ビッグバンのお話 (宇宙は有限か無限か?)

藤田 丈久 (よろず物理研究所)

はじめに

2019年の春に書いた「ブラックホールのお話」の中で「ブラックホールは全く無意味で架空の物体である」と言う事を解説したが、これは場の理論の立場からの証明に基づいている。このためこれは現在の理論物理の体系においては最も信頼できるものである。その時、それでは「ビッグバン模型はどうなのだろうか?」と言う疑問を多くの読者は抱いたかもしれない。実際、マスメディアではいまだにブラックホールやビッグバンに関するCG映像を流し続けている。ところが理論物理屋の立場からしたら、これらの話の理論源である一般相対論は物理学のどの専門領域においても応用されてはいないので、単純にSFとして見ていれば特に害をなすことはないと考えている。

しかし「宇宙はどうなっているのだろうか?」と言う事に 興味を持ち始めた若者にとっては、真実を知りかつ正確な知 識を持ちたいと考える事は自然な事と言えよう。それでここ では実際の宇宙はどうなっているのかと言う事を物理学の言 葉でお話しよう。もう少し専門的な記述は「宇宙の夜明け」 に解説してあるので、ここではそれよりもさらに簡単なお話 として、この宇宙の成り立ちについて解説して見よう。

ビッグバン模型はこの宇宙が有限の大きさであると言う仮 定に基づいている。宇宙が無限に大きいと「Olbers のパラ ドックス」に抵触すると言う考えを人々は持っていたため、有 限の大きさの宇宙を考えたのであろう。しかしこのパラドッ クスには重大な見誤りがある。それは光速が無限であると言 う暗黙の仮定であり、勿論この仮定は正しくはない。光速が 有限であることを認識していたら無限の彼方からの光は無限 に時間が掛かるため「Olbers のパラドックス」はパラドック スとはなっていない。実際、有限宇宙の理論模型に対しては 「その先の宇宙空間はどうなっているのか?」と言う疑問に 答えることができない。このため「宇宙空間は無限である」 とする理論模型の方がむしろ自然である。さらに、宇宙が無 限の大きさを持つとしないと幾つかの現象が説明できない事 が今は分かっている。科学史的な視点は面白いが間違いを犯 してしまう事も良くあり、この「Olbers のパラドックス」 もその一例である。

目 次

第1章	Olbers のパラドックス	7
1.1	Olbers のパラドックスとは?	7
	1.1.1 宇宙空間は有限?	7
1.2	Olbers のパラドックスの問題点	7
	1.2.1 光速の有限性	8
第2章	ビッグバン模型	9
2.1	ビッグバンとは?	Ć
	2.1.1 ビッグバンの対称性	S
	2.1.2 一般相対論とは何か?	10
	2.1.3 一般相対論は運動学かそれとも動力学か?	10
2.2	空間の膨張とは何か?・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	11
	2.2.1 エネルギーの塊が空間の膨張に変換された?	11
	2.2.2 何故、ビッグバン模型が生き延びたか?	11
第3章	背景輻射	12
3.1	背景輻射の発見	12
3.2	熱平衡	13
	3.2.1 開いた系の熱平衡	13
	3.2.2 箱の中の気体	13
	3.2.3 宇宙にある光子の衝突回数	13
3.3	背景輻射の起源	14
第4章	宇宙の膨張と融合	15
4.1	空間の膨張	15
	4.1.1 銀河の膨張は空間の膨張か?	16
12	アンドロメダと Millayway 銀河の融合	16

	4.3	銀河団の融合	16
		4.3.1 爆発による粒子とフォトンの消滅	16
		4.3.2 宇宙は無限の過去から存在	17
	4.4	宇宙は無限	17
第		α - 宇宙と Mugen 宇宙	18
		$lpha-$ 宇宙と ${f Mugen}$ 宇宙の階層構造 \ldots	
	5.2		
		5.2.1 銀河核の物理学	20
第	6章	理論物理学を学ぶ若者へ	21
	6.1	物理学と自然現象	21
	6.2	職人的な技術習得・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
		6.2.1 手計算	
	6.3	・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	
	6.4	 銀河核の模型計算	
, .			
付	録 A	力学演習 No.1 [6]	23
付	録B	何故、一般相対論は無意味か?	24
	B.1	相対性理論	24
		B.1.1 Lorentz 変換	24
		B.1.2 Lorentz 不变量	25
		B.1.3 Minkowski 空間	25
	B.2	一般化の危険性	26
		B.2.1 $(ds)^2$ の不変性	26
		B.2.2 $(ds)^2$ の一般化表現の意味	26
		$\mathbf{B.2.3}$ $g^{\mu u}$ の物理的な意味 $\dots\dots\dots\dots$	
	B.3	一般相対性理論	27
	B.4	負の遺産	27
付		力学の相対論効果	28
	C.1	重力付加ポテンシャル	
		C.1.1 非可積分ポテンシャル	
		C12 動道の式がデカルト応煙に戻せたい!	20

		C.1.3	軌道の不連続性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	30
		C.1.4	軌道の不連続性と水星近日点	31
	C.2	非可積缩	分ポテンシャルの摂動計算	32
		C.2.1	摂動計算の最低次項	33
		C.2.2	摂動計算の高次項	34
	C.3	新しい	重力理論の予言	35
		C.3.1	重力付加ポテンシャルによる周期のズレ	35
		C.3.2	地球公転周期のズレ(うるう秒)・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	36
		C.3.3	うるう秒の起源・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	37
付	録 D	水星近日]点への惑星効果	38
	D.1	水星近日	日点への惑星の重力効果・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	36
		D.1.1	惑星運動は同一平面	36
		D.1.2	水星の運動	40
	D.2	惑星効果	果の近似的評価・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	41
		D.2.1	Legendre 展開	41
		D.2.2	逐次近似法	42
		D.2.3	特殊解	42
	D.3	水星近日	日点に対する惑星の効果・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	43
		D.3.1	数値計算	43
		D.3.2	惑星運動の1周期の平均	44
	D.4	数值計算	算の結果	45
		D.4.1	100年間の δ の値 \ldots	45
		D.4.2	観測値との比較	46

第1章 Olbers のパラドックス

ここではOlbers のパラドックスについて簡単に解説しておこう。これは「夜が何故、暗いか」と言うことと関係しており、昔、力学演習の問題に入れておいたものである。 参考のため、付録にその演習問題を載せておこう。

1.1 Olbers のパラドックスとは?

この宇宙空間が無限に広いとして、またその宇宙に星が一様に分布していたとしよう。この時、その星の光をすべて集めると光の強さは無限大になってしまうと言うお話である。この計算は単純であり、宇宙空間が無限大であるとして光速の有限性を無視する限り、その主張は正しいものである。このため、宇宙が無限に大きいとする仮定には問題が生じてしまうと言うパラドックスであった。

1.1.1 宇宙空間は有限?

このためこの宇宙空間は無限に大きいものであってはならないと言う事が科学的常識となって現在に至っている。ビッグバン模型もそのうちの一つであり、演習問題で議論しているように有限の宇宙ならば確かに、夜が暗い事を証明する事ができる。そして宇宙空間が有限であるとしてOlbersのパラドックスを避ける宇宙模型がこれまでの定説と考えられてきたのである。

1.2 Olbers のパラドックスの問題点

ところが Olbers のパラドックスには重大な見誤りがある。それは光速の有限性と関係している。Olbers のパラドックスは19世紀初めに提案されたのであるが、それ以前に光速の測定はすでに行われている。実際、18世紀半ばには光速が約30万km/sである事が測定されている。しかしこの Olbers のパラドックスについて、光速の有限性を人々がどこまで認識していたのかは良くわからない。

1.2.1 光速の有限性

光速が有限であることを認識していたら、無限の彼方から星の光が到着するためには無限の時間が掛かってしまう事が分かる。従って、無限の彼方の宇宙から光が届くことはなくOlbers のパラドックス自体が意味をなしていないのである。これは「無限大」が人間の認識を超えている事と関係している。数学で定義され、そして使われている「無限大」と言う量は「どのように大きな数を持って来てもそれよりも充分大きい数」と言う有限量でしかない。本当の意味での無限大を人間が認識する事は勿論、不可能である。

第2章 ビッグバン模型

ビッグバン模型の成り立ちなどを科学史的に見て行く事は他の解説書を参照して貰う ことにしよう。ここでは「点」から生成されたビッグバンと言う「火の玉」がバリオ ン状態になって、さらに星などを形成し始める時点から議論して行こう。

2.1 ビッグバンとは?

ビッグバンとは「点」から爆発して生成されたエネルギーの塊 (ビッグバン) が急膨張して、何らかの理由によりバリオンや電子やフォトンなどの素粒子を作り出して行く。そしてそれらが次第に冷えて行き陽子と電子の集合体となる。その後、それらがいずれは星や銀河形成の元になって行くというお話である。但し、現在の場の理論ではエネルギーの塊が陽子ー反陽子を生成した場合、「反陽子だけが消滅してしまい、陽子だけ残る」と言うような物理過程は存在しない事が証明されている。陽子崩壊が実験的に否定されたからであるが、実はその陽子崩壊の理論模型 (大統一理論) も「自発的対称性の破れ」を誤解した間違いだらけの理論模型ではあった。

2.1.1 ビッグバンの対称性

ビッグバンは「点」からできたとしているため、その対称性が完全である。このため例え統計的な揺らぎを最大限に使ったとしても、そこから星などを形成する事が不可能であることは良く知られた事実である。しかしここではともかく、星や銀河が形成されたとしよう。

この場合、「点」が持っていたエネルギーの塊は基本的には銀河などの質量とその運動 エネルギーになっている。それと一部はフォトンとしてエネルギーを外界に放出して いるのであろう。

2.1.2 一般相対論とは何か?

空間の膨張を予言したのは Einstein 方程式の Friedmann 解であり、Friedmann 宇宙と呼ばれている。それでは一般相対論とは何に対する方程式なのだろうか?実はこの Einstein 方程式は時空の計量と関係していると言う計量テンソルに対する方程式であるが、この方程式が物理的に何を指し示しているのかは不明である。それは対象となる自然現象が存在していないからである。

2.1.3 一般相対論は運動学かそれとも動力学か?

一般相対論は粒子の運動に対する方程式ではないのでダイナミックスを扱う方程式ではない。しかしそれでは運動学なのかと言うと物理量を扱う方程式ではないので運動学でもない。それでは物理学で言ったら Einstein 方程式はどういう目的で作られた方程式なのだろうか? これが実は不明である。繰り返すことになるが、これは対応する自然現象が存在していないからであるが、どうにも奇妙な話である。

2.2 空間の膨張とは何か?

ビッグバンでは空間が膨張したと言う言い方をしている。それは計量テンソルが時空の計量に関係しているからと言う理由のためであるが、ここでは空間の膨張とはどういう事なのかを検証して行こう。

2.2.1 エネルギーの塊が空間の膨張に変換された?

それでは、最初の「点」が持っていたエネルギーの塊が何故、空間の膨張に変換されたのであろうか?実はこの最も深刻な疑問に対して誰も関心を示さないし、勿論、それに答える事はできていない。人々は恐らくここで空間の膨張と銀河の膨張を同一視しているのであろう。しかしこれは勿論、物理ではない。物理的には何を言っているのか理解不能であるが、人々はわかった振りをしてきたのであろう。

2.2.2 何故、ビッグバン模型が生き延びたか?

こうした基本的な問い掛けに対して答える努力はしないで、逆にすべてそれらを無視する事によってこれまでビッグバン模型が「生き延びて来た」のである。このような無責任な研究態度に対して、このビッグバン模型に携わってきた専門家達やそれに関連する研究者達の責任はどうにもならない程に重いものと考えられる。

但し、これに対して一つだけ言い訳はあるかも知れない。それはこれまで(20世紀以前)、新しい重力理論が作られていなかったと言う事実である。それ以前においては、一般相対論が重力理論であると言う強い思い込みが人々の間に蔓延していたのである。現在は一般相対論が重力とは全く無関係であることが証明されているし、一般相対論の非物理性も明らかになっている。その意味で「ビッグバン模型が生き延びたのは人々の思い込みに依っていた」と言えるのかも知れない。

第3章 背景輻射

ビッグバン模型の最も重要な根拠となったのが背景輻射である。これはビッグバンの際、大量のフォトンが生成されるのであるが、その生成時においてはビッグバンは高温である。それで人々はそれが冷えて熱平衡状態になったものが背景輻射であると主張したのである。ここでは背景輻射ついて簡単な解説をしておこう。

3.1 背景輻射の発見

実際、この宇宙は 2.7 K の背景輻射で満ちている。そして、この発見は非常に価値のあるものである。自分が大学院生の頃、この背景輻射の発見者である Wilson が日本を訪問して大学で講演をしてくれたことがある。それは 1 9 7 0 年代初頭のことである。彼は当時、人工衛星からの電波を検出する装置を作成していた技術者であった。彼の話だと測定精度をどんどん上げて行き、当時、これ以上の弱い電波の検出は不可能であろうと言うレベルまで精度を上げる事ができた。ところがどうしてもあるノイズを抑える事が出来きなかったと言う事であった。彼らは測定している建物にノイズを発生する可能性があると考えられるすべてをチェックしたと言っていた。「自分たちはハトのフンまで取り除いたのだ」と言う話が非常に印象的であった。

しかしどうしてもノイズを取り除くことはできなくて結局、諦めたと言う事であった。しかしこのノイズ発見の直後に、ある研究者が「ビッグバンの名残りとして背景輻射が存在するはずであり、この場合の輻射の温度は 10 K 程度である」と言う理論が提案されたのである。このため、Wilson 達は自分たちが取り除けなかったノイズがこの背景輻射かも知れないと言う事で、これは大変な発見になったようだと思ったそうである。

第3章 背景輻射 13

3.2 熱平衡

この宇宙空間で輻射が熱平衡になっていると言うお話は最初、非常に奇妙に思った ものである。熱平衡とはある粒子群間に何らかの相互作用があり、その粒子群が何ら かの形で有限の空間に閉じ込められている場合にのみ起こる現象である。「宇宙空間の ように開いた空間では輻射が熱平衡になる事はあり得ない」と言う事は物理学の常識 である。しかし人々はこのお話を受け入れたし、これまでこの背景輻射の観測値はビッ グバン模型の重要な根拠となってきた。

3.2.1 開いた系の熱平衡

実際問題として開いた系が熱平衡になっている事例は物理学では知られていない。熱平衡になるためには粒子間の相互作用が頻繁に起こっていると言う重要な仮定がある。この場合、統計物理学では「相互作用の強さがどんなに弱くても、十分時間がたてば熱平衡状態に至る」と言う事が示されている。ところで、粒子間相互作用(衝突)が頻繁に起こるための条件として、通常、平均自由行程(mean free path)で表す事ができる。式は書かないが、1個の粒子に注目した場合、どれだけ走ったら次の相互作用(衝突)が起こるかと言う事である。

3.2.2 箱の中の気体

例えば箱の中に閉じ込められた気体を考えるとその原子の平均自由行程は大雑把にいって cm のオーダーである。この場合、原子の大きさから言ったら充分長いが、しかしマクロスケールでみたら、これは衝突が充分頻繁に起こっていて一定時間後には熱平衡状態になると考えて良い。

3.2.3 宇宙にある光子の衝突回数

一方、ビッグバン模型で主張されている宇宙を考えるとその大きさは100億光年程度でありその中に約1000億個程度の銀河が存在していると考えられている。この場合、輻射が熱平衡になるためには衝突が充分な頻度で起こっている必要がある。ところがこの場合、フォトンが水素原子衝突するとした場合の平均自由行程は約100万光年程度である事が示されている。これはすなわち、フォトンはほとんど衝突はしない事を意味していて熱平衡とは全くの真逆の状態であることがわかる。

第3章 背景輻射 14

3.3 背景輻射の起源

結論として、もしビッグバンの爆発で大量のフォトンが生成されたとしても、それが背景輻射として残っている事はあり得ない事が分かっている。従ってこの背景輻射は何処から来ているのかと言う問題は現在の宇宙論における最大の謎である。しかしこの問題はそもそも星を構成している陽子や電子がどこから来たのかと言う問題と恐らくは同等のレベルの設問となっていよう。後で解説するように、背景輻射の原因は恐らく、他の宇宙からやってきたものと考えられる。しかしながら、科学が明らかにできる現象は非常に限られている。そしてその事を常に肝に銘じておく必要があると言う事であろう。

第4章 宇宙の膨張と融合

宇宙の膨張は観測事実と考えられている。しかしこの場合の膨張とは何であろうか? それはこの宇宙の銀河がそれぞれ相対的に離れて行くように運動していると言う事に 対応している。ところがこの観測事実を曲解して、これが空間の膨張であるとビッグ バン模型の支持者達は主張したのである。

4.1 空間の膨張

それでは空間の膨張とはどういう事であろうか?この空間の膨張として1970年代の物理屋は「風船の膨張」の例を出して解説したものである。この風船の表面は2次元であるが、実際はこれを3次元で考えれば良いと言う説明であった。この場合、風船の表面が空間に対応すると説明されていたのである。そうだとすると、銀河は空間にくっ付いていると言う事になっている。これは物理的にはどういう事であろうか?これはどのように考えてみても理解不能である。銀河が空間にくっ付いて運動しているとしたら、そのエネルギーは空間が持っている事になってしまう。勿論、これは物理学とは無関係のお話である。

ところが現実問題としては、宇宙論の専門家と自称する人々はその後、宇宙の膨張の説明または解釈を停止または放棄したのである。そして現在は宇宙は膨張していると言う事を主張するが、それはそれぞれの銀河の膨張の事であるとしていて、空間の膨張が物理的に議論されることはない。

4.1.1 銀河の膨張は空間の膨張か?

物理学の言葉で見てみれば話ははっきりしてくる。銀河が持っているエネルギーは運動エネルギーと重力エネルギーである。星が光を放つ際におけるエネルギー源は核融合のエネルギーであるが、今の場合、そのエネルギーを考慮する必要は特にない。従って、空間の膨張とともに銀河が膨張したと言う主張では膨張のエネルギーは空間のエネルギーと言う事になり、これは物理学ではない。

4.2 アンドロメダと Milkyway 銀河の融合

銀河膨張のエネルギーは最初に複数個の巨大銀河クラスター同志が衝突してできた 爆発のエネルギーである。このエネルギーの源は勿論、銀河が持っていた重力エネル ギーである。これまでそして恐らくは現在も、そのエネルギーが銀河の運動エネルギー として相対的な銀河同志間の膨張として観測されているものと考えられる。いずれは この膨張が止まり、銀河同士が融合し始める事になるだろう。銀河間の相互作用は重 力であり、これは必ず引力なので次第にお互いを引き付け合って融合(衝突)して行く 事になるであろう。隣の銀河系であるアンドロメダ銀河と我々の Milky Way 銀河は 約30億年後に衝突して融合する事が計算によって分かっているが、しかしこれがこ の宇宙全体の融合の兆しと関係しているのかどうかはよくわからない。

4.3 銀河団の融合

現在、宇宙に存在している銀河はいずれより大きな銀河団になって行くものと考えられる。そしてそれが次第に融合を繰り返して行き、いずれは2個または3個の巨大な銀河団になって行くのであろう。そしてそれらはいずれ一つに融合する事になろう。これは宇宙ファイヤボールとして、宇宙初期のような状態を示すのであろう。この融合は爆発に対応していて、その爆発後は膨張に転じて行くのであろう。

4.3.1 爆発による粒子とフォトンの消滅

従って、この我々の宇宙はこの融合と膨張を繰り返して行く事にとなっているものと考えられる。この場合、爆発時に一定量の輻射エネルギーと粒子群を失う事になる。 特に輻射エネルギーはかなり大量に失われて行く事は間違いないと考えられる。

4.3.2 宇宙は無限の過去から存在

しかし陽子と電子がともに安定であることが実験的に実証されているので、この宇宙は無限の過去から存在している。そして勿論、永遠の未来にも存在するものである。その場合、この宇宙は融合と膨張を繰り返してきた事になっていると考えられる。しかしその場合、重大な問題が生じてしまう事になる。それはそれぞれの爆発で一定量のフォトンエネルギーを失っているため、これが無限回、繰り返されたとしたらこの宇宙のエネルギーは大半がなくなっている事になっている。これは明らかに、現在の我々の宇宙の存在と矛盾しているため、何らかの形でエネルギーを外から獲得する必要がある。

4.4 宇宙は無限

このフォトンのエネルギー消失の矛盾を解決できる唯一の方法は、この宇宙には我々のような宇宙が無限個あると言うものである。この場合、失われているフォトンのエネルギーは無限の宇宙からやってくるフォトンのエネルギーによって回復されているものと考えるのが妥当である。そしてその輻射が背景輻射として観測されていると考えられるものである。次節で議論するように、我々の宇宙の事を α — 宇宙と呼ぶ事にしている。

第5章 α -宇宙とMugen宇宙

ここで約100億光年程の大きさを持ち、その中に約1000億個程の銀河が存在していると言う、この我々の宇宙の事を α — 宇宙 (α —universe) と呼ぼう。全宇宙 (Mugen Universe) とはこれらの α — 宇宙と同等の宇宙が無限個存在している宇宙の事である。「Mugen」は Bentham の教科書 [3] で使用して以来、これを英語として使っている。それはこの言葉が宇宙論における「果てしのない宇宙空間」を表すためには最も適した表現と考えられるからである。

5.1 α -宇宙とMugen宇宙の階層構造

ここで簡単にこの宇宙の階層構造を書いて置こう。まずは地球から始めよう。

(1) 地球の大きさ:

地球の半径は約6400 km である。地球は太陽の周りを公転しているが、その公転軌道は光速で約8分かかる距離である。

(2) 太陽系の大きさ:

太陽は恒星であり、宇宙における標準的な星であると考えられている。今後、銀河などの質量はこの太陽質量 M_\odot を基準として計って行く。距離は光年を基準とするが 1 光年は約 9.5×10^{17} cm である。また太陽系の大きさは約 3×10^{-3} 光年程度である。

(3) 銀河系の大きさ:

MilkyWay (銀河系) の大きさ (直径) は約10万光年である。銀河系の質量は恐らくは $2 \times 10^{12}~M_{\odot}$ 程度であろう。恒星の数 $N_{\rm star}$ は $N_{\rm star} \sim 10^{11}$ 程度と考えられているが、あるいはそれよりも少ない可能性がある。これは銀河核の質量がどの程度かと言う事に強く依存している。

(4) α - 宇宙の大きさ:

銀河系が集まって我々の宇宙 (α - 宇宙) を形成している。この中にどのくらいの数の銀河が存在しているのか、あまり確かな事はわかっていないと言えよう。現在、 2×10^{11} 程度は存在していると考えられているようである。しかしここでの議論に関しては、この数はそれ程、問題にはならない。この α - 宇宙の大きさも良くわからない。大雑把には 1 0 0 億光年前後であろうとは思われる。しかしこれも正確な数字に特に意味があるとは言えない。

(5) Mugen 宇宙の大きさ:

これらの α — 宇宙は無限個存在している事が必要である。実際、このような α — 宇宙が無限個あるとしない限り、宇宙の安定性を証明する事はできないのである。 そしてこの無限個の α — 宇宙の集まりを Mugen 宇宙と呼んでいる。

それでは α — 宇宙が無限個ある場合、我々の α — 宇宙は安定であろうか?隣の α — 宇宙から確かに引力を受ける事になる。しかしながら、これらの α — 宇宙が無限個あるとすれば、我々の α — 宇宙はあらゆる方向から引力を受ける事になって、確かに我々の α — 宇宙は安定であることがわかるのである。

5.2 宇宙ファイアボール

α- 宇宙の宿命として、融合と膨張を繰り返して行くものと考えている。その場合、融合の最終段階として爆発状態となるものと考えられる。これを「宇宙ファイアボール」と呼んでいるが、これはある意味でビッグバンの初期状態に近いものと考えられる。しかし現在のところ、この「宇宙ファイアボール」に対する具体的な描像は作られてはいない。膨大な数の銀河が一つまたは複数のファイアボールになると言う物理学はお話で言っているだけで具体的な理論計算はどうしたら可能なのか、今の段階では見当もつかないものである。

5.2.1 銀河核の物理学

宇宙ファイアボールの前にまずは銀河核の模型計算が必須であろう。これまで多くの宇宙物理屋はこの銀河核をブラックホールとして片づけてきたが、勿論、これは何も言ったことにはなっていない。

銀河核の研究のためには、恐らく銀河核の状態方程式をしっかり構築して、その物理的な特性をある程度にせよ、明らかにして行く事がまずは最初の仕事となろう。これを理解していないと銀河核の議論を進めて行く事は難しいものと考えられる。

銀河核の場合、強大な重力と強力な核力とのせめぎ合いとなっているのであろうが、このダイナミックスを取り扱う事は相当に、難しいものであろう。そしてこれは科学になり得るかどうかは別として、物理学者としてはどうしても解きたい問題であることは確かである。いずれこの問題に挑戦する若手の理論物理学者が現われる事を期待したいものである。

第6章 理論物理学を学ぶ若者へ

現在、そして将来に渡って「理論物理学の職人」を育てる事が非常に重要な時代になっている。このため、ここでは理論物理学における職人的な技術に対して、簡単なコメントをしておこう。この様な事が役に立つとは思われないが、しかし一人でも何かを感じてくれればそれで良いと思っている。

6.1 物理学と自然現象

物理学は自然を理解しようとする学問であり、従ってその時代に応じて研究テーマは勿論、変わって行く事になっている。この場合、どうしたらその変化に対応できるかと言う事が今ほど深刻になっている時代はこれまでには無かったと思われる。その原因の一つとして、知識だけは世の中に異常なレベルで氾濫していると言う事実がある。このため、その内どれが正しいものなのかと言う事を見極める事が非常に難しいものとなってしまったのである。人々は「ネット知識」のかなりの部分は間違っているとわかっていながら、しかしそれを検証するためには膨大な時間が掛かってしまうと言う弊害がある。これが混乱を招いている一つの原因なのであろう。

6.2 職人的な技術習得

従って、どの分野にせよ、自分自身が進歩して行くためには「職人的な技術習得」が必須になっている。コンピュータやAIが活躍できる分野が沢山あることは間違いないが、しかし例えばAIに関しては、AIがその作成者以上に有能になる事は不可能である。昔、「電卓」が出始めの頃、その計算の速さに吃驚したものだが、しかし頭の中で計算をし続ける場合、電卓はまったく役には立ってはいない。

6.2.1 手計算

それと比べると「ソロバン」は一生、役に立つものである。その計算を自分の頭で実行する事を繰り返すため、この技術としては自分の中に何時までも残る事になっている。従って、理論物理学の基本的な技術としてはどうしても計算技術習得が必須である。この場合、手計算が非常に重要であり、簡単な計算を繰り返し繰り返し行う事によってのみ、この手の技術が習得できるものである。それと並行してコンピュータによる計算技術も重要である。この場合、やはり FORTRAN を学んでおく事が必須であろう。これにより手計算のチェックが簡単にできるし、また手計算ではできないところも検証できる場合がある。しかしいずれにせよ、基本が手計算であると言う事を常に自分に言い聞かせておく必要があると思われる。

6.3 理論物理学の技術

ソロバンは科学とは関係ないが、しかしこうした技術を身に着ける事が理論物理の分野でも必要であろうと考えられる。その技術のなかで、理論物理学を学び研究する上で最も重要な技術的な部分はやはり Lagrange 方程式を含む定式化であろうと思われる。この Lagrange 形式が頭に入っていると理論物理学への応用は相当に整理されるものであると思っている。しかしながらこの計算技術を自分のものにするには相当の訓練が必要であり、これを習得する事が理論物理の職人への第一歩かも知れない。

6.4 銀河核の模型計算

本文でも少し触れているが、今後しばらくの間は「銀河核」に対して何らかの形での模型計算が重要なテーマとなるものと思われる。どのようなイメージを持ったら簡単で本質的な描像が描けるのか全く分からないが、しかし非常に興味はある。簡単で本質的な模型を提案できれば、それに応じて観測の方も可能になってくるものと考えている。まずは基礎的な模型計算を如何に実行できるかと言う事であろう。

付 録 A 力学演習 No.1 [6]

夜が何故暗いか (Olbers のパラドックス) を考察する. 但し星は無限に広い宇宙に一様に分布しているものとして、その密度を n とする.

(a) 地球から r=(x,y,z) と r'=(x+dx,y+dy,z+dz) の間にある星の数 ndxdydz を極座標 r,θ,φ で書け、但し、x,y,z から r,θ,φ への Jacobian J は $dxdydz=Jdrd\theta d\varphi$ として、次のように書ける.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

- (b) 星の個々の明るさを L とし、これが星の明るさの平均とする.全宇宙からの星の 光を積分して地球上における明るさを求めよ.これが発散することを確かめよ.
- (c) 現実に夜は暗い.このパラドックスについての現在の理解は、次のようである.それは、宇宙は有界で星の数も有限であるというものである.宇宙の大きさを 10^{10} 00億光年、その中にある星の数を 10^{10} 個とした時、星の全部の明るさは、太陽 (明るさ L) が何光年の距離にある場合と同じであるか?

付 録 B 何故、一般相対論は無意味か?

Einstein 方程式は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する微分方程式である.この計量テンソルは $(ds)^2$ と言う Lorentz 不変量を一般化した形として書き換えた時に使われたものである.しかしながらこの一般化に物理的な意味はない.従って, $g^{\mu\nu}$ 自体も物理的な意味は皆無である.この問題は物理学と関連する理論ではないが,しかし歴史的には重要でもあり,何故,この理論が受け入れられてしまったのかという問題も含めて解説して行こう.

B.1 相対性理論

相対性原理とは『どの慣性系でも運動方程式が同じ形をしている』と言う要請である.このため,どの慣性系においても観測量はすべて同じになっている.これが相対性理論の本質である.この自然界は4つの相互作用で理解されている.電磁的な相互作用,弱い相互作用,強い相互作用そして重力である.これらの相互作用は全て相対論的な不変性を保っている.これらの相互作用が Lorentz 変換に対して不変であることを証明することは易しい事とは言えない.しかし,必ず自分の手で計算することが相対性理論の重要性を理解するためには必須であると言えよう.

B.1.1 Lorentz 变换

静止系 R(t,x,y,z) における運動方程式が静止系に対して,速度 v で x 軸に等速直線運動をしている運動系 (S- 系) S(t',x',y',z') においても同じ運動方程式になっていると言う要請を満たす変換が Lorentz 変換である.これは

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z'$$
 (B.1)

であり、これが相対性理論を満たすべき必要十分条件である・

B.1.2 Lorentz 不变量

Lorentz 変換に対する不変性だけを考えると数学的には様々な量を考える事ができる.ここではその中で歴史的にそして結果的に最も影響が大きかったものとして 4 次元空間の微小距離の 2 乗 $(ds)^2$

$$(ds)^{2} = (cdt)^{2} - (dx)^{2} - (dy)^{2} - (dz)^{2}$$

を挙げておこう.

B.1.3 Minkowski 空間

この $(ds)^2$ は Minkowski が Lorentz 変換の不変量

$$(ds)^{2} = (cdt)^{2} - (dx)^{2} - (dy)^{2} - (dz)^{2}$$
(B.2)

として定義したものである.これは確かに Lorentz 変換

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z'$$
 (B.3)

に対して不変である事が簡単に確かめられる. Minkowski はこれを数学的に拡張して

$$(ds)^{2} = (cdt)^{2} - (dx)^{2} - (dy)^{2} - (dz)^{2} \equiv g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$
(B.4)

としている.この時, dx^{μ} , dx_{μ} を

$$dx^{\mu} = (cdt, dx, dy, dz), \quad dx_{\mu} = (cdt, -dx, -dy, -dz)$$
 (B.5)

として導入している.また計量テンソル $g^{\mu
u}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれている.この拡張は確かに間違ってはいない.しかしながら $g^{\mu\nu}$ を計量テンソル (metric tensor) と呼ぶのは物理的には間違いである.この $g^{\mu\nu}$ は無次元量であるため,計量にはなっていない.

B.2 一般化の危険性

 $(ds)^2$ は Lorentz 変換に対する不変性を見る上では一つの検証材料としては意味があると考えられる。そしてそれを式 (B.4) のように一般的に書くことは特に問題とはなっていない。しかしながら物理学において $(ds)^2$ は本質的な物理量とはなっていないと言う事をしっかり認識する必要がある。

B.2.1 $(ds)^2$ の不変性

この $(ds)^2$ に関して重要なポイントを解説しておこう . $(ds)^2$ は確かに Lorentz 変換の不変量ではあるが,しかしながらこれは結果であり条件ではない.当たり前の事であるが, $(ds)^2$ を不変にする変換は Lorentz 変換だけではない.この事は相対性理論の根幹にかかわっている問題である.相対性理論は『どの慣性系でも物理の方程式が同じである』と言う条件を満たす理論体系であり,変換として Lorentz 変換が必要十分条件を満たしている.これに対して,数学的には $(ds)^2$ の不変性など様々な表現形式が考えられるが,これらは系の変換に対して十分条件とはなっているが,しかし必要条件ではない事に注意する事が必要である.

$\mathbf{B.2.2}$ $(ds)^2$ の一般化表現の意味

これまで長い間 (ds)2 を一般化して書いた

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \tag{B.6}$$

と言う表現が基本的で本質的であると言う錯覚を人々が持っていたように思われる.これはほとんどの物理屋が『目くらまし』に近い状態になっていたとしか言いようがないほど,深刻な間違いである.どう見ても,この式の物理的な意味合いを考える事を忘れてしまったものと言えよう.

$\mathbf{B.2.3}$ $g^{\mu\nu}$ の物理的な意味

物理学においては式 (B.2) が本質的であり $g^{\mu\nu}$ に物理的な意味を見つける事は不可能である事がわかる.この $g^{\mu\nu}$ は数学的な拡張 (遊び) としては良いが,物理学に取っては特に意味があるわけでもなく,むしろ不要であると言えよう.

B.3 一般相対性理論

一般相対性理論における Einstein 方程式はこの不要である計量テンソル $g^{\mu\nu}$ に対する方程式である [9]. 従ってこの方程式について,ここで議論するべき価値を見出す事は出来ない.計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空の関数になっても別に相対性理論における Lorentz 変換が変更を受けるわけではない.さらに時空に依存する $g^{\mu\nu}$ を使った記述を採用した場合,その表現の $(ds)^2$ が不変性を失ったと言うだけの事である.この場合,元の $(ds)^2$ の式 (B.2) を使えば問題ないのである.よって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ によって計算された $(ds)^2$ が元々ある不変性を無くしたとしても,それにより物理に対する影響が何処かに現われているかと言うと,そう言う事は全くない.

従って Einstein 方程式は物理学とは無関係の数学の方程式であると言う事が言えている.恐らく,この方程式は微分幾何学の練習問題としての意味はあるものと考えられるが,しかしそれ以上の数学的な意味合いは良く分からない.

B.4 負の遺産

このような簡単なことが何故,30年前にわからなかったのかと言う事に著者は情けない思いから抜け切れていない.多くの若者がこの一般相対論と言う全く無意味な理論に長い間,振り回されてきた事実は重い.その失われた時間を取り戻すことは出来ない.これは負の遺産どころの話ではない.しかしこの教訓を将来に生かして行く事こそが今となっては重要であろう.

ちなみに,ある時期に計量テンソルを無理やり重力場と関係づけて,水星の近日点移動の観測値を再現できたと言う主張が横行していた時があった.これは水星の軌道の式で『空間における飛び(不連続性)』を近日点移動と同定してうまく再現できたと主張したものである.勿論,これは科学にさえなっていないものであるが,物理学の歴史においても,これは最もお粗末な理論的予言の一つになっていると言えよう.

[2023年4月加筆]

付 録 С 力学の相対論効果

古典力学における相対論的な効果は観測可能であろうか? Newton 方程式は基本的には Dirac 方程式を非相対論にして,座標や運動量の期待値を求める事によって得られたものである.その意味では力学は相対論からの近似式でもあり,その過程で相対論の効果をある程度は内包している.この場合,日常世界における相対論的な効果を観測するためには,物体の速度が一定以上早い事が基本条件である.

それでは日常世界で最も速い速度を持っている物体は何であろうか?これは良く知られているように,地球公転の速度である.この速度 v は約 $v\simeq 10^{-4}c$ である.従って,この公転が相対論的な効果として現われる物理量は $(\frac{v}{c})^2\sim 10^{-8}$ である.よって,地球公転周期を精密に測定すれば,その周期 (1 年) が約 $\pi\times 10^7$ 秒である事から,これまでの Newton 力学におる周期から大雑把には 0.3 秒程度のズレが出てくるものと予想する事ができる.

ここでは古典力学における相対論効果について調べて見よう.しかしこれは基本的には場の理論を出発点としているため数式の導出はなく,どうしても天下りの議論になる事は避けられないものである.

C.1 重力付加ポテンシャル

場の理論における重力場が Dirac 方程式の質量項に入っているため,この場合,非相対論の近似を行うと新しい付加ポテンシャルが現れている [3]. 従って,地球が太陽から受ける重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \tag{C.1}$$

と求まっている.右辺の第2項が新しい重力ポテンシャルの補正項である.これは Zeeman 効果の導出と良く似ている.電磁場の場合,クーロンポテンシャルの項がエネルギー項にあたるため,非相対論の極限を取った場合に新しい項が出て来ることはない.しかしベクトルポテンシャルの項からは非相対論の極限で Zeeman 効果を含めた様々

な項が現われている.一方,重力はスカラー項として入っているので,非相対論の極限で上記に示したような新しい項が現れているのである.

C.1.1 非可積分ポテンシャル

式 (C.1) の第2項である重力付加ポテンシャルは数学的には非可積分である事が知られている.かって,カオスの理論が流行していた時があったが,その頃,この非可積分ポテンシャルの問題も一般に良く議論されていた問題であった.この場合,非可積分ポテンシャルの微分方程式の解にはその軌道に不連続な振る舞いが現れてしまう事が分かっていた.従って,この取り扱いには十分な注意が必要である.

非可積分ポテンシャル $V_c(r)=\frac{C}{r^2}$ がある場合,厳密解には自然界で起こってはならない現象が出てきてしまう.ここではこの問題を詳しく見て行こう.まず式 (C.1) で与えられるポテンシャル問題を解くと,その軌道の厳密解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right)} \tag{C.2}$$

となっている.この解法は Kepler 問題の場合と全く同じであり,何か特別な事を考える必要があると言うわけではない.但し,定数の修正はあり,ここでは A_g と L_g がそれぞれ

$$A_g \equiv \frac{L_g^2}{GMm^2} \tag{C.3}$$

$$L_g \equiv \sqrt{\ell^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2}} \equiv \ell \sqrt{1 + \eta} \simeq \ell \left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)$$
 (C.4)

と定義されている. 但し, η は

$$\eta \equiv \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \tag{C.5}$$

である.

C.1.2 軌道の式がデカルト座標に戻せない!

軌道を与える式 (C.2) には明らかに問題がある.まず,一番目として

$$\cos\left(\frac{L_g}{\ell}\varphi\right) \simeq \cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi)$$
(C.6)

を見てみよう.この場合,この式はデカルト座標

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
 (C.7)

で表す事が出来ない.実際, $\cos(\varphi+\frac{1}{2}\eta\varphi)$ 項は

$$\cos(\varphi + \frac{1}{2}\eta\varphi) = \frac{x}{r}\cos\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) - \frac{y}{r}\sin\left(\frac{1}{2}\eta\varphi\right) \tag{C.8}$$

としてみると分かるように、デカルト座標では表現不能である。元々はデカルト座標 から出発しているので,これは深刻な問題である.

C.1.3軌道の不連続性

さらに軌道の不連続性の問題がある. 軌道の解である式 (C.2)

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)\varphi}$$

は不連続である.これは軌道 r が $\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ でどうなっているのかを見れば良 くわかるものである. すなわち,

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0$$
 (C.9)

$$r = \frac{A_g}{1+\varepsilon}, \qquad \varphi = 0$$
 (C.9)
 $r = \frac{A_g}{1+\varepsilon\cos\pi\eta}, \qquad \varphi = 2\pi$ (C.10)

となっているため , 同じ点で軌道に飛びがある . この差を Δr とすると

$$\Delta r \equiv r_{(\varphi=2\pi)} - r_{(\varphi=0)} \simeq \frac{1}{2} A_g \pi^2 \eta^2 \varepsilon \simeq 0.15 \text{ cm}$$
 (C.11)

となっている、但しこれは水星の場合である、これは勿論、自然界では起こってはな らない現象である.

C.1.4 軌道の不連続性と水星近日点

以下はコメントであるが,一般相対論を信奉していた人々は『この軌道の飛びによって水星近日点シフトの観測値が説明できた』と主張していたのである.しかも,観測値と理論値が3桁近くも一致していたと言う主張であった.これは,一般相対論による水星近日点シフトの予言値を解説してきた物理屋達が,実際問題としてはこの計算を自分達で検証していたわけではなかったと言うことであろう.

さらに言えば、水星近日点シフトの観測値と言う量も実際には100年間の水星近日点シフト値として求められたものである.この場合、水星近日点シフトの観測値から、木星などの影響を考慮した計算値を差っ引く必要があったのである.ところが、木星などによる水星近日点シフトの計算の絶対値は非常に大きくて、またその効果の計算過程にはかなりの任意性がある事も分かっている.その意味で、これらの計算を自分で実行すれば、この計算値には不透明な部分が相当あり、到底、信頼できる計算ではない事が分かるものである.

物理屋として自然をきちんと理解するためには,どのような些細な事でも自分の手で検証すると言う姿勢を常に保っている事が必要であろう.そして,その『手を動かす作業』こそが物理を楽しむための基本条件となっていると言う事であろう.

C.2 非可積分ポテンシャルの摂動計算

ここでは非可積分ポテンシャルを摂動的に取り扱う計算手法について簡単に解説しよう.この場合,基本的な方針は変数である φ に摂動係数 η が関係する場合に注意を要すると言う事である.まず,軌道を決める方程式を書いて置こう.これは

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\ell^2 c^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2}
= r^2 \sqrt{1 + \eta} \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2 (1 + \eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2 (1 + \eta)r} - \frac{1}{r^2}}$$
(C.12)

である.この式は

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}}$$
 (C.13)

と書き換える事が出来る.ここで

$$\eta = \left(\frac{GmM}{\ell^2 c^2}\right)^2 \tag{C.14}$$

は

$$\eta \sim 10^{-8}$$
 (C.15)

と非常に小さな量である事に注意しよう. 従って, この η を摂動的に扱う必要がある. すなわち

$$\sqrt{1+\eta}d\varphi \simeq d\varphi \tag{C.16}$$

と近似して見る事である.この場合,近似したために無視した項がどの程度の大きさであるかと言う検証が重要であり,これは摂動計算の高次項として計算チェックをする必要がある.

C.2.1 摂動計算の最低次項

まず, 摂動計算における最低次項を見て行こう. この運動方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r} - \frac{1}{r^2}}$$
 (C.17)

となっている、これは確かに閉じた軌道を与えている、そしてその軌道は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{C.18}$$

となっている.ここで A_q は

$$A_g = \frac{\ell^2}{GMm^2} (1 + \eta)$$
 (C.19)

である.この場合,離心率 ε も変更を受けているが運動力学には影響していないので, 具体的には書いてない.その意味においては,この付加ポテンシャルによる影響とは, 軌道半径 A_a が変更されたと言う事に対応している.

この軌道の式 (C.18) から明らかなように,近日点のシフトはない.これは物理的には当然で,非常に小さな付加ポテンシャルが重力ポテンシャルに加わっても,これが軌道の主軸を変更する事はできないと言う事である.

C.2.2 摂動計算の高次項

ここで摂動計算における高次項の影響を見て行こう.式 (C.18) の解を $r^{(0)}$ すると

$$r^{(0)} = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

である.また摂動項を r' $(r=r^{(0)}+r')$ とすれば r' に対する方程式は

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{1}{2}\eta(r^{(0)})^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2(1+\eta)} + \frac{2m\alpha}{\ell^2(1+\eta)r^{(0)}} - \frac{1}{(r^{(0)})^2}}$$
(C.20)

となる.この場合,上式の右辺は φ にのみ依存していて r' には依っていない.ここで離心率 ε をゼロとすると右辺はゼロになっている.従って r' は離心率 ε に比例している事がわかる.よって r' は

$$r' \simeq C_0 \eta \varepsilon A_g$$
 (C.21)

と書く事が出来る.ここで C_0 は定数である.地球公転の場合, ε は ($\varepsilon \simeq 0.0167$) と非常に小さいので,この場合摂動の高次項は完全に無視する事が出来るのである.

C.3 新しい重力理論の予言

重力付加ポテンシャルが現われたため,これはこれまで Newton 以来利用されてきた重力ポテンシャルが変更を受けた事になっている [3].この事は歴史的にみても非常に重要である.実際には,これは非常に小さい効果ではあるが,しかし観測に掛かる程度の大きさではある.この影響を定量的に計算して確かめて行こう.

C.3.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期 T は

$$\omega T \simeq 2\pi \{1 + 2\eta\} \tag{C.22}$$

となる.ここで η は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \tag{C.23}$$

と書かれている.この式で R は平均軌道半径, ω は角速度で Newton 周期 T と

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

と結びついている.この事より,重力付加ポテンシャルにより引き起こされる効果として,周期のズレ ΔT は

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \tag{C.24}$$

である [2,3]. ここで , 式 (C.24) の分母にでている T は Newton 周期と近似して十分である . この式より , 正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているので運動は「周期の遅れ」に対応している .

この周期のズレは大雑把に言って $\sim 10^{-8}$ の大きさであり,これは現在,時間に関する測定精度から見ても十分,観測可能な量である.但し,地球の公転周期を直接,この精度で測定する事は簡単な事ではないものと思われる.しかしながら幸いにして,次節で議論するようにこれは『うるう秒』によって検証する事が出来ている.

C.3.2 地球公転周期のズレ(うるう秒)

地球公転の場合, 軌道半径 R, 太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7}$$

である.ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である.従って1年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ Motion} = 0.621 \text{ s/year}$$
 (C.25)

だけ大きくなっているため、これは確かに遅れになっている、従って、この事はうるう秒の補正が必要である事を示している、実際、うるう秒の補正は1972年6月から始まりこれまで40年間に25秒補正している、従って1年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital\ Motion}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year}$$
 (C.26)

である.これは式(C.25)の理論値と完全に一致している.

C.3.3 うるう秒の起源

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [10]. すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり,これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる.

[2023年4月加筆]

付 録 D 水星近日点への惑星効果

水星近日点は木星など他の惑星からの重力ポテンシャルの影響を受けている.ここでは水星近日点が他の惑星からの重力により,どのようにシフトするのかと言う問題を摂動計算により評価して見よう.そして Newcomb が 1898 年に行ったと言う計算結果と比較検討しよう.但し,Newcomb の計算においてはその中途までは比較的わかり易いものであるが,彼の計算における最終的な計算結果は不明な点が多すぎるものである.このため彼の計算の最終部分の検証は現在までのところ,残念ながら実行できてはいない.

しかしながら,この場合においては,水星近日点シフトの観測値自身の検証も重要な課題となっている.観測値と言っても,その近日点シフトの物理量には理論的な計算結果が含まれているように見えており,この辺の問題もあまり良くわからない事も確かである.現在においては,一般相対論が重力とは無関係である事が証明されているため,一般相対論による水星近日点シフトの理論計算が無意味である事が分かっている.このため,水星近日点シフトの観測値を理論値と比較すると言う場合,この理論値は木星などの他の惑星の影響によるものだけとなっている.

D.1 水星近日点への惑星の重力効果

木星などの他の惑星が水星に与える影響は次のような Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w\dot{\boldsymbol{r}_w}^2 + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_w|}$$
(D.1)

から計算を始める事になる.ここで (m, r) と (m_w, r_w) は水星と惑星の質量とその座標を表している.式 (D.1) の右辺の最後の項は水星と惑星の重力ポテンシャルを表している.今の場合,この相互作用は他のポテンシャルと比べて充分小さいとしてこれを摂動的に扱って行く事になる.

D.1.1 惑星運動は同一平面

ここで全ての惑星運動は同一平面であると仮定しよう.これは実際の観測と比べても十分,良い近似であると言えよう.従って,上記の Lagrangian を2次元極座標で書いておくと

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}m_w(\dot{r_w}^2 + r_w^2\dot{\varphi_w}^2) + \frac{Gm_wM}{r_w} + \frac{Gmm_w}{\sqrt{r^2 + r_w^2 - 2rr_w\cos(\varphi - \varphi_w)}}$$
(D.2)

となっている、従って、水星と惑星に対する運動方程式はそれぞれ以下のようになる。

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^{2} - \frac{GmM}{r^{2}} - \frac{Gmm_{w}(r - r_{w}\cos(\varphi - \varphi_{w}))}{(r^{2} + r_{w}^{2} - 2rr_{w}\cos(\varphi - \varphi_{w}))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^{2}\dot{\varphi}) = -\frac{GmMrr_{w}\sin(\varphi - \varphi_{w})}{(r^{2} + r_{w}^{2} - 2rr_{w}\cos(\varphi - \varphi_{w}))^{\frac{3}{2}}}$$

$$m_{w}\ddot{r_{w}} = m_{w}r_{w}\dot{\varphi}^{2} - \frac{Gm_{w}M}{r_{w}^{2}} - \frac{Gmm_{w}(r_{w} - r\cos(\varphi - \varphi_{w}))}{(r^{2} + r_{w}^{2} - 2rr_{w}\cos(\varphi - \varphi_{w}))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}(m_{w}r_{w}^{2}\dot{\varphi}) = -\frac{Gm_{w}Mrr_{w}\sin(\varphi_{w} - \varphi)}{(r^{2} + r_{w}^{2} - 2rr_{w}\cos(\varphi - \varphi_{w}))^{\frac{3}{2}}}$$

D.1.2 水星の運動

水星と惑星の相互作用を無視した場合,これは単純な Kepler 問題である.この場合,運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM}{r^2} \tag{D.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{D.4}$$

となっている.そしてこの解は以下のようである。

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{D.5}$$

とである.ここで A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$$
 但U $(\alpha = GMm)$ (D.6)

D.2 惑星効果の近似的評価

ここで水星の運動に対する惑星の効果を摂動的に取り扱って行こう.この場合,水 星に対する運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w(r - r_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(r^2 + r_w^2 - 2rr_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}}$$
(D.7)

である.ここで右辺の最後の項において $r,\ r_w$ を平均半径 $R,\ R_w$ で置き換えると言う近似を行う.従って,方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} - \frac{Gm_w (R - R_w \cos(\varphi - \varphi_w))}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w \cos(\varphi - \varphi_w))^{\frac{3}{2}}}$$
(D.8)

となる.以下では式(D.8)の近似解を求めて行こう.

D.2.1 Legendre 展開

ここで最後の項 (D.8) を F として

$$F(x) \equiv -\frac{Gm_w(R - R_w x)}{(R^2 + R_w^2 - 2RR_w x))^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{(D.9)}$$

と定義しよう. そしてこれを

$$F(x) = -\frac{Gm_w R}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} x + \cdots$$
 (D.10)

と Legendre 展開しよう.従って,運動方程式は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(\varphi - \varphi_w)$$
 (D.11)

となる、ここで定数項は影響しないので無視している、

D.2.2 逐次近似法

この方程式 (D.11) を逐次近似法によって解いて行こう . まず , この式に Kepler 問題の解である

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \omega t \tag{D.12}$$

$$\varphi_w = \varphi_w^{(0)} + \omega_w t \tag{D.13}$$

を代入しよう.この場合,式(D.11)は

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t)$$
(D.14)

となる.ここでb, β は

$$b = \varphi^{(0)} - \varphi_w^{(0)}, \quad \beta = \omega - \omega_w \tag{D.15}$$

となっている.

D.2.3 特殊解

方程式 (D.14) を解くために,まず最後の項は充分小さいものと仮定しよう.従って,r は次のような解を持つと仮定しよう.

$$r = r^{(0)} + K \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}}} \cos(b + \beta t)$$
 (D.16)

ここで $r^{(0)}$ は Kepler 問題の解であり

$$r^{(0)} = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{D.17}$$

である.この場合,式(D.16)を式(D.14)に代入しよう.この時, K は

$$K = -\frac{1}{\beta^2} \tag{D.18}$$

とすぐに求める事が出来る.よって近似解は

$$r = r^{(0)} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t)$$
 (D.19)

となる.

D.3 水星近日点に対する惑星の効果

ここで \mathbf{Kepler} 問題の解 $r^{(0)}$ を代入すると軌道の解は

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} \beta^2} \cos(b + \beta t)$$

$$\simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \frac{Gm_w R_w (R_w^2 - 2R^2)}{R(R^2 + R_w^2)^{\frac{5}{2}} (\omega - \omega_w)^2} \cos(b + \beta t)}$$
(D.20)

となっている.ここで $A\simeq R$ であり,また $eta=\omega-\omega_w$ である.また $arepsilon_w$ を

$$\varepsilon_w \equiv \frac{Gm_w}{RR_w^2(\omega - \omega_w)^2} \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.21}$$

と定義しよう.ここで $b+\beta t=\varphi-\varphi_w$ を使うと軌道 r は

$$r \simeq \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w)}$$
 (D.22)

となる、これから確かに水星近日点はシフトする事がわかる、

D.3.1 数値計算

惑星の重力が水星近日点シフトにどの程度,影響するのかと言う問題を具体的な数値を入れて評価して見よう.まず $\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon_w\cos(\varphi-\varphi_w)$ 項を

$$\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_w \cos(\varphi - \varphi_w) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\varphi + \delta)$$

と書き換えよう.ここで c_1 と c_2 は

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w \tag{D.23}$$

$$c_2 = \varepsilon_w \sin \varphi_w \tag{D.24}$$

であり, $\cos \delta$ は

$$\cos \delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \tag{D.25}$$

と定義されている.ここで ε_w は ε よりもはるかに小さいので式 (D.25) は

$$\cos \delta = \frac{\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_w \cos \varphi_w)^2 + (\varepsilon_w \sin \varphi_w)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon}\right)^2 \sin^2 \varphi_w$$

と書く事が出来る.

D.3.2 惑星運動の1周期の平均

ここで惑星運動の1周期における平均操作を行おう.この場合,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_w \, d\varphi_w = \frac{1}{2} \tag{D.26}$$

となり、従って1周期における平均操作を行うと δ は

$$\delta \simeq \frac{\varepsilon_w}{\sqrt{2}\varepsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \frac{GM}{R_w^2} \frac{1}{R(\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\simeq \frac{R_w \omega_w^2}{\sqrt{2}\varepsilon R (\omega - \omega_w)^2} \left(\frac{m_w}{M}\right) \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{R_w^2}\right)}{\left(1 + \frac{R^2}{R_w^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$
(D.27)

となる. 但し, 惑星の軌道は円であると近似している.

D.4 数値計算の結果

まず δ の計算をする前に惑星の性質を書いて置こう . 但し , 表 1 においては全て地球を単位として計っている .

惑星 水星 火星 金星 木星 土星 地球 太陽 軌道半径 | 0.387 | 0.723 | 1.524 | 5.203 9.551.0質量 0.055 $0.815 \mid 0.107 \mid 317.8$ 95.21.0332946.0 周期 0.241 $0.615 \mid 1.881 \mid 11.86$ 29.51.04.15 $1.626 \mid 0.532 \mid 0.0843 \mid 0.0339$ 1.0

表 1 惑星の性質

D.4.1 100年間のδの値

表 2 では 1 0 0 年間における近日点シフト値の δ を表にしている.そしてこの計算 結果を Newcomb の計算と比較している.

惑星	金星	地球	火星	木星	土星	惑星の和
δ [式 (D.27)]	49.7	27.4	0.77	32.1	1.14	111.1
δ [Newcomb]	56.8	18.8	0.51	31.7	1.5	109.3

表 2 100年間のδ値

その結果 , δ についての我々の計算値は 111.1 であるのに対して , Newcomb の計算値は 109.3 であり , 両者は予想以上に良く一致している .

D.4.2 観測値との比較

水星近日点シフトの観測値は19世紀のものであるが,これはその前の100年間に渡る水星近日点シフトに対応している.この観測値がどの程度,信用できるのかと言う問題にここで答える事は出来ない.これは今後の課題である.

[2023年4月加筆]

関連図書

- [1] Fields and ParticlesK. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969
- [2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field TheoryT. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)
- [3] Fundamental Problems in Quantum Field TheoryT. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013
- [4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi Nova Science Publishers, 2009
- [5] New Fundamentals in Fields and ParticlesT. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008
- [6] "Relativistic Quantum Mechanics",J.D. Bjorken and S.D. Drell, (McGraw-Hill Book Company,1964)
- [7] "Advanced Quantum Mechanics", J.J. Sakurai, (addison-Wesley,1967)
- [8] "Global Positioning System", B.W. Parkinson and J.J. Spilker, Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)
- [9] "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,"
 A. Einstein, Annalen der Physik vol. 49, pp. 769-822,
 März. 1916.
- [10] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[11] "Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Results",
 B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), Geophysical Research Letters 26 (19): 3045-3048