

これらの事より、自由粒子の状態のエネルギー固有値 (eigenvalue)  $E_n$  は

$$E_n = \frac{\mathbf{k}^2 \hbar^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2} \mathbf{n}^2 \quad (\mathbf{n} \text{ は整数})$$

と書かれている。ここでは、エネルギー固有値  $E_n$  に箱の長さ  $L$  が入っている。この場合、実際の世界ではこの  $L$  は十分に大きいのでエネルギー固有値

$E_n$  は連続スペクトルになっている．エネルギー固有値  $E_n$  に  $L$  が現れるのは不思議に思われるかもしれないが，物理的な観測量はこの  $L$  には依存していない事がわかっている．

## 8.4 水素型原子

電子が陽子の作るポテンシャル  $U = -\frac{e^2}{r}$  によって束縛される場合，そのシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{r} \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (8.17)$$

となっている．ここで  $m_e$  は電子の質量である．またポテンシャル  $U(r)$  は陽子が作るものであり，電気的な相互作用から求められている．

• クーロン力：ここでは水素型原子 (hydrogen-like atom) の問題を簡単に議論しよう．水素型原子の場合，ポテンシャル  $U(r)$  は  $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$  である．ここで  $Ze$  は原子核の電荷であり，水素原子の場合  $Z = 1$  である．このポテンシャルは極座標  $r$  の関数になっているので，シュレディンガー方程式を極座標 (polar coordinate) で書いて，その座標系で解く事になる．

### 8.4.1 極座標での微分方程式

$\nabla^2$  を極座標 (付録 B) で書くと式 (8.17) は  $\psi(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  として

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{r} \right] R_{n,\ell}(r) = ER_{n,\ell}(r) \quad (8.18)$$

となる．但し  $\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  を使った．ここで  $n, \ell$  は水素原子の状態を指定する量子数を表している．そして  $n = 1, 2, 3, \dots$  および  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  の値をとる．

### 8.4.2 エネルギー固有値

このシュレディンガー方程式を解くとエネルギー固有値  $E_n$  が求まり

$$E_n = -\frac{m_e(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.19)$$



となっている．束縛状態なのでエネルギー  $E_n$  は負である．よりわかり易い表現は  $E_n = -\frac{m_e c^2 (Z\alpha)^2}{2n^2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{137}$  であり，この形で覚えた方が良い．

- 水素原子のイオン化エネルギー： 具体的に  $Z = 1$ ,  $n = 1$  の場合を計算してみると  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$  より

$$E_1 = -0.511 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{137}\right)^2 \text{ MeV} \simeq -13.6 \text{ eV} \quad (8.20)$$

となり，これが水素原子の基底状態のエネルギーである．この  $13.6 \text{ eV}$  のエネルギーはイオン化エネルギーとも呼ばれている．それは  $13.6 \text{ eV}$  以上のエネルギーを水素原子に与えると電子が引き剥がされて自由電子となり，陽子（イオン）だけが残るからである．

### 8.4.3 波動関数

水素原子の一般的な波動関数の形は

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (8.21)$$

と書けている．ここで  $R_{n\ell}(r)$  が動径の波動関数， $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  が角度の波動関数になっている．ここで基底状態の波動関数だけ書いておこう．基底状態を表す量子数は主量子数  $n$  が  $n = 1$  である．角運動量の量子数  $\ell$  は  $\ell = 0$  である．この場合，基底状態の事を  $1s$  状態という．この波動関数は

$$R_{1s}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{Zr}{a_0}}, \quad Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{で与えられる．}$$

$a_0$  は Bohr 半径と呼ばれているもので  $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 0.53 \text{ \AA}$  である．

- 分布関数： 水素原子中の電子の基底状態の波動関数が

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{r}{a_0}} \quad (8.22)$$

と求められている．その電子の分布を  $\rho(r)$  とした時， $\int_0^\infty \rho(r) dr = 1$  の規格化条件が必要である．電子の基底状態の波動関数の場合， $\rho(r) \equiv 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$  とすれば確かに規格化されている．この分布関数は  $r = a_0$  でピークになっているため，基底状態の電子は主として  $r = a_0$  の付近に存在している事がわかる．

## 8.4.4 原子

原子は水素型原子に電子を順次, 低い状態から詰めて行く事により構成される。電子はフェルミオンなのでパウリ原理が働いている。

- パウリ原理： パウリ原理とは「電子は一つの量子状態には1個の電子しか入れない」という原理である。例えば, He 原子においては2個の電子が  $1s_{\frac{1}{2}}$  状態に存在している。電子はスピン  $\frac{1}{2}$  を持っているため, この状態はスピナップとスピンドアウンの2個の状態が存在しているからである,

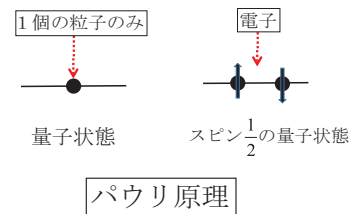


図 8.2: パウリ原理

- 水素型原子のエネルギー状態： 水素型原子のエネルギー準位は最低状態が  $1s_{\frac{1}{2}}$  であり, ここには2個の電子が入る事ができる。その次の状態として  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2s_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$  の状態が続いている。このエネルギー状態には全部で8個の電子が入る事ができる。この10個の電子が詰まった状態が Ne 原子である。これはエネルギー的に安定な状態になっていて貴ガス (noble gas) と呼ばれている。他の貴ガスとしては He, Ar, Kr, Xe などがある。
- パウリ原理の理論的根拠： 現在では, このパウリ原理はフェルミオン場を反交換関係による場の量子化により導出されることが示されている。

## 8.4.5 次元解析と単位系

力学変数の次元と単位について解説しよう。力学変数の次元を解析する時の出発点は水素型ポテンシャルのシュレディンガー方程式 (8.17) となる。この式においてエネルギーの次元を持つ定数は電子の質量  $m_e$  のみである。

- 次元のある定数： すべてのスケールは  $m_e$  で表現されるので  $m_e \sim M$  として  $M$  により次元を表そう。自由電子の分散関係式は  $E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2}$  である。光速  $c$  は無次元の定数なので  $c = 1$  としてよいので  $E \sim M, p \sim M$  である。電子の運動エネルギーは  $-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e}$  で  $\hbar$  は無次元の定数なので  $r$  の次元は  $r \sim M^{-1}$  となる。クーロンポテンシャルは  $V = -\frac{Ze^2}{r}$  なので  $e$  の次元は  $e \sim M^0$  であり無次元である。状態関数  $\psi$  は  $\int |\psi|^2 d^3r = 1$  より  $\psi$  の次元は  $\psi \sim M^{1.5}$  である。時間  $t$  は  $r$  と同じで  $t \sim M^{-1}$  となる。電磁気学の電場

$E$  と磁場  $B$  も同様に求まり  $E \sim M^2, B \sim M^2$  である．一方，ベクトルポテンシャル  $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$  の次元は  $A^\mu \sim M$  である．また重力場  $\phi_g$  の次元は  $\phi_g \sim M^0$  で無次元あるが，重力定数  $G$  は  $G \sim M^{-2}$  である．

- 単位系：空間と時間の次元は同じであるが，しかし力学変数を表すパラメータとしては勿論，異なっている．空間は m (メートル) で測られ，時間は s (秒) で測定される．従って速度  $v$  は m/s の単位をもつ無次元の力学変数である．また単位系を m  $\rightarrow$  cm などと変換しても力学変数の単位がなくなる事はない．これは力学変数の次元はその単位系とは異なっているからである．

## 8.5 調和振動子

1次元シュレディンガー方程式においてポテンシャルが  $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  の場合を調和振動子の問題と言う．このハミルトニアン  $\hat{H}$  は  $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$  として

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \text{と書けている．この時，シュレディンガー方程式は}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{となっている．}$$

- エネルギー固有値：ここで境界条件として  $\psi(\pm\infty) = 0$  を入れてこの微分方程式を解けば，答えが簡単に求まり，

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.23)$$

となる．固有値  $E$  を  $E_n$  と書くのは，エネルギー固有値が量子数  $n$  によって指定されるからである．

- 波動関数：さらに重要な事として，波動関数も解析的に求まってしまう．量子数  $n$  の状態の波動関数は  $\psi_n(x)$  は

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha^2}{4^n\pi(n!)^2}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2} \quad (8.24)$$

但し  $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$  であり， $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  と定義している．これは教科書でもよく議論されている問題であるが，しかし調和振動子の問題自体は物理的には現実的ではない．それは，このポテンシャルにおける状態には，散乱状態が存在していないのである．量子力学を自然界の記述に応用する時は必ず散乱状態が存在しているポテンシャル模型を使う必要がある．

### 8.5.1 生成消滅演算子

調和振動子のエネルギー固有値や波動関数を求める時、生成・消滅演算子を用いると便利で簡単である。まず、オペレータ  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  を次のように導入する

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p} \quad (8.25)$$

この時、 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  が直ちにチェックできる。ここで、数演算子を  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  と定義すると、 $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ ,  $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$  が計算で示される。さらに、 $\hat{N}$  の固有関数および固有値を  $\phi_n, n$  とすると  $\hat{N}\phi_n = n\phi_n$  となる。

この時、 $\hat{a}^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}$ ,  $\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$  が簡単に証明される。

- エネルギー固有値： これらの事より、調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

で与えられることが容易にわかり、これは式 (8.23) と一致している。

- 波動関数： この手法により波動関数も求められる。 $\hat{a}$  が消滅演算子である事から、基底状態  $\phi_0$  の状態に  $\hat{a}$  をオペレートするとゼロになる。すなわち  $\hat{a}\phi_0 = 0$  である。この式を微分で書き直すと

$$\left( \frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_0(x) = 0$$

となり、これは直ちに解けて  $\phi_0(x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$  となる。この基底状態の波動関数から励起状態の波動関数は

$$\phi_n(x) = N_n \left( \frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \phi_0(x)$$

と決められてしまうのである。この  $\phi_n(x)$  は先に求められた式 (8.24) と勿論一致している。但し、 $N_n$  は規格化定数である。

### 8.5.2 調和振動子は何故、使われるか？

調和振動子ポテンシャルは散乱状態が記述できないのに何故、良く使われるのであろうか？これには勿論、理由がある。一般の問題は多体問題であり複雑

すぎて解けない場合が大半である．そのため近似をして無理やり1体問題に直してしまう場合が良くみられる．こうして求められた1体問題のポテンシャルを  $U(x)$  としよう．このポテンシャルはある場所  $x_0$  で最小になっているので  $U(x)$  を  $x_0$  の回りで展開する．この場合

$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots$$

となる．ここで  $x = x_0$  で  $U(x)$  が最小値となることから  $\frac{dU(x_0)}{dx} = 0$  である．さらに  $k \equiv \frac{d^2U(x_0)}{dx^2}$  とすれば  $U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \dots$  となっている． $U(x_0)$  は定数であるから，これは調和振動子ポテンシャルそのものである．但し，この振動が微小振動であることが必須条件である．

## 8.6 光電効果

光が粒子の性質を強く示している現象が光電効果 (photoelectric effect) である．これは光が物質中の電子と相互作用してその電子にエネルギーを与える物理過程を示している．その際，格子 (電荷  $Z$ ) に束縛されている電子がフォトンを受取り準自由電子になる．

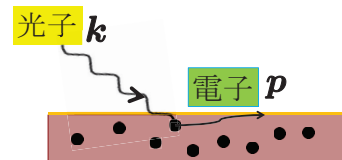


図 8.3: 光電効果

ここでフォトンの運動量を  $k$ ，束縛電子のフェルミ運動量を  $p_F$ ，その衝突後の運動量を  $p$  とすると  $k + p_F = p$ ， $k + E_B = \frac{p^2}{2m_e}$  が運動量とエネルギーの保存を示したものである．但し  $E_B$  は束縛電子の束縛エネルギーである．フォトンの吸収確率はフォトン - 束縛電子の散乱断面積により決まっている．このフォトン - 束縛電子の散乱断面積  $\sigma_K$  は

$$\sigma_K \simeq \sigma_{Thom} Z^5 2^{1.5} \left( \frac{m_e}{k} \right)^{3.5}$$

と求められている [1]．ここで  $\sigma_{Thom} \simeq \frac{8\pi}{3} r_e^2$  はトムソン散乱の断面積を表し，光と電子の散乱を記述している．但し  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$  は古典電子半径を表し  $r_e = 2.82 \times 10^{-13}$  cm である．

- 太陽光発電： 光電効果により光を吸収した電子を電流として取り出し，そ

れを太陽電池としてエネルギー変換したのが太陽光発電である。この場合、半導体を利用する事により電子のエネルギーをうまく電流に変換している。しかし、光と物質の散乱で熱エネルギーに転換する部分をどの程度抑えられるかが高い変換効率を得るポイントであろう。

## 8.7 ゼーマン効果

ゼーマン (Zeeman) 効果は現在の物理で最も広く応用されている現象である。ここではこの現象をなるべく簡単に解説してその応用について紹介しよう。

### 8.7.1 摂動論

まずは摂動論について簡単に解説しよう。系の観測量を近似的に求める方法のうちで最も重要な計算手法が摂動論である。この解説は少し難しいかも知れないが、最終的な計算式のみを覚えておけば量子論の応用には充分である。

- 摂動論の定式化： 摂動論とはすでに解かれている状態関数によって摂動的な弱い相互作用の効果をうまく評価する手法の事である。その場合、状態関数は非摂動項の固有関数 (すでに手元にある) を用いることである。これから議論する系のハミルトニアンを  $H = H_0 + H'$  としよう。この時、第1項 ( $H_0$ ) が非摂動ハミルトニアン、第2項 ( $H'$ ) が摂動ハミルトニアンである。
- 非摂動ハミルトニアンとその固有関数： 摂動論においては  $H_0$  の固有関数とその固有値はわかっているものとしている。

$$H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (8.26)$$

さらにこの固有関数が次のような諸性質を持っていると仮定している。

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{n,m}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1 \quad (8.27)$$

第1式を直交性、第2式を完全性と呼んでいる。この場合、この固有関数は完全規格直交系であると言われる。

- 1次と2次の摂動エネルギー： ここでは  $n = 0$  を基底状態として、この状態に対する摂動補正を考えて行こう。この場合、基底状態の非摂動エネルギーは  $E_0$  である。これに対して、1次の摂動エネルギー  $\delta E_0^{(1)}$  は

$$\delta E_0^{(1)} = \langle\psi_0|H'|\psi_0\rangle \quad (8.28)$$

と書かれている．一方，2次の摂動エネルギー  $\delta E_0^{(2)}$  を求めると

$$\delta E_0^{(2)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \psi_0 | H' | \psi_k \rangle|^2}{E_k - E_0}$$

となり，2次の摂動エネルギーは常に引力的(負のエネルギー)である．

### 8.7.2 ゼーマン効果によるエネルギー分裂

摂動的な効果でも量子論で重要な役割をしているものがゼーマン効果である．磁場  $B$  を掛けると中性の原子でもその効果が観測に掛かるが，これは電子や陽子のスピンの磁場に反応してエネルギー分裂を惹き起こしているから

である．例えば，陽子に対する摂動ハミルトニアンは  $H' = -\frac{e\hbar}{2Mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$  と書かれる．但し  $M$  は陽子の質量である．

ここで磁場の方向を  $z$ -軸にとると

$H' = -\frac{e\hbar B}{2Mc} \sigma_z$  と書ける． $\sigma_z$  の固有値は  $1$  か  $-1$  なので，この2個の状態間の分裂エネルギーは  $\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}$  となる．これはゼーマン分裂 (Zeeman splitting) エネルギーと呼ばれている．

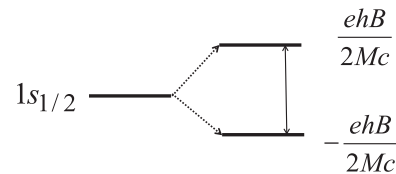


図 8.4: ゼーマン分裂

### 8.7.3 傾斜磁場とMRI

ゼーマン効果により水素原子中の陽子は分裂エネルギーに対応する電磁波を放出する．傾斜磁場の考えを使うとこの電磁波の測定から陽子の位置が計測できる．この処方が MRI (Magnetic Resonance Imaging) である．

- ゼーマン効果のエネルギーと電磁波： 陽子のスピンは  $\frac{1}{2}$  であり，磁場を掛けると状態が2個に分裂する．この分裂のエネルギーは  $\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}$  であり，このエネルギーに対応して電磁波が放出される．しかしこのエネルギーは小さく，従って放出される電磁波の波長は長い．このため，この電磁波の波長そのものから電磁波を放出した陽子の場所を特定する事は不可能である．

- 傾斜磁場： ここで Lauterbur によって提案された傾斜磁場という概念を紹介しよう．これはゼーマン効果のエネルギーに対応する電磁波を測定してどこ

の陽子から放出されたかを特定できる手法である．陽子のゼーマン分裂のエネルギーは  $\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}$  なので，対応するフォトンの振動数は  $\omega = \frac{eB}{Mc}$  である．観測するのはこのフォトンの振動数である．

今，外部磁場  $B$  に対してこれが特別な座標依存性を持つように設定しよう．簡単のために，1次元系を考える．この時， $B$  が  $0 < x < a$  の範囲内で

$$B = B_0 x \quad (0 < x < a) \quad (8.29)$$

のような座標依存性がある場合を想定しよう．この場合，フォトンの振動数  $\omega$  と座標  $x$  が一対一の対応をする事がわかる．それは  $x = \frac{\omega Mc}{eB_0}$  の式から明らかである．

すなわち， $\omega$  を測定する事によりその陽子が光子を発生する場所  $x$  が特定できる事を意味している．今は1次元での議論であるが，この問題を3次元にうまく拡張できれば，例えば人間の体内における水分子の分布状況がわかる事になっている．これがMRI手法の基本的なメカニズムであり様々な応用がなされている．

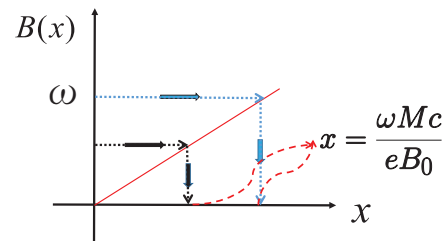


図 8.5: 傾斜磁場

## 8.8 原子核と核分裂

原子 (atom) の中心に存在しているのが原子核 (nucleus) である．原子核は陽子と中性子 (neutron) (総称して核子 (nucleon) と呼ぶ) から構成されている．最も軽い原子核は重陽子 (deuteron) であり陽子 1 個と中性子 1 個からできている．一般の原子核は通常  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$  などと書く．この場合，質量数  $A$  は  $A = 56$  であり，原子番号  $Z$  は  $Z = 26$  である．この Fe は鉄を表し，安定な原子核 (核子あたりの束縛エネルギーが最大) の一つであることが知られている．さらに重くなると，ある種の原子核は核分裂 (fission) を起こし，例えば  ${}_{92}^{235}\text{U}$  は核燃料として広く使われている．

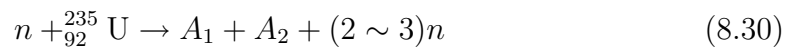


### 8.8.1 原子核中の中性子

原子核中の陽子と中性子は強い相互作用により束縛されている。通常、中性子は  $n \rightarrow p + e^- + \nu$  と  $\beta$  崩壊 (decay) するため不安定で、その寿命は約 15 分である。しかし原子核中の中性子は安定である。これは原子核を構成する中性子が  $A \rightarrow (A-1) + p + e^- + \nu$  と  $\beta$  崩壊しようとしても、この終状態の全エネルギーが最初の  $A$ -原子核の状態よりも高い場合、この原子核の  $\beta$  崩壊は起こらないからである。このため原子核中の中性子は安定となっている。

### 8.8.2 核分裂

核分裂には主に 2 種類ある。例えば  ${}_{92}^{238}\text{U}$  は **自然核分裂** (spontaneous fission) を起こしその寿命は約 45 億年である。この  ${}_{92}^{238}\text{U}$  原子核の自然核分裂エネルギーが地球内部を暖めている主な原因であると考えられている。一方、 ${}_{92}^{235}\text{U}$  などの重い原子核では中性子  $n$  を吸収して核分裂する事が実験的に知られている。式で書くと



となる。ここで  $A_1, A_2$  は  ${}^{137}\text{Cs}$  などの質量数  $A$  が 100 前後の原子核を表している。この反応で重要な事が 3 つある。一つ目はこの反応で生成されるエネルギーが石炭を燃やした場合の約百万倍も大きいことである。二つ目として、核分裂反応において、必ず 2 個か 3 個の中性子が生成されると言う事である。この中性子が次の核分裂反応に寄与することになる。さらに三つ目として、この核分裂が起こる確率は吸われる入射中性子のエネルギーがほとんどゼロ (熱中性子と言われるがそのエネルギーは約 0.03 eV) の場合に最も大きいと言う実験事実である。このため、核分裂では外部エネルギーを必要としない。

● 連鎖反応： 連鎖反応 (chain reaction) とはこの生成された2個か3個の中性子が再び他の $^{235}_{92}\text{U}$  に吸われて核分裂反応を起す現象を表している。そしてこの核分裂の連鎖反応が継続して起こっている状態を臨界 (criticality) という。この場合、生成された中性子の数とそのエネルギーがうまく制御されて、全体として核分裂反応が常に同じ割合で起こっている状態となっている。

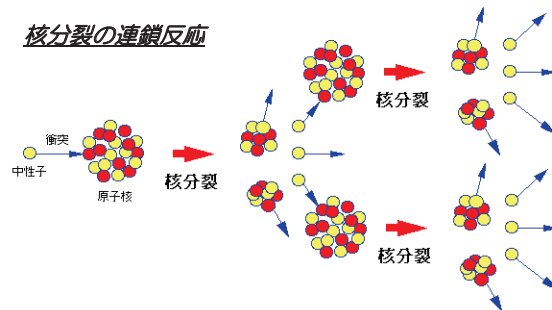


図 8.6: 連鎖反応

● 濃縮ウラン： 自然界に存在するウランは $^{238}_{92}\text{U}$  がほとんどであり、その存在比は99.3%である。しかしこの $^{238}_{92}\text{U}$  は式(8.30)の核分裂反応を起こす確率は非常に低い。このため、核燃料として使うためにはウラン中における $^{235}_{92}\text{U}$  の比率を数%以上に高める必要がある。 $^{235}_{92}\text{U}$  を数%以上混ぜたものを濃縮 (enriched) ウランと呼んでいる。

● 原子炉： 連鎖反応を継続して行わせるためには核分裂で生成される中性子のエネルギー(約1 MeV)を熱中性子(約0.03 eV)に変換する必要がある。このため核分裂で生成された中性子を主に水と衝突させることにより熱中性子に変換して、核分裂連鎖反応に利用している。このように、中性子のエネルギーを制御することにより核分裂連鎖反応から原子力エネルギーをうまく取り出したのが原子炉 (nuclear reactor) である。

## 8.9 量子生物

生物は量子論の多体系そのものである．例えば，生物における神経の伝達を考えると，その情報を伝えるものは電子と考えられる．これは密度波として伝達するよりも電流のように電子が情報を伝えるものであろう．しかしこの場合，どのように電位差ができ，さらに最小単位の電位差は一体どのくらいなのかを調べる必要がある．その際，電場にしても磁場にしても，それらの場が溶液中でどう振舞うのかと言う問題はまだほとんどわかっていない．この溶液中での物理が重要なことは，生物での現象が基本的に溶液中での化学反応に対応している事から明らかである．これは超低エネルギー電子の物理であるが，しかしこれまでほとんど研究されていない．その理由の一つとして，超低エネルギー電子が重要になる自然現象として直接観測されるものがあまり知られていなかった事が挙げられよう．生物を電子の言葉で理解しようと言う量子生物 (quantum biology) の研究はまだ始まったばかりでもある．

### 8.9.1 水電子とフォトン

生物における化学反応においては水の中の電子の振る舞いが重要となっている．恐らく，準自由電子と言える電子が存在しているものと考えられる．

- 水分子の熱ゆらぎと電子の運動： 水は 0 K 以上なので，この熱は 0.03 eV 程度の分子運動エネルギーに対応している．水分子による，例えば 2.45 GHz のマイクロ波エネルギー ( $\Delta E \sim 10^{-5}$  eV ) の吸収と比較すると，分子運動の熱ゆらぎ (thermal fluctuation) はマイクロ波エネルギーよりも遥かに大きい事がわかる．ここで電子の速度  $v_e$  と分子運動の速さ  $V_{H_2O}$  を比較してみると電子の速度は  $v_e \simeq 6.3 \times 10^{-6}c$  であり一方，水分子の熱運動の速度は  $V_{H_2O} \simeq 1.9 \times 10^{-6}c$  である．よって電子の方が少し速く運動している．

● 電子レンジと水の準自由電子による電磁波吸収： 水の中の電子が電磁波をどのように吸収するかというメカニズムを考えよう．電磁波により物質にエネルギーを与える方法として，マイクロ波を用いた「電子レンジ」がよく知られている．この電磁波の周波数として 2.45 GHz が日本では使われているが水分子 1 個の共鳴状態はこれよりも 3 桁も高い周波数領域にある．従って水によるマイクロ波吸収の機構は水分子の共鳴状態による吸収とは無関係である．

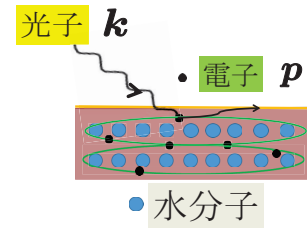


図 8.7: 水の電磁波吸収

● 水分子の量子状態： マイクロ波を吸収する量子状態は励起エネルギーが  $\Delta E \simeq 1.01 \times 10^{-5}$  eV であるから，吸収直後の電子の波長は  $\lambda \simeq 3900 \text{ \AA}$  である．恐らくこの電子は水特有の量子状態であり，水における「準自由電子」と考えられる．よって電子レンジは光電効果と同じメカニズムでこの電子によるフォトンの吸収が起こっているものであろう．マイクロ波を吸収した後の電子は他の水分子との衝突を繰り返して熱エネルギーに変換されるものと考えられる．これは「水光電効果」(hydro-photoelectric effect) とでも呼ぶべき物理過程である．宇宙の背景放射はマイクロ波であり「水光電効果」はこの電磁波が水に吸収されて熱エネルギーに変換されている事を示している．

### 8.9.2 磁場とコリオリ力

生物は地球上においてその方向を感知することができている．特に鳥は南北の方向がわかって飛んでいる場合が見られている．何故，方向がわかるのであろうか？一つの目印は太陽であろう．太陽の光を感知することにより，ある程度，方向がわかるものと考えられる．

● 地磁気による方向： 太陽に加えて，地磁気も南北にその地磁気があるため，そこから方向を知ることができる可能性はある．しかし注意すべき点として，量子論では相互作用として  $H' = -\mu \cdot B$  と現れている事である．このため，地磁気の方角を知るためには準マクロスケールのレベルで体内の磁気双極子  $\mu$  の方角を決めておく必要があると考えられる．

● コリオリ力による方向： 地上では見かけの力としてコリオリ力が現れる

ことを力学では検証している．しかし量子論ではそれはポテンシャルとして現れてくる．実際，計算してみると見かけ上現れた相互作用は  $H_C = L \cdot \omega$  である．ここで  $L$  は質点の角運動量であり  $\omega$  は地球の回転角速度である．

• 方向の測定： 古典力学ではコリオリ力により，力が東の方向に働くことがわかったが，量子力学ではエネルギー分裂のみが観測量となっている．このことは磁場に関しても同じであり量子論ではゼーマン分裂のエネルギーだけが観測量である．従ってこの物理量だけから方向を見つけることは不可能であり何か別の物理量を考える必要がある．これらの方向を生物が知るためには例えば，タンパク質に強い異方性を持った磁気双極子があれば可能となる．この方向を光の吸収に合わせて決定して，これより磁場やコリオリ力の方向を決めることは物理的には可能と言えよう．但し，コリオリ力による  $H_C$  はあまりにも小さすぎて，この影響の検知は不可能であろう．

## 8.10 第8章の演習問題

問1 絶対温度が 300 K の物資の熱エネルギーは約  $\frac{1}{40}$  eV に対応している．電子がこのエネルギーを持っている時，その波長を計算せよ．

問2 エーレンフェストの定理に従って，シュレディンガー方程式 (8.4) からニュートン方程式 (8.10) を導け．

問3 水素原子のエネルギー固有値を書け．この時，イオン化エネルギーはいくらであるか？

問4 電子の基底状態の分布関数は  $\rho(r) = 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$  である．この時， $\int_0^\infty \rho(r) dr = 1$  を示せ．また  $\rho(r)$  を図示してその最大値を与える  $r$  の値を求めよ．

問5 生成・消滅演算子オペレータ  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p} \quad \text{で定義する.}$$

(a)  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  を示せ．

(b) 数演算子を  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  と定義する．この時

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad \text{を示せ.}$$

(c)  $\hat{N}$  の固有関数および固有値を  $\phi_n, n$  とすると  $\hat{N}\phi_n = n\phi_n$  である．この時， $\hat{a}^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}$ ， $\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$  を示せ．これより，調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{となる事を証明せよ.}$$

問6 ゼーマン効果のハミルトニアンは  $H' = -\frac{e\hbar B}{2Mc} \sigma_z$  である．この時，低い状態のエネルギーは  $E^{(1)} = -\frac{e\hbar B}{2Mc}$  となる事を示せ．

## 付録A 準備

自然現象を理解しようとする時、物理学ではその言語として数学を使っている。その場合、数学を覚えるだけでなくそれを使えるまで練習する必要はある。語学における会話と同じであるが、その練習方法は簡単な計算を繰り返し行うことである。ここでは物理学でよく使う数学を解説しよう。その数学の基礎は微分である。その微分を行う際に必要となるのは「関数」であり、その概念は非常に便利である。従って、この関数に慣れる事は必須であろう。

### A.1 関数とは？

まず平面を考えて、そこに座標系を導入してその横軸と縦軸を頭に入れてみよう。横軸を  $x$ -軸とし、縦軸を  $y$ -軸としよう。この  $y$ -軸が関数  $f(x)$  の値を示す事になる。この  $f(x)$  の意味は  $x$  の値を入れたら縦軸の値が決まると言っている。これが「関数」という言葉の定義である。それでは関数の形はどうなっているのかと言うと、 $f$  という表記がその形を表している。例えば、原点を通る直線だったら

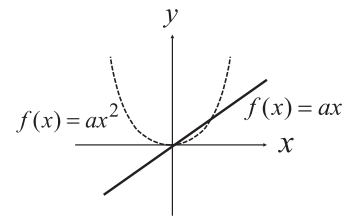


図 A.1: 関数

$f(x) = ax$  と書く事ができる。この場合  $a$  は 3 とか 0.2 とかの定数である。よく使う関数に放物線があり、放物線で原点を通るものは  $f(x) = ax^2$  と書き表す事ができる。結局、関数とは  $x$  という「変数」の値を決めるとそれに応じて  $f(x)$  の値が決まると言っているだけであり、それ以上の概念ではない。しかし、関数の形を一般的に  $f$  で表している事でもあり、これが関数の言語に対応しており、非常に便利である事は間違いない。

## A.2 微分

微分とは傾きの事を表している．微分係数はその傾きの角度を  $\theta$  とする時， $\tan \theta$  (タンジェント) で表されている．但し，微分の言う傾きは基本的に言って1点の傾きである．1点の傾きとは意味がないと思われがちだが，十分意味があるように定義できている．すなわち，ある点を考えた時，その点から微小部分離れた点を考えて，この2点間の傾きを微分と言う．この2点を無限に近くすることが「極限操作」と呼ばれている．

### A.2.1 傾きの重要性

それでは「傾き」が何故それ程重要なのであろうか？これを具体的な坂道で考えてみよう．その道が坂となっているとき，その坂の傾きは歩行者にとって重要である．坂が上り坂であればこれから歩くのに大変であろうし，下り坂ならば少し楽になる．この場合，傾きが正であれば上り坂だし，負であれば下り坂である．この傾きが正か負かの問題は少なくとも歩き出して数歩に関しては正しいものと言えよう．傾きがゼロであれば道はしばらくは平坦である事を示している．ここで山の頂上かまたは谷の底かの判断は比較的簡単にわかる．坂を登って行って（傾きは正），ある点で傾きがゼロとなりその後は傾きが負になったとすれば山の頂上を超えた事になる．これよりその近辺においては傾きがゼロになる点が最大値か最小値を与えることはわかる．

### A.2.2 関数の微分

関数の微分とはある点とその直ぐ近くの点（前後どちらでも良い）での傾きを意味している．今， $x$  からほんの少し ( $\Delta x$ ) ずれた点  $x + \Delta x$  への傾き ( $f'(x)$  や  $\frac{df(x)}{dx}$  と書いて微分係数と呼ぶ) は傾きの定義から

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.1})$$

となる．ここで  $\simeq$  という記号はほぼ等しいが厳密には少しずれているという意味である．少しずれる可能性があるのは  $\Delta x$  は十分小さいがゼロではないからである．ここで問題なのは， $\Delta x$  はどのくらい小さく取ればよいのか？と言うことである．例えば  $\Delta x$  として  $\Delta x \simeq 10^{-100}$  と取ったらもはや現実的にはゼロと同じである．数学ではこの  $\Delta x$  の値を十分小さく取るという言語を



「極限」と言う．具体的に  $f(x) = ax^2$  の時に計算してみると

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x \quad (\text{A.2})$$

となる．この右辺の最後の項は  $\Delta x$  を限りなくゼロに近い値を取るので無視して良く，従って

$$f'(x) = 2ax \quad (\text{A.3})$$

となる．ここで微分で重要な事は，幾つかの関数形に対してその微分係数  $f'(x)$  をある程度の計算練習をして覚えてしまう事である．物理でよく使う関数形とその微分係数は以下であろう．但し  $n$  と  $\alpha$  は任意の定数．

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x^n & f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \sin \alpha x & f'(x) = \alpha \cos \alpha x \\ f(x) = \cos \alpha x & f'(x) = -\alpha \sin \alpha x \\ f(x) = \tan \alpha x & f'(x) = \frac{\alpha}{\cos^2 \alpha x} \\ f(x) = e^{\alpha x} & f'(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ f(x) = \ln \alpha x & f'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

### A.2.3 合成微分

関数  $f(x)$  の変数  $x$  が時間  $t$  の関数になっている時，この  $f(x)$  を時間  $t$  で微分した計算結果を導出しよう． $y = f(x(t))$  の時

$$\begin{aligned} \frac{df(x(t))}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t)) - f(x(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t) + \Delta x) - f(x(t))}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

である．但し， $\Delta x \equiv x(t + \Delta t) - x(t)$  と定義している．これより公式として

$$\boxed{\frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt}} \text{ を覚えておこう.}$$

## A.3 積分

微分と積分はほとんど何時でも対になって教えられている．これは微分と積分が結びつく事が証明されているからである．

### A.3.1 領域としての面積

積分は面積で定義されている．1辺が  $a$  の正方形を考えるとその面積  $S$  は  $S = a^2$  であり，これが面積の定義である．この時，辺の長さが  $a$  と  $b$  の長方形の面積は  $S = ab$  である事が直ぐに確かめられる．次に関数  $f(x)$  と  $x$ -軸で囲まれる領域を考えよう．関数  $f(x)$  が  $f(x) = c$  という  $x$ -軸に平行な直線の場合， $x = a$  から  $x = b$  までの領域の面積  $S$  は  $S = |c| \times |b - a|$  である． $|c|$  は絶対値を表す記号であり，必ず正の値にしなさいという命令である．

• 面積の一般化： 積分における面積の定義ではこの絶対値をはずしている．従って積分による面積は正・負の両方の値が存在している．この一般化によって積分による面積の定義に矛盾点がない事が数学的に証明されている．

### A.3.2 積分の定義

今，関数  $f(x)$  と  $x$ -軸で囲まれる領域を考えよう．さらに  $x = x_0$  から  $x$  までの領域の面積を  $S(x)$  としよう．この面積は小さな長方形に分けて計算する．例えば， $x$  を 10 区間  $x = x_1, x_2, \dots, x_{10}$  に分けてこの領域を 10 等分する． $x = x_1$  における関数  $f(x_1)$  の値と  $x_0$  から  $x_1$  までの長方形を  $S_1 = f(x_1)\Delta x$  とし，次に  $f(x_2)$  の値と  $x_2 - x_1$  までの長方形を  $S_2$  として，次々に長方形を作って行く．

この場合，10個の長方形ができるので  $S(x) \simeq S_1 + S_2 + \dots + S_{10}$  と書ける．ここで和の記号  $\sum$  を  $S(x) \simeq S_1 + S_2 + \dots + S_{10} \equiv \sum_{i=1}^{10} S_i$  と導入する．これはまだ厳密な面積ではない．分割を無限個にした式が

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (\text{A.6})$$

である．ここで  $\Delta x$  は  $\Delta x = \frac{x-x_0}{n}$  であり，また  $x_n = x$  に対応している．

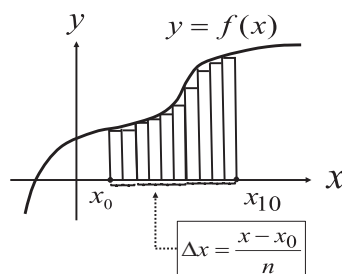


図 A.2: 積分

### A.3.3 数値積分

この様に定義した積分の式は確かに正しい面積を与えている。例えば,  $x > 0$ ,  $y > 0$  の第 1 象限を考えて, そこで半径  $a = 1$  の円と  $x$ -軸と  $y$ -軸から作られる面積を計算しよう。まず  $n = 10$  で具体的に計算してみると答えは  $S(1)_{(n=10)} = 0.73$  となる。次に計算機に計算させて  $n = 10^8$  の場合の値をみると  $S(1)_{(n=10^8)} = 0.78539811$  となり, これは  $\frac{\pi}{4} = 0.785398163$  の値にかなり近い。これより  $n$  の値を無限大にすれば正しい答えが求まる。

• FORTRAN のプログラム: ここで単純な FORTRAN のプログラムを書いておこう。これは第一象限における半径  $r = 1$  の円の面積の計算プログラムで, 分割は  $N = 100000000$  である。厳密な答えが  $\frac{\pi}{4}$  なのでこの面積を 4 倍して  $\pi$  の値と比較しやすくしている。

```

PROGRAM DAIKEI
OPEN(6,FILE='DAIKEI.DAT')
XMAX=1
N=100000000
H=XMAX/FLOAT(N)
ANS=0
DO 1 I=1,N
X=H*FLOAT(I)
ANS=ANS+H*SQRT(1.0-X*X)
1 CONTINUE
ANSPAI=ANS*4.0D0
WRITE(6,100) N,ANSPAI
100 FORMAT(1H,'N=',I10,5X,'ANS=',E10.6/)
STOP
END

```

こうすると DAIKEI.DAT というファイルに答が出ていて  
 $N = 100000000$        $ANS = 0.314159E+01$  となっている。

## A.4 微分と積分の関係

積分の範囲が  $x + \Delta x$  までの面積は  $S(x + \Delta x)$  である．ここでこの2つの面積の差  $S(x + \Delta x) - S(x)$  は図を書けばわかるように  $f(x)\Delta x$  であり

$$S(x + \Delta x) - S(x) = f(x)\Delta x \quad (\text{A.7})$$

となっている．但し  $x_n = x$  を使っている．

この式の両辺を  $\Delta x$  で割ると

$$\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x) \quad (\text{A.8})$$

となる．今， $n \rightarrow \infty$  を実行すると  $\Delta x = \frac{x}{n} \rightarrow 0$  であるから

$$f(x) = \frac{dS(x)}{dx} \quad (\text{A.9})$$

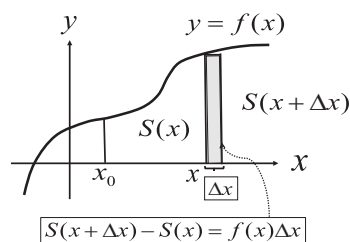


図 A.3: 微分と積分

となる．すなわち，積分量を微分したら元の関数が求まる．従って

$$S(x) = \int_0^x f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad (\text{A.10})$$

と書く事ができる．積分記号  $\int_0^x$  の上下は積分の範囲を表していて，関数  $f(x)$  を  $x = 0$  から  $x$  まで積分しなさいという意味である．よって

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x')dx' = f(x) \quad (\text{A.11})$$

となる．積分中の  $x$  は外部変数  $x$  と区別するため  $x'$  としている．

- ゼロの積分： ゼロを積分したらどうなるかと質問されることがよくあるが

$$\int 0 dx = 0$$

である．これは式 (A.6) において  $f(x) = 0$  だから式 (A.11) は使えない．

## A.5 ベクトル

3次元空間での点Pを座標  $(x, y, z)$  で表す時, ベクトル  $r$  を

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

などと定義する. この段階では並べて書いてだけである.

### A.5.1 ベクトルの内積 (スカラー積)

ここで2個のベクトル量  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  と  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  に対して

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \equiv x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (\text{A.13})$$

という内積を定義しよう. この場合「内積の演算」が通常の演算法則に必要な条件をすべて満たしている事が証明されている.

### A.5.2 ベクトルの極座標表示

ベクトル  $r$  を極座標で書くと  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  となる.  $r$  はこのベクトルの大きさを表している. また  $\mathbf{e}_r$  は動径方向の単位ベクトルを意味している. この事はベクトルが「大きさと方向」によって表されていることを示している. ついでに2個のベクトル量  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の内積を極座標表示で書くと

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_1r_2 \cos \theta_{12} \quad (\text{A.14})$$

となる.  $\theta_{12}$  は2個のベクトル間の角度を表している. どちらの内積の定義を使っても結果は同じであるが, 便利さにおいて差が出る事も良くある.

- 2次元ベクトル  $r$ : 2次元平面でベクトル  $r$  を極座標表示すると  $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  なので  $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$  となっている.

### A.5.3 ベクトルの外積 (ベクトル積)

2個のベクトル量  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  には「外積」も定義できる. 何故, 2個のベクトルからまたベクトルが作る事が出来るかと言う問題は「群論」を使うと理解

できるがここでは議論しない．2個のベクトル量  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の外積は

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \equiv (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - z_1 x_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \quad (\text{A.15})$$

である．この式の覚え方は色々あるが，行列式で覚えるのが最も便利だと思われる．これは下記のように書かれる．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{e}_x + (z_1 x_2 - z_1 x_2) \mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

ベクトルの外積の事をベクトル積と呼ぶ事も良くある．このベクトル積には大切な性質がある．定義から明らかなのだが， $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の外積には

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 \quad (\text{A.17})$$

が成り立っている．このため，おなじベクトルの外積はゼロである

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.18})$$

#### A.5.4 一般化されたベクトル

数学ではベクトル空間という言葉を使う．これは座標空間とは関係なくベクトルを定義するからである．ベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (\text{A.19})$$

として  $n$ -次元ベクトルと呼ぶ事がある．内積はこれまでと同様に

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (\text{A.20})$$

と定義されている．外積は  $n \geq 3$  で定義されるが，一般的ではないので3次元空間のみを覚えておけば十分である．

## A.6 行列

行列について議論しよう．ここでは 2 行 2 列の正方行列  $A$  を考えて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

と書く． $a_{11}$ ,  $a_{12}$  など ( $a_{ij}$  と書く) を行列の成分という．勿論, これらは単なる数である．この段階での行列はただ並べて書いただけである．ここでもう一つの行列  $B$  を考えよう．

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

この場合, 2 つの行列の足し算はそれぞれの成分同士を足せばよい．

### A.6.1 行列の積

ここで 2 個の行列の掛け算を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

と定義しよう．この式を覚えるのは結構大変であるが, しかし覚えるしか方法はない．覚え方として,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1,2} a_{ik}b_{kj} \quad (\text{A.24})$$

がある．すなわち, 行列の積  $AB$  の  $(i, j)$  成分  $(AB)_{ij}$  はそれぞれの成分  $a_{ik}$  と  $b_{kj}$  を掛けて  $k$  で和を取ればよいと言う事である．

● 行列の割り算は定義されない! : それでは行列の割り算はどうであろうか? 行列の割り算は単純には定義できないし, 物理には不要である．

### A.6.2 エルミート行列

物理で最も重要な行列はエルミート行列であろう．この場合, 行列要素は複素数となっている．行列  $A$  がエルミート行列であるとは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^\dagger \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

の事である．すなわち,  $a_{ij} = a_{ji}^*$  である．

### A.6.3 エルミート行列の固有値は実数

エルミート行列の固有値方程式を書くと

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

であり,  $\lambda$  が固有値である. この  $\lambda$  が実数である事を示そう.

• 複素数ベクトルの内積: ここで複素数ベクトルの内積を

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \sum_{i=1,2} u_i^* v_i \quad (\text{A.27})$$

で定義しよう. この時

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = \sum_{i=1,2} u_i^* \left( \sum_{j=1,2} a_{ij} u_j \right) = \sum_{i=1,2} u_i^* \left( \sum_{j=1,2} a_{ji}^* u_j \right) = \sum_{j=1,2} \left( \sum_{i=1,2} a_{ji} u_i \right)^* u_j$$

とエルミート行列の性質を使って書き直すことができる. これは

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \lambda^*(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

となっている. よって  $\lambda = \lambda^*$  であり, エルミート行列の固有値  $\lambda$  は実数 であることが証明された. この証明は 2 行 2 列の行列で行ったが一般のエルミート行列で示されることは上記の計算法から明らかであろう.

### A.6.4 エルミート行列の固有関数の直交性

エルミート行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを  $\lambda_1, \mathbf{u}^{(1)}$  と  $\lambda_2, \mathbf{u}^{(2)}$  とすると

$$A\mathbf{u}^{(1)} = \lambda_1\mathbf{u}^{(1)}, \quad A\mathbf{u}^{(2)} = \lambda_2\mathbf{u}^{(2)} \quad (\text{A.28})$$

である. ここで  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  の時  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = 0$  の直交性が成り立つ. これは

$$(\mathbf{u}^{(1)}, A\mathbf{u}^{(2)}) = (A\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}), \quad \text{よって} \quad \lambda_2(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \lambda_1(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$$

となっているため,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なので  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = 0$  が証明されている.



### A.6.5 パウリ行列

パウリ行列  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

と定義される 2 行 2 列のエルミート行列である。一般のエルミート行列  $A$  は常に  $A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} = a_1 + b_1\sigma_x + b_2\sigma_y + a_2\sigma_z$  とパウリ行列で書くことができる。

• 反交換関係： このパウリ行列には，反交換関係を  $\{A, B\} = AB + BA$  と定義すると  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  の関係式が存在している。

### A.6.6 ユニタリー行列

ユニタリー行列  $U = \{u_{ij}\}$  は  $U^\dagger U = 1$  を満たす正方行列の事である。これを成分で書くと  $(U^\dagger U)_{ij} = \sum_{k=1, n} u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij}$  となる。ここでユニタリー行列による変換はノルムを不変に保つ事を証明しよう。今，ベクトル  $\phi$  を  $\psi = U\phi$  と変換した時，そのノルム  $|\psi|^2$  は

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &\equiv (\psi, \psi) = (U\phi, U\phi) = \sum_{k=1, n} \left( \sum_{i=1, n} u_{ki}^* \phi_i^* \right) \left( \sum_{j=1, n} u_{kj} \phi_j \right) \\ &= \sum_{i=1, n} \sum_{j=1, n} \left( \sum_{k=1, n} u_{ki}^* u_{kj} \right) \phi_i^* \phi_j = \sum_{i=1, n} \sum_{j=1, n} \delta_{ij} \phi_i^* \phi_j = |\phi|^2 \end{aligned}$$

となり不変である。

### A.6.7 実対称行列の対角化可能性の証明

実対称行列は常に対角化が可能である事を示そう。以下の証明は 2 行 2 列で表記するが一般化は容易である。実対称行列はエルミート行列であるためその固有値は実数である。実対称行列を  $R$ ，その固有値と規格化された固有ベクトルを  $\kappa_1, \mathbf{u}^{(1)}$  および  $\kappa_2, \mathbf{u}^{(2)}$  とすると

$$R\mathbf{u}^{(1)} = \kappa_1\mathbf{u}^{(1)}, \quad R\mathbf{u}^{(2)} = \kappa_2\mathbf{u}^{(2)} \quad (\text{A.30})$$

となる．ここで  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  から作られた行列  $U$  と対角行列  $K$  を

$$U = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

と定義しよう．この時，式 (A.30) は

$$RU = UK \quad (\text{A.32})$$

とまとめて書く事ができる．この時，行列  $U$  はユニタリー行列なので，式 (A.32) の左から  $U^\dagger$  を掛けると

$$U^\dagger RU = K \quad (\text{A.33})$$

となり，確かに実対称行列  $R$  が適当なユニタリー行列により対角化された．

## A.7 オペレータの固有値と固有関数

量子論ではあるオペレータが状態  $\Psi$  に演算すると何かの定数がでて再び状態  $\Psi$  に戻るという方程式が最も重要な方程式になっている．これを固有値方程式と言う．式で書くとそのオペレータを  $\hat{A}$ , 状態を  $\Psi$  とすると

$$\hat{A}\Psi = \lambda\Psi \quad (\text{A.34})$$

となっている．ここで  $\lambda$ ,  $\Psi$  の事を固有値，固有ベクトルと呼んでいる．この場合，オペレータ  $\hat{A}$  は行列か微分演算子と考えて十分である．

### A.7.1 固有値問題

固有値問題の例題を挙げておこう．まずは行列での問題である．

• 例題 (1): 具体例としてオペレータ  $\hat{A}$  を 2 行 2 列の行列，状態  $\Psi$  を 2 列のベクトルとするとこの式は

$$\hat{A}\Psi = \lambda\Psi \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

と書ける．固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $\Psi$  の求め方としては行列式がゼロ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.36})$$

の方程式をまず解く．これより固有値  $\lambda$  が求まる．

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] \quad (\text{A.37})$$

さらにこの固有値の値を元の式に代入すると  $x$  と  $y$  の比が求まり，これにより固有値問題が解けた事になっている．2次元の行列の場合，固有値は2個求まり，それに応じて固有ベクトルも2セット求まる事になる．

• 例題 (2): 次に微分演算子の例題を挙げよう．オペレータ  $\hat{A}$  として運動量演算子  $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}$  としよう．この時，固有値方程式は

$$\hat{p}\Psi = k\Psi, \quad \Rightarrow \quad -i\frac{d\Psi}{dx} = k\Psi \quad (\text{A.38})$$

となっている．この時，固有関数  $\Psi$  は  $\Psi(x) = Ne^{ikx}$  と求まる．固有値  $k$  がどのような値をとるかは  $\Psi$  に条件 (境界条件) を課すことにより求めることができる．

### A.7.2 同時固有関数

オペレータ  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  が交換するとき，すなわち

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \quad (\text{A.39})$$

のとき，オペレータ  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  は同時固有関数を持っている．この証明を簡潔にしておこう．まずオペレータ  $\hat{A}$  の固有値を  $a$ ，固有関数を  $\Psi$  とすると

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \quad (\text{A.40})$$

が固有値方程式である．この時，

$$\hat{A}(\hat{B}\Psi) = \hat{B}\hat{A}\Psi = a(\hat{B}\Psi) \quad (\text{A.41})$$

が示される．従って， $(\hat{B}\Psi)$  も  $\hat{A}$  の固有関数である．よって

$$\hat{B}\Psi = b\Psi, \quad (b \text{ は定数}) \quad (\text{A.42})$$

であり，これは  $\Psi$  が  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の同時固有関数であることを示している．

## A.8 微分方程式

物理では微分方程式を解く事がその計算のかなりの部分を占めている。その場合、基本的な微分方程式の解き方を何回か練習して覚える事が大切である。

### A.8.1 1回の微分方程式

もっとも単純な1回の微分方程式は

$$\frac{df(x)}{dx} = G(x) \quad (\text{A.43})$$

であろう。この場合、右辺  $G(x)$  は  $x$  のみの関数としている。この場合、その解は  $f(x) = \int^x G(x')dx'$  と積分で書けている。

- 1回の微分方程式の例題： 問題となる微分方程式は

$$\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = 0 \quad (\text{A.44})$$

の形の微分方程式である。この解は

$$f(x) = Ce^{-\lambda x} \quad (\text{A.45})$$

であり  $C$  は任意の定数である。これは具体的に入れて見れば明らかであり、この解の形を覚える事が重要である。

### A.8.2 2回の微分方程式

単純な2回の微分方程式は

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = G(x) \quad (\text{A.46})$$

であろう。その解は  $f(x) = \int^x \int^{x'} G(x'')dx''dx'$  と積分で書けている。

- 2回の微分方程式の例題 (1)： よく出てくる2回の微分方程式は

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \quad (\text{A.47})$$

であろう．この解の求め方はいろいろあるが，解は

$$f(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx \quad (\text{A.48})$$

と書けるのでこれを覚える事が大切である． $A_1, A_2$  は任意定数である．

- 2 回の微分方程式の例題 (2) : 上式において  $k^2$  の前の符号がマイナスの

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - k^2 f(x) = 0 \quad (\text{A.49})$$

の微分方程式も良く出てくる．この解は

$$f(x) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx} \quad (\text{A.50})$$

と書かれる． $B_1, B_2$  は任意定数である．

- その他の微分方程式 : 物理でよく使う微分方程式としては

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha = 0 \quad (\text{一様重力中の運動}) \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{y^2} = 0 \quad (1 \text{次元重力ポテンシャル中の運動}) \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta x^2)y = 0 \quad (\text{量子力学の調和振動子}) \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha \frac{dy}{dx} + \beta y = \gamma \cos x \quad (\text{LCR 回路}) \quad (\text{A.54})$$

$$\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) u = 0 \quad (\text{波の方程式}) \quad (\text{A.55})$$

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r} + \gamma \right] \psi = 0 \quad (\text{水素原子}) \quad (\text{A.56})$$

などがある．但し  $\alpha, \beta, \gamma, v$  は定数である．

## A.9 フーリエ展開

状態関数  $\psi(x)$  を良く知られている関数 (例えば,  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ ) で展開することが良くある. この  $\psi(x)$  を

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{2\pi n}{L} x \quad (\text{A.57})$$

と書く場合, これをフーリエ展開と言う.  $c_n$  が展開係数であり, これが決められるべき定数である. 実際,  $\psi(x)$  が知られている場合, この係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{\pi}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi(x) \sin \frac{2\pi n}{L} x dx \quad (\text{A.58})$$

によって決定される.

### A.9.1 フーリエ展開の意味

フーリエ展開は非常に便利な式であり, 物理では良く使うことになる. この式を見るだけでは, それが何故, 便利なのかはわからないと思う. 使い慣れて初めて, その便利さがわかるものである. 読者は, 式 (A.57) の右辺は無数個の和になっているので, あまり意味がないのではないかと思われるかもしれない. 実際の応用では, この和が数個で大体, うまく近似できる場合が多いので, 利用価値が高いのである.

### A.9.2 スペクトル分解

物理においては  $\sin kx$  と書いた時, この  $k$  は運動量に関係している. これは  $x$  が長さの次元  $[L]$  を持っているため,  $k$  は  $[L^{-1}]$  の次元を持つことになり, これが運動量の次元と関係してくるためである. 従って, 式 (A.57) における  $\frac{2\pi n}{L}$  はある運動量での大きさを表していることに対応しているため, その前の係数  $c_n$  はその運動量における振幅の大きさを表している. このため, このフーリエ展開表式をスペクトル分解と呼ぶことがある. それは運動量が光で言ったらその波長 (スペクトル) に対応していることに依っている.

## 付録B 物理の数学

物理学では数学は言語として使っている．ここでは物理で良く使う数学とその公式を挙げて解説しよう．

### B.1 何故，偏微分か？

大学で微分を勉強する時，必ず偏微分が一緒に出てきて多少面食らうものがある．何故，偏微分が必要なのかを理解しておく必要がある．

#### B.1.1 偏微分の定義

関数  $f(x, y)$  に対して

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (y \text{ を定数とみて } x \text{ で微分}) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \quad (x \text{ を定数とみて } y \text{ で微分}) \quad (\text{B.2})$$

が偏微分の定義である．それ以上の意味はない．

#### B.1.2 2変数関数の偏微分

ここで関数  $f(x(t), y(t), t)$  を全微分することを考える．すなわち，

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

を計算してみよう．この時，次のようにある項を引いたり足したりを繰り返して変形して行くと偏微分を使わざるを得ないことがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = & \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ & \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right. \\ & + \frac{f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t+\Delta t)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ & \left. + \frac{f(x(t), y(t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

と変形できる．ここで  $\Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t)$ ,  $\Delta y \equiv y(t+\Delta t) - y(t)$  と定義している．また  $\Delta t \rightarrow 0$  で  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  なので

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

が示される．偏微分により確かに簡単な形で書く事ができて合理的である．

### B.1.3 偏微分の例題

偏微分でよく使う微分演算子は  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  であろう．この微分演算子  $\nabla$  (ナブラと呼ぶ) を  $\frac{1}{r}$  に演算すると

$$\nabla \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) = - \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{B.5})$$

となる．ここで上式にさらに  $\nabla$  を演算すると

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right] = - \left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0 \quad (\text{B.6})$$

となる．ところが  $\nabla^2 \frac{1}{r}$  を半径  $a$  の球内で積分してみると

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d^3r = - \int_{|\mathbf{r}|=a} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{|\mathbf{r}|=a} \left( \frac{1}{a^2} \right) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi$$

となりゼロではない事がわかる．これが  $\delta$  関数に関係している．このため式 (B.6) は  $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$  と修正される．但し  $\int \delta(\mathbf{r}) d^3r = 1$  である．



## B.2 座標系

座標系は数学の基本である．座標系を導入する事により様々な記述が可能になり，言語としては最高に便利である．

• デカルト座標： 座標系の基本はデカルト座標  $(x, y, z)$  であり，これがすべての出発点である．この場合，座標は自然に定義されるし最もわかり易い事は事実である．しかし物理の方程式を解こうとする場合，ポテンシャルが極座標表示で書かれている場合が多いため，極座標表示も重要になる．

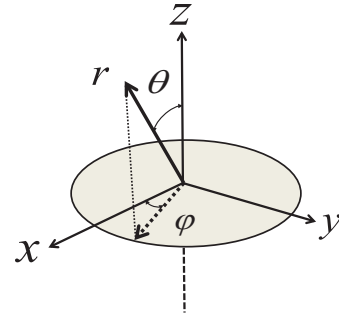


図 B.1: 座標系

• 極座標：  $(r, \theta, \varphi)$  と書いて 
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \text{ である.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

## B.3 回転座標系

力学では回転している座標系に移って物理を議論する場合がよく出てくる．このため，回転座標系で運動エネルギーがどのように表せられるかと言う問題が重要になっている．今，静止系の座標を  $(X, Y, Z)$  として，これを  $\varphi$  だけ回転した回転系の座標を  $(x, y, z)$  としよう．以降の議論では，回転を  $Z$  軸回りにして議論を進めるがこれで一般性を失う事はない．両者の間には

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}, \quad \text{但し } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

の関係がある．

### B.3.1 回転座標系 $\dot{r}$ の計算

ここで,  $\dot{r}$  を計算してみよう. 簡単な計算で

$$\dot{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{R} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (\text{B.8})$$

となることがわかる. 右辺第2項は回転行列を時間微分したものと  $R$  の積であるが, これを式 (B.7) を使って  $r$  に書き直している. ここで系の回転角速度ベクトルを  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi})$  とした. 上式の右辺第1項を  $\dot{R}_r$  と書くと式 (B.8) は

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{R} \equiv \dot{R}_r = \dot{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (\text{B.9})$$

となる. 式 (B.9) の行列は直交行列なので  $\dot{R}_r^2 = \dot{R}^2$  が証明される. これより静止系での運動エネルギー  $T = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$  を回転系での変数  $r$  で書くと

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 \quad (\text{B.10})$$

となっている. これが回転系での運動エネルギーである.

## B.4 数学の公式

### B.4.1 デルタ関数 $\delta(x)$ とクロネッカーデルタ $\delta_{ij}$

- $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$ ,      •  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ ,      •  $\delta(\boldsymbol{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ ,      •  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{ij} A_j = A_i$

## B.4.2 ベクトルの内積と外積

3次元ベクトルの場合，内積と外積が定義できる．

$$\text{内積} : \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

$$\text{外積} : \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad \text{但し } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (123 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (123 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

• 単位ベクトルの変換：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

## B.4.3 ベクトルの公式

- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$       •  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$       •  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = 0$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$       (但し  $\boldsymbol{\sigma}$  はパウリ行列)

## B.5 物理でよく使う積分公式

### B.5.1 Exponential の積分

- $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha},$       •  $\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2},$       •  $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}$
- $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

## B.5.2 ガウス積分

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}, \quad \bullet \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^6}}$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\beta x^2} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n \beta^{n+\frac{1}{2}}}$$

(但し,  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$ )

## B.5.3 その他の積分公式

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a \tan \theta) \cos \theta d\theta \quad (x = a \tan \theta) \\ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{a^2}, \quad \bullet \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \\ \bullet \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a+bt}} &= \frac{2}{b} \left( \sqrt{|a+b|} - \sqrt{|a-b|} \right) \end{aligned}$$

B.6  $n$ 次元球の体積

半径  $R$  の  $n$ 次元球の体積を求めよう. これを  $I$  とすると

$$I = \int \cdots \int_{p_1^2 + \cdots + p_n^2 \leq R^2} dp_1 \cdots dp_n = \int_0^R p^{n-1} \Omega_n dp = \Omega_n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\alpha^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{B.12})$$

と書ける. ここで  $\Omega_n$  は  $n$ 次元の角度積分である. この  $\Omega_n$  は以下のように求めて行く. まず

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dp_n e^{-\alpha(p_1^2 + \cdots + p_n^2)} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha p^2} p^{n-1} \Omega_n dp \quad (\text{B.13})$$

を計算する. このガウス積分は直ちに実行できて

$$G = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\alpha p^2} \right)^n = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}} = \Omega_n \frac{1}{n\alpha^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{B.14})$$

となる. これより  $\Omega_n$  が求まり  $I$  は  $I = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n$  となる.

## B.7 微分演算公式と座標系

### B.7.1 直交座標系 $(x, y, z)$

- グラジエント  $\nabla$  : 
$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$
- ラプラシアン  $\Delta$  : 
$$\Delta\phi \equiv \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$
- 発散 : 
$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
- ローテーション : 
$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

### B.7.2 極座標系 $(r, \theta, \varphi)$

- グラジエント : 
$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$
- ラプラシアン : 
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$
- 極座標におけるベクトル: 
$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} A_r = A_x \sin\theta \cos\varphi + A_y \sin\theta \sin\varphi + A_z \cos\theta \\ A_\theta = A_x \cos\theta \cos\varphi + A_y \cos\theta \sin\varphi - A_z \sin\theta \\ A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \end{cases}$$
- 発散 : 
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$
- ローテーション: 
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r +$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

## B.8 三角関数

三角関数の基本公式をあげておこう.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{array} \right.$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \quad \text{但し} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## B.9 指数関数と対数関数

物理で良く使う対数関数はほとんどすべて, その底が  $e$  である. このため  $\ln \equiv \log_e$  と定義してこの対数関数のみが対象となっている.

- 基本的な性質:  $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$ ,  $(e^x)^y = e^{xy}$ ,  $e = 2.7182818$   
 $\ln xy = \ln x + \ln y$ ,  $\ln x^y = y \ln x$
- 微分:  $\frac{de^x}{dx} = e^x$ ,  $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

## B.10 テイラー展開

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$ ,      •  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$
- $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \dots = \cos x + i \sin x$

## B.11 複素数と複素積分

### B.11.1 複素数 $z$ の定義

$$\bullet z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad \bullet z^* = x - iy = re^{-i\theta}$$

### B.11.2 オイラーの公式

$$\bullet e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \bullet \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$$

### B.11.3 解析関数

複素関数  $f(z)$  が  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  と展開出来る時, この関数は解析関数と呼ばれる. 但し,  $n$  は整数である. 従って  $f(z) = \sqrt{z}$  は解析関数ではない. この時, 原点を中心とした半径  $R$  の円を複素平面で考えて  $\theta = 0$  から一周まわる積分路を  $C$  と呼ぼう. 今, 関数  $f(z)$  をこの積分路  $C$  で積分しよう.

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C z^n dz \quad (\text{B.15})$$

ここで  $z = Re^{i\theta}$  と変数変換すると  $dz = iRe^{i\theta} d\theta$  となる. よって

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i c_{-1} & (n = -1) \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

となる.  $f(z)$  で  $n = -1$  の部分を  $z = 0$  のポール,  $c_{-1}$  をその留数と言う.

例題:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx$  : ( $p > 0, a > 0$ ) の計算

解答:  $\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz$  の複素積分を上半面の半径  $R$  の半円 (経路  $C$ ) で積分する.

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iRe^{i\theta} d\theta \quad (\text{B.17})$$

ここで右辺第1項は  $R \rightarrow \infty$  で問題の積分そのものである。第2項は  $\theta$  の範囲が  $0 < \theta < \pi$  なので  $\sin \theta$  は常に正である。よって、 $e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}$  は  $R \rightarrow \infty$  でゼロになる。一方、複素積分の公式から

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-pa}}{2ai} = \frac{\pi e^{-pa}}{a} \quad \text{と求まる.}$$

よって積分の答えは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-pa}}{a} \quad \text{となる.}$$

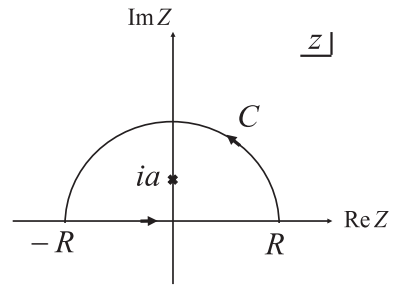


図 B.2: 複素平面の積分路

## B.12 線積分と面積分

線積分と面積分の定義を書いておこう。

- 線積分：  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$   
 $C$  : 積分路 (線に沿って積分: 実際の積分は 直線 か 円 が可能)
- 面積分：  $\int \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int \int_S A_n dS$      $d\mathbf{S}$  : ベクトルの向きは面に垂直  
 $A_n$  : 法線方向の成分 (球の場合は  $e_r$  方向外向き)  
 $S$  : 積分の面積 (実際の積分は 直方体 か 球 か 円筒 が可能)

## B.13 ガウスの定理

ガウスの定理とは任意の閉じた体積に対してベクトル量  $\mathbf{A}$  の発散量  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  を積分するとこの積分量はこの表面における  $A_n$  ( $\mathbf{A}$  の法線方向の成分) について表面積分したものと一致しているというものである。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n \equiv \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{B.18})$$

ここで、 $dS_n$  は表面積分を表している。方向は外向きを正としている。



### B.13.1 立方体でのガウスの定理

ガウスの定理の証明をまず立方体で行う．一辺が  $a$  の立方体をその一つの頂点が原点にあり，また立方体の面が  $x - y$ ,  $y - z$ ,  $z - x$  の各平面にあるようにして， $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  象限に置こう．この場合，式 (B.18) の左辺の積分は

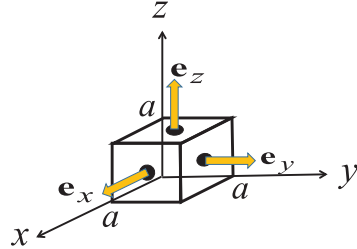


図 B.3: 立方体のガウスの定理

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3r = \int \left[ \int_0^a dx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] dydz + \int \left[ \int_0^a dy \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \right] dzdx + \int \left[ \int_0^a dz \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dxdy \quad \text{である.}$$

$$\text{よって} \quad \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3r = \int (A_x(a, y, z) - A_x(0, y, z)) dydz + \int (A_y(x, a, z) - A_y(x, 0, z)) dzdx + \int (A_z(x, y, a) - A_z(x, y, 0)) dxdy$$

となり，この右辺は  $\int_{[\text{表面}]} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  と書けていて立方体における表面積分である事がわかる．これより

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3r = \int_S A_n dS_n \quad \text{が証明されたのである.}$$

### B.13.2 一般の場合のガウスの定理

ガウスの定理の証明が立方体でわかると後は簡単である．まず立方体を小さな8つの立方体切りそれぞれに対してガウスの定理を示す．この時，面が接している所は常に打ち消し合うため，残るのは外側の表面積分のみである事がチェックできる．この事がわかると，一般の場合も同じように無限小の立方体に分割して見れば明らかのように，接している所は必ず打ち消し合い，最終的に残る積分はすべて外側表面となっているのである．

## B.14 ストークスの定理

ガウスの定理と同じくらい重要な数学の定理にストークスの定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{B.19})$$

がある．ここで  $C$  は閉曲線を表し， $S$  はその閉曲線で囲まれる面積を表し，この面積分は右手の法則に従って面積分の方角を決めている．

### B.14.1 ストークスの定理の証明

まず長方形で行う．この長方形の一つの頂点を原点に取り， $x$ -軸方向に  $a$  そして  $y$ -軸方向に  $b$  の長方形を考える．長方形が  $x-y$  平面にあるため， $d\mathbf{S}$  の方向は  $z$ -軸である．よって左辺は

$$\begin{aligned} \int_S \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy &= \int_0^b [A_y(a, y, 0) - A_y(0, y, 0)] dy \\ &+ \int_0^a [A_x(x, 0, 0) - A_x(x, b, 0)] dx \end{aligned}$$

となる．これは長方形の周囲を  $OABCO$  と一周積分する事に対応している．すなわち上式の右辺は原点から  $x$ -軸に沿って  $a$  まで積分し，そこから  $y$ -軸方向に沿って  $b$  まで積分し，さらにそこから  $x$ -軸に沿って  $0$  まで積分し，そして最終的に  $y$ -軸方向に沿って原点まで積分したものである．これは長方形に対してストークスの定理が証明された事に対応している．よって

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{[OABCO]} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

が示された事になっている．

- 一般の場合のストークスの定理の証明はガウスの定理の証明と同様に分割することにより証明される．

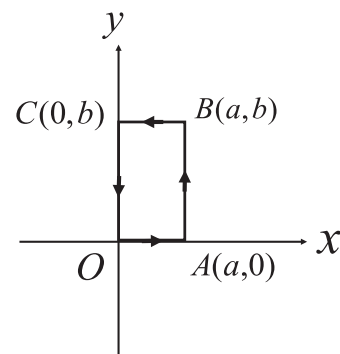


図 B.4: ストークスの定理

## 付録C ラグランジェ方程式

ニュートン力学の演習問題を解く場合、ラグランジェ形式という一般座標を用いた計算法がよく使われている。これは一見、難しく見えるが、実際にはほとんどの力学の問題はラグランジェ形式を用いて解いた方が簡単で有利となっている。ここではそのラグランジェ形式を簡単に解説しよう。

### C.1 ラグランジェの方法

ニュートン方程式はデカルト座標系  $(x, y, z)$  で書かれているが、極座標  $(r, \theta, \varphi)$  も良く使われる。これらを総称して一般座標と呼んでいる。この時、座標系を固定しない一般座標でニュートン方程式を定式化した方が便利で簡単になっている。これがラグランジェ形式と呼ばれる方法である。導入の段階で少し複雑に見える数学を使うが、実際には簡単であり、ほとんど全ての場合において有用である。その理由はラグランジアンがスカラーであることに依っている。このラグランジェ方程式はオイラーによる最小作用の原理を用いて求める方法がよく知られているので、ここではこの方法を解説しよう。

#### C.1.1 作用と一般座標

まず作用という物理量を定義し、それを最小にする事でラグランジェ方程式を求めることができる。その作用  $S$  は以下の様に定義される。

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (C.1)$$

ここで  $L(q_i, \dot{q}_i)$  はラグランジアンと呼ばれるものであり、

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \quad (C.2)$$

で与えられる。 $q_i$  と  $\dot{q}_i$  は一般座標とその時間微分である。 $T(q_i, \dot{q}_i)$  と  $U(q_i)$  は運動エネルギーとポテンシャルである。この場合、例えば極座標だと

$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ , その時間微分は  $\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\theta}, \dot{q}_3 = \dot{\varphi}$  となっている。極座標では, 質量  $m$  の質点の運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \quad (\text{C.3})$$

となる。ポテンシャル  $U(q_i)$  は例えば重力だと  $U(r) = -\frac{GMm}{r}$  である。

● ラグランジェ方程式： 一般座標で書くとラグランジェ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C.4})$$

となる。これはニュートン方程式そのものである。この式は形がすべて一緒であり, 覚えやすいので必ず, 忘れないようにしたい式である。

## C.2 最小作用の原理

ラグランジェ方程式 (C.4) の導出は変分法を用いて行われる。これはオイラーによって発展させられた数学の形式である。今, 時間  $t_0$  から  $t_1$  まで  $L(q_i, \dot{q}_i)$  という物理量を時間で積分し, 積分量  $S$  を最小にするような  $q_i = q_i(t)$  の関数形を決める方程式を求める問題である。オイラーは  $q_i$  の関数形を少し変えたもの  $q_i + \delta q_i$  と元々のものとの差を  $\delta S$  として,  $\delta S = 0$  が最小値を与える事より, この条件から, 運動方程式が求まるという事を証明した。すなわち,

$$\begin{aligned} \delta S &\equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \end{aligned}$$

から, 任意の  $\delta q_i$  に対して上式が成り立つため, 式 (C.4) が求まる。ここで部分積分を実行しているが, この時  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  を用いている。

● 端の条件： この条件  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  は何故, 必要なのであろうか? これは変分法そのものと関係している。変分法は関数形を変化させる事であり, この関数形の変化には時間の両端 ( $t = t_0, t = t_1$ ) を止めておく必要がある。従って  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  を課するのは当然の条件となっている。

### C.3 一般座標でのニュートン方程式

ラグランジェ方程式はニュートン方程式を一般座標に変換する事により求められる。簡単な数学だから、以下に示しておこう。まずは、 $(x, y, z)$  から  $(q_1, q_2, q_3)$  への変数変換を考える。この時、変数の依存性は

$x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$  となっている。よって

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (x \rightarrow y), \quad (y \rightarrow z) \quad \text{となる。これより,}$$

$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  が求まる。ここで次の量  $I$

を考えてみよう。  $I \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$ 。この時

$$\text{ニュートン方程式は } m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{なので}$$

$I = m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$  と書く事ができる。よってこれを変形すると

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\}$$

となり、さらに  $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}$  を使って書き換えると

$$I = \frac{m}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{z}^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{z}^2}{\partial q_i} \right\}$$

となる。これより運動エネルギーを  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  と書くと  $I$  は

$$I = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

と書き表す事ができる。ここでポテンシャル  $U$  は座標のみの関数と仮定する

ので  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$  である。よって、ラグランジアンを  $L = T - U$  と書けば

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

となり、確かにラグランジェ方程式が求まっている。

## 付録D 相対性理論

物理学で最も基本的で重要な仮定は相対性原理である。それは「どの理論模型も相対論の変換(ローレンツ変換)に不変である」という仮定である。

### D.1 相対性原理

相対性原理とは「地球で発展させた理論が他の慣性系(他の星)でも物理的観測量は同じになる」と言っていることに対応している。まず慣性系を定義して、どの慣性系で物理を議論しても観測量は同じであると言う要請を置く。そしてそれが慣性系の相対性、すなわち相対性原理である。

#### D.1.1 慣性系

それでは慣性系とはどのようなものであろうか?これは「互いに等速直線運動をしている系」それぞれの事を慣性系と呼んでいる。例えば、地球は止まっているとしてその地上の系を静止系とする。この時、等速直線運動をしている電車はやはり地上の系と同じ慣性系である。ここで最も重要な事は、電車の系にも「観測者」が定義できるという事実である。従って、この電車の系は空間座標のみならず時間もその系で定義されるべきである。さらにどの慣性系でも物理が同じであるという事は「方程式の形」が慣性系同士の変換(ローレンツ変換)に対して不変である事を意味している。従って、相対論的に不変な理論に対しては、その計算を行う場合どの系で計算しても答えは同じになっている。さらに一度、系を指定したらもはや相対論的な変換自体は無意味であり、運動方程式を解く事が重要となる。例えば、GPS衛星の運動を議論する時、地球の中心を原点とした座標系を指定して運動方程式を解いており、この解からGPSの軌道がすべて決まっている。従って、この時「GPS衛星の時間が遅れるか?」などと言う質問は物理的に無意味である。

## D.2 ガリレオの相対論

電車の系が静止系に対して一定速度  $v$  で  $x$ -軸方向に運動しているとしよう。ここで大切な事はそれぞれの系に座標系を定義する事ができ、その座標系には観測者も定義する事が出来る点である。今、静止系の座標と時間を  $R(t, x, y, z)$ 、電車の系の座標と時間を  $S(t', x', y', z')$  と表記しよう。但し、電車は光の速度  $c$  と比べてゆっくり動いているとしている。この時、時間はどの系でも同じであり  $t = t'$  となっている。

### D.2.1 ガリレー変換

2つの座標系  $R(t, x, y, z)$  と  $S(t', x', y', z')$  には  $x = x' + vt'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ ,  $t = t'$  の関係式があり、これをガリレー変換という。今、地球上 ( $R$ -系) でバネの振動の実験をしたとする。適当な点を原点としてそこからバネの伸びを  $x$  とすると  $m\ddot{x} = -kx$  が運動方程式になる。ここで  $k$  はバネ定数である。この場合、座標は質点の座標を表しているのだから、座標が時間によって変化する事になっている。ガリレー変換から明らかなように、電車の系 ( $S$ -系) でも同じバネの実験をすると、この時は運動方程式が  $m\ddot{x}' = -kx'$  となる。ここで  $x'$  は適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを  $x'$  とした事に対応しており、これは地球上で行ったバネの実験と同じである。

- 方程式の形： この2つの方程式を見ると形が同じである。並べて書くと

$$\begin{aligned} R\text{-系} &: m\ddot{x} = -kx \\ S\text{-系} &: m\ddot{x}' = -kx' \end{aligned}$$

になる。従って、この微分方程式を解いた答えも同じ形になっている。結果だけ書くと  $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$  但し  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  という振動になる。この時、初期条件 ( $t = 0$  で  $x = 0$ ,  $\dot{x} = v_0$ ) をつけている。

## D.3 特殊相対論

$S$ -系の速度  $v$  が光速に近い場合の変換則はガリレー変換ではうまく行かないため別の変換則 (ローレンツ変換) を考える必要がある。これはマックスウェル方程式がガリレー変換で不変ではないからである。この場合の相対論を「特殊相対論」と呼んでいるが、この変換は常に成り立ち「特殊」ではない。

## D.3.1 ローレンツ変換

$S$ -系の速度  $v$  が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている。今度の場合,  $R$ -系の座標を  $R(t, x, y, z)$  とした時,  $S$ -系の座標は  $S(t', x', y', z')$  となり, 時間は別のものになる。それは観測者の時間と考えればよい。この場合 ローレンツ変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{D.1})$$

であり,  $\gamma$  は  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  と定義されている。この式はマクスウェル方程式が  $S$ -系でも  $R$ -系でも同じ形の微分方程式になる要請を充たすように求められたものである。式 (D.1) で, もし速度  $v$  が光速と比べて十分小さい場合,

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{D.2})$$

となり, ガリレー変換の式と一致している。従って, 普段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱っても間違える事は無い。実際, 地球の公転速度  $v$  が一番速いが, これは  $v \simeq 10^{-4}c$  であり, 光速より十分遅い事がわかる。

• 運動量のローレンツ変換: 質点の運動量とエネルギーはローレンツ変換に対してどの様に影響されるのであろうか? 今,  $R$ -系での質点のエネルギーと運動量を  $(E, \mathbf{p})$  としよう。この時,  $R$ -系に対して  $x$ -軸に沿って速度  $v$  で動いている  $S$ -系においては, この質点のエネルギーと運動量  $(E', \mathbf{p}')$  はローレンツ変換により

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (\text{D.3})$$

と与えられる。この時,  $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  を計算すると  $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  となり一定となる。この一定値は系の変換によらない量でそれは質量である。従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (\text{D.4})$$

と書く事ができる。ここで, 運動量  $\mathbf{p}$  がその質量と比べて十分小さい場合,

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (\text{D.5})$$

となり, 確かに非相対論の「分散関係式」が得られている事がわかる。



## D.4 相対論の具体例

ここで相対論の具体例をあげよう。相対論は運動学であり、相対論の変換性から他の慣性系のある種の情報がわかる場合があるという事を示しているが、運動学以上の情報がわかるわけではない。

### D.4.1 光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時、その星から発せらる光はローレンツ変換の影響を受ける。それは、光のドップラー効果 (Doppler effect) としてよく知られている現象であり、また観測もされている。星が速度  $v$  で遠ざかっていると、星から発せられた光の運動量を  $p$  とすると地球上で観測される光の運動量  $p'$  は

$$p' = \gamma \left( p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left( p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left( 1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (\text{D.6})$$

となり、光の運動量は減少している。これを波長で表せば

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \lambda \quad (\text{D.7})$$

となるので光の波長は大きくなる。これを赤方偏移 (red shift) という。

この現象が起こった理由は簡単である。粒子のエネルギーと運動量はローレンツ変換に対して変更を受けるからである。この事を物理学では「4次元運動量はベクトルなのでローレンツ変換で新しい4次元運動量に変換される」と言う言い方をしている。

### D.4.2 大気圏で生成された $\mu$ -粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突して  $\mu$ -粒子 (質量  $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}/c^2$ ) を生成する場合がある。 $\mu$ -粒子はその寿命  $\tau_0$  として  $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$  秒程度であり、従ってこれは不安定な素粒子である。ここで問題は、この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である。これは相対性理論関連では昔よく議論された問題の一つでもある。この寿命  $\tau_0$  は崩壊幅  $\Gamma$  により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (\text{D.8})$$

と書かれている。この場合、崩壊幅  $\Gamma$  はローレンツ不変な物理量である。従って、寿命もローレンツ変換に対して変化する事はない。つまりは地上でもこの  $\mu$ -粒子の寿命は変わらない。

- $\mu$ -粒子の走行距離  $L$  : ここで  $\mu$ -粒子の走行距離を計算しよう。その走行距離  $L$  はローレンツ変換の式  $x = \gamma(x' + vt')$  より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (\text{D.9})$$

である。ここでエネルギーが  $1 \text{ GeV}/c^2$  の  $\mu$ -粒子が上空で生成されたとしよう。この時、 $v \simeq c$  であり、また  $\gamma \simeq 10.6$  である。従って、この  $\mu$ -粒子の走行距離  $L$  は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (\text{D.10})$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

- 加速器実験 : 大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式 (D.9) によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

## D.5 ミンコフスキー空間

時間と空間を一緒にして4次元空間と呼ぶ事がある。しかし、これは物理的には意味はなく空間は3次元である。4次元空間を使うのはローレンツ変換が時間と空間を一緒にした変換になっているからである。これはミンコフスキー (Minkowski) 空間と呼ばれていて、自然界をうまく記述できている。しかしながら、時間と空間は対称になっているわけではなく、ダイナミクス (量子力学などの運動) を解くとわかるように、時間は3次元空間とは全く異なり物理学において特別な役割を果たしている。

- 4次元空間 : 4次元空間という表現は、場の理論におけるローレンツ変換では4次元の状態関数を持つてくるとうまく記述できるため使われている。これは単に数学的な意味合いであり、物理のダイナミクスとは無関係である。実際の空間があたかも4次元であるような表現は勿論、間違いである。

### D.5.1 計量テンソル

一般相対論の計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  について解説しよう。これは最初はミンコフスキー空間の定義から出発したのであろう。ミンコフスキーは4次元空間の微小距離の2乗  $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$  を定義したが、これは  $(ds)^2$  がローレンツ変換に対して不変なためである。ここでこれをより一般的に  $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ ,  $dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz)$  を導入して

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\text{D.11})$$

として計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  を定義しよう。この場合、 $g^{\mu\nu}$  は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{となり、これがミンコフスキーの計量である。}$$

計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  にはそれ以上の意味合いはない。さらに、 $g^{\mu\nu}$  がミンコフスキーの計量からずれた場合、 $(ds)^2$  はローレンツ変換に対しての不変性を失っている可能性がある。従ってこの非ミンコフスキー計量は相対性原理と矛盾するため物理的な観測量の計算は難しくなっている。

## 付録E 電磁気学と電磁波

電磁気学 (electromagnetism) を理解するためにはマクスウェル方程式を覚える事が必要である。これは実験的に検証された最も信頼できる理論体系であり、別の基本方程式から導出はされない。マクスウェル方程式は電場  $E$  と磁場  $B$  に対する方程式である。電磁気学のすべての現象はこの方程式を正確に解く事ができれば大方、理解することができる。ここで厳密に言葉を使うとマクスウェル方程式にでてくる  $B$  は磁束密度と呼ばれている。しかし磁場との差異は物質の影響によるものなので、ここではそのまま磁場として使う。

### E.1 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は次の4個の方程式から成り立っている。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{(ガウスの法則)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(磁荷がない)} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} && \text{(アンペール・マクスウェルの法則)} \end{aligned}$$

ここで  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電荷密度 (charge density) と電流密度 (current density) を表し、それらは物質が作っている。この  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  が非常に複雑で良くわからない物理量である。これらの振る舞いは電磁気学と直接は関係ないところで決められているため、例えば電流密度そのものを物理的に理解しようとするとは量子力学の多体問題を解く事に対応している。

• 物理定数： マクスウェル方程式には2個の物理定数  $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  があり、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\mu_0$  は透磁率と呼ばれている。これらは具体的に電場や磁場を数値的に求める時に必要になる。また  $c$  は光速で  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  である。

● 未知関数： この方程式は電場  $E$  と磁場  $B$  を未知関数としていて、その数は全部で6個 ( $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ ) である。従って、マクスウェル方程式は6個の独立した方程式になっている。ガウスの法則が1個、磁荷がない式が1個、ファラデーの法則が2個そしてアンペール・マクスウェルの法則が2個となっている。アンペール・マクスウェルの式は一見3個あるように見えるが、連続方程式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  が成り立つので2個となる。

● 場の定義： 電場  $E$  と磁場  $B$  が「場」(field) であるという意味は、電場も磁場も共に時間・空間の関数になっていると言う事である。すなわち、それらは場所によっており、従って「場」なのである。それ以上の特別な意味はない。電荷密度も電流密度ももとを正せば量子力学の波動関数  $\psi(t, \mathbf{r})$  に関係してやはり「場」で書けている。その意味では電磁気学と量子力学は同じ場の理論であり、今後、物理学の勉強をすすめて行くとこれらと同様に重力も同じ形式で書けている事がわかる。

### E.1.1 ベクトルポテンシャル

電磁気学を学ぶ上でベクトルポテンシャルが必ず現れてくる。これは

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{E.1})$$

を満たすベクトルポテンシャル  $A^\mu \equiv (A_0, \mathbf{A})$  のことである。こうするとファラデーの法則  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$  と磁荷がない  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  という2式は自動的に満たされている。しかし何故、このベクトルポテンシャルを導入する必要があるかと言う問題は簡単に説明はできない。しかし電磁場と電子の相互作用は必ず、このベクトルポテンシャル  $\{A_0, \mathbf{A}\}$  で書かれている事を考えれば、その重要性がわかると思う。

### E.1.2 変位電流

ここで変位電流  $j_d$  (displacement current) を定義しておこう。これはアンペール・マクスウェルの法則の最後の項の事であり  $j_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  と定義されている。電場が時間変化するとそこに電流が流れた事に対応している現象でありそこには磁場が生成される。しかしその場所で電子が電流のように動いているわけではない。電場を形成している荷電粒子が時間変化している事で電場の時間変動が生まれている。

## E.2 電磁波

光を物理的に理解する事は電磁気学の範囲を超えているためかなり難しい。大方の電磁気学の教科書では、マクスウェル方程式から電磁波がでてくると言う書き方をしているが、この表現は正しいとは言えない。物質がない時のマクスウェル方程式をベクトルポテンシャルで書くと  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} = 0$  と求まり、これは自由フォトンが満たすべき方程式である。しかしこの式は電磁波の存在を示唆してはいても電磁波の生成・消滅とは無関係である。電磁波の生成・消滅は場の量子化を行わない限り理解できなく、また電磁波は生まれたり消えたりする事で初めて物理的に意味のある存在となる [2, 3, 4]。

### E.2.1 フォトン (光子)

フォトン (photon) は電磁場 (ベクトルポテンシャル場) を量子化する事により、その結果として場が粒子 (フォトン) になったものと考えてよい。場の量子化を実行する時は、まずベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を自由粒子の状態で

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \left[ c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (\text{E.2})$$

と展開する。ここで  $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$  が偏極ベクトル (polarization vector) である。フォトンの状態を理解するためには場を量子化する必要がある。

- 場の量子化： 場の量子化 (field quantization) とは係数  $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ ,  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  を演算子と見なす事である。 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ ,  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  が生成・消滅演算子 (creation annihilation operator) と呼ばれていてこれらは交換関係式  $[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$  などを満たしている。この式 (E.2) の右辺の第1項がフォトンを生じさせ、第2項が消滅させる項に対応している。光はもはや電場・磁場とは全く関係なく、フォトン粒子と見え、その振る舞いを波として扱えばよい。

- フォトンのエネルギー、運動量とその波長： フォトンのエネルギー  $E_{\mathbf{k}}$  とその角振動数  $\omega_{\mathbf{k}}$  は  $E_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}$  と結びついている。また運動量  $\mathbf{p}$  と波数  $\mathbf{k}$  の関係は  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  となっている。さらに波数と波長  $\lambda$  の関係を見ると  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (但し  $k = |\mathbf{k}|$ ) となっている。フォトンは波長により特徴づけられていてその波長が長ければ電波と呼び、可視光 ( $\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$ ) を中心にして更に短い波長だと X-線や  $\gamma$ -線と呼ばれている。

### E.3 電磁波の性質

多くの電磁気学の教科書において、フォトンが電場  $E$  と磁場  $B$  と関係していると言う記述が見受けられる。しかしこれまでの議論で明らかのように、これは間違いである。ベクトルポテンシャル  $A$  をゲージ固定した後、その場を量子化したものがフォトンである。これはもはや電場や磁場と関係つけられないし、関係つける必要はさらさない。相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

である。この相互作用から  $e$  が相互作用の強さである事が良くわかると思う。この  $e$  を結合定数 (coupling constant) とも言う。ここで重要な事は電磁波の生成・消滅はこの相互作用によってのみ起こっている事である。それはベクトルポテンシャルが式 (E.2) で量子化されている事に依っている。

#### E.3.1 フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数であるが、フォトンの状態関数は複素数である。これは電磁波の状態関数  $\Psi_{k\lambda}$  が

$$\Psi_{k\lambda} \equiv \langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{k,\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx} \quad (\text{E.3})$$

と表されている事から理解される。フォトンの偏極ベクトル  $\boldsymbol{\epsilon}_{k,\lambda}$  には

$$\boldsymbol{\epsilon}_{k,\lambda} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{k,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{k,\lambda} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (\text{E.4})$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している。従って、フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直交する平面でそれぞれが直交するような2個のベクトルで成り立っている事が分かる。但し、フォトンには静止系が存在しないため偏極ベクトルの描像を正確に作る事は至難の業である。

• フォトンのスピン： 現実問題として、フォトンが電子と相互作用する瞬間のみ、偏極ベクトルが重要となっている。従って、偏極ベクトルの記述は電子の静止系においてのみ物理的に意味がある対象となっている。フォトンのスピンは1であるが、その自由度は2である。そしてフォトンが電子と相互作用する瞬間において、フォトンと電子のスピンに関する保存則が成り立っている。

## 付録F 光と波

波の問題をきちんと解説することは非常に難しく，実際問題としては不可能に近い．ここでは音波 (sound wave) や地震波 (seismic wave) を光と対比させながら，その基本的な性質を説明しよう．光と音波には本質的な相違がある．光子 (photon) は粒子であり，その状態関数の座標依存性は  $e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  という複素関数で記述されている．一方，音波の状態関数は  $\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$  などの実関数で表されているが，これは音波が媒質の振動によって伝搬しているからである．ちなみに光の状態関数の絶対値  $|e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}| = 1$  はその粒子の存在確率がゼロにならないことを保証している．

### F.1 光

光に関しては付録 E で議論しているように，その状態関数  $\Psi_{k\lambda}$  は

$$\Psi_{k\lambda} \equiv \langle \mathbf{k}, \lambda | A(x) | 0 \rangle = \frac{\epsilon_{k,\lambda}}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{F.1})$$

と表されている．ここで  $\epsilon_{k,\lambda}$  は偏極ベクトル， $\lambda$  はそれを指定する量子数である．また  $k, \omega$  は光の波数ベクトルと角振動数である．光は自由粒子であり，この点で取扱いは単純明快である．さらに光が波の性質 (干渉や回折) を持っていることは式 (F.1) から明らかであろう．

#### F.1.1 光の散乱

フォトン は電子と弾性散乱する場合がありますが，コンプトン (Compton) 散乱として知られている．その散乱断面積は  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_c = \frac{r_e^2}{2} \frac{k'^2}{k^2} \left( \frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - \sin^2 \theta \right)$  である．ここで  $k, k'$  は光の散乱前後の運動量であり， $\theta$  は光の散乱角である．



### F.1.2 空はなぜ青いか？

可視光が物質 ( $N_2$  など) と散乱した場合は Rayleigh 散乱として計算されている断面積になっている。この散乱断面積は古典電磁場で求められていて Rayleigh 散乱断面積 ( $\sigma_R \simeq \sigma_{\text{Thom}} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$ ,  $\lambda_0$  は定数) として良く知られている。この計算はかなり複雑であるが、これまで場の量子論による計算も実行されており、その形は古典論と一致している事が分かっている。このため、これまでは空の青さは光と大気分子との散乱が Rayleigh 散乱である事から理解されると考えられてきた。ところが、最近になってこの Rayleigh 散乱の断面積が場の量子論的に詳細に計算され、また  $\lambda_0$  の値が具体的に求める事が出来ている。その結果、Rayleigh 散乱の断面積は Compton 散乱の断面積よりも 10 桁以上、小さい事が分かり、これは自然界に應用はできない事が証明されている。このため『空は何故、青いか？』の問題は Rayleigh 散乱では説明できなく、振り出しに戻っている。

## F.2 音波

音波は日常的に接しているため誰でもよく知っている物理量である。ところが、これを物理学として解説することは容易なことではない。音は媒質(空気や水)を伝搬するがこれはそれぞれの媒質密度の振動として伝搬しているため密度波とも呼ばれている。この場合、大気中の各点の振動とその伝搬を記述する必要があり、これは多体問題となっていて厳密に解くことは事実上不可能である。通常、音は大気中に広がって伝搬しているので、その伝わり方は3次元的であり、その難しさが想像できるであろう。ここで音波に対して最も単純化された方程式を書いておこう。その導出法もそれ程難しくはないが、ここでは結果だけを書くことにしよう。音波(媒質)の変位  $u(\mathbf{r}, t)$  に対して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2\right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{F.2})$$

の方程式が成り立っている。ここで  $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$  であり、 $\rho$  は大気密度、 $P$  は圧力を表している。但し、それらは場所に依らず一定と仮定している。

一方、人工的に超音波を発生させるとこの波の広がりは少なくなり、ビームに近くなっている。このため超音波の性質は少し単純になり、物理的には取扱い易くなっている。

### F.2.1 音のドップラー効果

光や音に関して最もよく知られている現象はドップラー効果であろう。これは興味深いことであるが、光のドップラー効果の方が音波の場合より単純でわかりやすいものである。相対性理論におけるドップラー効果に関しては付録の「光のドップラー効果」を参照して欲しい。ところが音波の場合、かなり難しくなっている。それは音波が伝搬する大気と音源の運動それと観測者の運動との3体問題になっているからである。

- 観測者が速度  $v_{ob}$  で音源に近づくドップラー効果： 観測者が速度  $v_{ob}$  で音源に近づく時は相対論と同じである。これは音源と媒質が同じ系となっているためであり、ドップラー効果による振動数  $n'$  は  $n' = \frac{v+v_{ob}}{v}n$  となっている。
- 音源が  $v_{ss}$  で近づくドップラー効果： 一方、音源が  $v_{ss}$  で近づく場合、観測者と媒質が同じ系になっているため、観測者にはその波長が短くなって観測される。従って観測される波長  $\lambda'$  は  $\lambda' = \frac{v-v_{ss}}{v}\lambda$  となっている。

### F.2.2 地震波

空中と水中を伝搬する波は音波と呼ばれているが、地中を伝搬する波は地震波である。地殻は明らかに固体であるが、ここでも密度波は存在している。波の方程式としては音波と同じであるが、密度と圧力はかなり異なっている。地震波はその変動が急激に起こった場合に生じており、これは音波と同じである。地震波の伝搬速度は  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  であり、音波の20倍程度の速さが観測されている。しかし実際の地震波はさらに複雑であると考えられる。

## 関連図書

- [1] 西島和彦, 「相対論的量子力学」, 培風館, 1973
- [2] Fields and Particles  
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969
- [3] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory  
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)
- [4] Fundamental Problems in Quantum Field Theory  
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013
- [5] New Fundamentals in Fields and Particles  
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008
- [6] 理科年表  
国立天文台編 (丸善株式会社, 2015)
- [7] Theory of Financial Risk and Derivative Pricing  
J.P. Bouchaud and M. Potters, Cambridge University Press, 2003