第１３章　電磁波

13.1　Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を再びここに書いておこう。それぞれの式の重要性はこれまで見て来たとおりである。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss の法則)} \tag{1.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁荷がない)} \tag{1.1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday の法則)} \tag{1.1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ampere − Maxwell の法則)} \tag{1.1d}$$

ここで Ampere の法則の修正をしたのが Maxwell であるが、この修正についてここで議論して行きたい。恐らくは、理論物理の立場からすると、この修正こそがこれまでの理論物理の発展における最大の功績であると考えられる。ここでは、何故それが必要であったかについて議論したい。Ampere の法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ において、この式全体に ∇ を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{13.1}$$

となる。しかし、この式は連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{13.2}$$

と矛盾している。連続方程式は物質の流れの保存則を表しているのでこれが壊れていたら、電荷の保存が成り立たなくなってしまうのである。これは絶対に困るという事で書き換えたものが Ampere−Maxwell 方程式である。実際、式 (1.1d) に ∇ を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{13.3}$$

となり、$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ を考慮すれば、確かに上式は成り立っている事がわかる。

13.1.1　変位電流

ここで変位電流 $\boldsymbol{j}_d$ を定義しておこう。Ampere-Maxwell の法則の最後の項の事であり、時々使われる。

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.4}$$

電場が時間変化するとそこに電流が流れた事に対応していると言う事である。従って当然そこには磁場が生成されるのである。

13.2　電磁場のエネルギー

ここで電磁場全体のエネルギーについて計算しておこう。この場合、仕事率の計算が有効である。Newton 力学において

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{13.5}$$

が得られるが、これは単位時間あたりのエネルギーの増加を表している。従って、仕事率 W_0 を

$$W_0 = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{13.6}$$

で定義する。電磁場における力を代入すると

$$W_0 = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}) = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{13.7}$$

となる。ここで N 個の電荷が分布関数 ρ で分布しているとすると仕事率 W_0 は

$$W_0 = \int \rho\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}d^3r = \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}d^3r \tag{13.8}$$

となる。この式を Ampere-Maxwell 方程式を用いて書き直すと

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0}\int\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right)d^3r \tag{13.9}$$

となる。ここで Faraday の法則を用いて、さらに Poynting ベクトルを

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{13.10}$$

と定義すると仕事率 W_0 は

$$W_0 = -\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}\right]d^3r \tag{13.11}$$

となる。ここで第１，２項は通常の電場と磁場のエネルギーの変化分であり、第３項が電磁場のエネルギーの流れに対応している。それは

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}d^3r = \int_S S_n dS \tag{13.12}$$

と書いてみればわかるように表面 S からエネルギーがコンデンサーの中に流れ込む形になっている。

13.2.1 電磁場のエネルギー: 例題 $RC-$ 回路

表面から流れ込む電磁場のエネルギーの現象を理解するために、$RC-$ 回路を考えよう。容量 C のコンデンサーと抵抗 R を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう。コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう。この時コンデンサーの電場 E とその容量 C は

$$E = \frac{V}{d}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} \tag{13.13}$$

となる。ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \tag{13.14}$$

となる。ここで初期条件として $t=0$ で $Q=0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{13.15}$$

と求められる。これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \tag{13.16}$$

となる。ここでコンデンサーの電場はその方向を $z-$ 方向として

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2}\boldsymbol{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{13.17}$$

である。この電場は時間によっているので変位電流が生じる。それは

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{V}{R\pi a^2}e^{-\frac{t}{RC}}\boldsymbol{e}_z \tag{13.18}$$

となっている。変位電流がながれるとそれに伴って磁場ができる。Ampere-Maxwell の法則より、円筒座標を考えて、その半径 r の面積で積分すると

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 i_d \pi r^2 \tag{13.19}$$

より

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i_d r}{2}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2 R}\ e^{-\frac{t}{RC}}\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.20}$$

となっている。これより表面 $r=a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2 R}\ e^{-\frac{t}{RC}}\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.21}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = -\frac{V^2}{2\pi a R d}\ e^{-\frac{t}{RC}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\boldsymbol{e}_r \tag{13.22}$$

と求められ $r-$ 方向の内向きにエネルギーが流れて行く事になる。このエネルギーの流れを全時間で積分すると

$$\int_0^\infty S_n dt = \frac{CV^2}{4\pi a d} \tag{13.23}$$

となる。Poynting ベクトルのエネルギーは表面積を掛ける必要があるのでこれより全エネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi a d}\ 2\pi a d = \frac{1}{2}CV^2 \tag{13.24}$$

となり、これはコンデンサーに貯まったエネルギーと一致している。

13.2.2 電磁場のエネルギー: 例題 $LC-$ 回路

ここで、$LC-$ 回路を考えよう。容量 C のコンデンサーとコイル L を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう。コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう。ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = L\frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \tag{13.25}$$

となる。ここで初期条件として $t=0$ で $Q=0,\ J=0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV\left(1-\cos\omega t\right), \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{13.26}$$

と求められる。これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = VC\omega\sin\omega t \tag{13.27}$$

となる。コンデンサーの電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2}\,(1 - \cos\omega t)\,\boldsymbol{e}_z \tag{13.28}$$

となるので変位電流は

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_z \tag{13.29}$$

となる。よって、この時に作られる磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 r\omega VC}{2\pi a^2}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.30}$$

となっている。これより表面 $r = a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{VC}{\varepsilon_0\pi a^2}\,(1-\cos\omega t)\,\boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0\omega VC}{2\pi a}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{13.31}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = -\frac{\omega CV^2}{2\pi ad}\ (1-\cos\omega t)\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_r \tag{13.32}$$

となる。これは一周期で積分してみれば明らかなようにゼロである。すなわちエネルギーの流れはない事になり、保存系である事を示している。

13.3　電磁波

13.3.1　簡単な記述

電磁波について、まず、簡単で直感的な解説をして行こう。Maxwell 方程式で物質が存在しない場合、すなわち $\rho = 0$ と $\boldsymbol{j} = 0$ の時、この電磁場には物理的に意味のある解が存在している。物質が存在しない場合の Ampere-Maxwell の法則は

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.33}$$

である。この式をベクトルポテンシャルで書き直すと

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right) \tag{13.34}$$

となる。ここで Gauss の法則から $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0$ である事から、今の場合

$$\phi = 0 \tag{13.35}$$

として十分である。これとゲージ固定条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ より、式 (13.34) は

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0 \tag{13.36}$$

と求められた。これは電磁場が自由粒子の方程式を満たしている事を示している。この一般解が

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{ikx}\right) \tag{13.37}$$

で与えられることがすぐに確かめられる。ここで

$$kx = \omega_k t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \tag{13.38}$$

と定義されている。これを代入すると

$$\omega_k = c|\boldsymbol{k}| \tag{13.39}$$

の関係式が求まる。これは光の分散関係式を表している。ここで $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ を偏極ベクトルと呼んでいる。これはゲージ固定条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ より

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) = 0 \tag{13.40}$$

を満たしている。すなわち、フォトンの偏極はその進行方向と常に垂直になっている。

13.3.2　電磁波と場の量子化

ここで一つ注意しおく事がある。電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが、式 (13.37) そのものが電磁波に対応するわけではない。それは、この $\boldsymbol{A}$ は実数関数となっており、運動量 $\boldsymbol{k}$ の固有関数になっていないのである。それでは電磁波はどのようになっているのであろうか？その答えは、場を量子化して初めて理解できる事である。後で議論するように、場の量子化は式 (13.37) において $c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$, $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ をオペレータと考える事である。この時、$c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ はフォトン 1 個を生成する演算子であるため、フォトンが作られる時は必ず式 (13.37) の第 1 項のみが現われる事になっている。すなわち

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}|0\rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-ikx} \tag{13.41}$$

である。これは運動量 $\boldsymbol{k}$ の固有関数になっているので、確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるのである。

13.4　電磁波の発振機構

これまで見たように $LC-$ 回路自体は保存系であり、電磁波の放出としての外へのエネルギーの流れはない。それでは電磁波が生成される機構はどうなっているのであろうか？この事を理解するためにはどうしても場の理論の基本から出発せざるを得ない。まず、電磁場 $\boldsymbol{A}$ と電子との相互作用は電荷 e をカレントの方に入れた標識を取ると

$$H_I = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}d^3r \tag{13.42}$$

であり、ここから考えざるを得ない。この時、この相互作用の時間変化を考える必要がある。時間変化を考えた時に初めてエネルギーの生成を議論できるからである。すなわち、

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = -\int \left[\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] d^3r \tag{13.43}$$

となる。ここで スカラーポテンシャル ϕ がない時を考えて十分なので電場は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{13.44}$$

と書けている。よって W は

$$W = -\int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{A}d^3r + \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}d^3r \tag{13.45}$$

となる。ここで式 (13.8) から明らかなように第２項は W_0 そのものである。従って、第１項を W_1 として

$$W_1 = -\int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{A} d^3r \tag{13.46}$$

を計算する必要がある。まずは $\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}$ の計算である。簡単のために非相対論的な量子力学を用いよう。また、基本的なポテンシャルは Zeeman 効果の Hamiltonian なので

$$H = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}_0 \tag{13.47}$$

を仮定して十分である。ここで電子の質量を m としている。また外場 $\boldsymbol{B}_0$ は座標 $\boldsymbol{r}$ の関数であるとしている。ここで外場 $\boldsymbol{B}_0$ を $z-$ 軸方向にとっても一般性を失わないので $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z$ としよう。この時、非相対論の量子力学ではカレント $\boldsymbol{j}$ が

$$\boldsymbol{j} = \frac{e}{m}\psi^\dagger \hat{\boldsymbol{p}}\psi$$

で与えられている。ここで $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ である。これより

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{e}{m}\left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\hat{\boldsymbol{p}}\psi + \psi^\dagger \hat{\boldsymbol{p}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] = -\frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\nabla} B_0(\boldsymbol{r}) \tag{13.48}$$

となることが計算できる。従って、単位時間のエネルギーの変化率は

$$W_1 = \int \frac{e}{2m^2}(\boldsymbol{\nabla} B_0(\boldsymbol{r})) \cdot \boldsymbol{A} d^3r \tag{13.49}$$

と求められた。ここで注意する事として、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と外場 $\boldsymbol{B}_0$ の違いである。今の場合、 $\boldsymbol{A}$ は電子から発生された電磁場を表している。一方、外場 $\boldsymbol{B}_0$ は電子とは直接は関係のない場であり、他の粒子によって作られた外場としての電磁場である。これを見ても明らかなように、発振回路などにおける電磁波の生成は電子だけの孤立系で起こる現象ではなく、それ以外の場が存在しない限り起こらないのである。もう少し具体的に言うと、外場 $\boldsymbol{B}_0$ は $\boldsymbol{B}_0 \neq \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ であり、このベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とは結びつかないと言う事である。発振回路においては、この磁場 $\boldsymbol{B}_0$ はコンデンサーかまたはコイルが作る磁場によるものと考えて良い。また、加速器において電子が電磁波を放出する機構においては、$\boldsymbol{B}_0$ は電子をその軌道に閉じ込めているために掛けられている磁場そのものである。

13.5 電磁場の量子化

電磁場の量子化について、これまでの場の理論の教科書に混乱した記述が多すぎるので、ここでは、学部生には難しすぎる問題ではあるが、きちんとした解説を行っておこう。これにより、フォトンの偏極ベクトルの理解が深まるものと期待している。

電磁場の量子化は実験から始まっている。最も単純なところでは、水素原子における $2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移の際放出される光の問題がある。$2p_{\frac{1}{2}}$ の状態では電磁場の状態は真空であったのに、$1s_{\frac{1}{2}}$ 状態では１個フォトンが生成されている。これは通常の電磁場の理論では理解できないのである。そこで考案されたのが、「場の量子化」である。何故量子化と呼ばれるのかと言うと、それは場をオペレータで書くからである。電磁場の量子化を式で書くと

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx} \right] \tag{13.50}$$

となり、ここで $\omega_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|$ である。また、$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ は偏極ベクトルで

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \cdot \boldsymbol{k} = 0, \qquad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda') = \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{13.51}$$

を満たしている。量子化とは展開係数 $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ と $c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^{\dagger}$ に対して

$$[c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{13.52}$$

の関係式を仮定する事である。この時、展開係数 $c_{\boldsymbol{k},\lambda}$ と $c_{\boldsymbol{k},\lambda'}^{\dagger}$ はもはや単なる数ではなくて、オペレータになっている。このため、このオペレータが作用する空間を定義する必要があり、それを Fock 空間と呼んでいる。式で書くと、

$$c_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = 0 \tag{13.53}$$

を満たす $|0\rangle$ を真空という。従って、この真空に $c_{\boldsymbol{k},\lambda'}^{\dagger}$ をオペレートすると、

$$c_{\boldsymbol{k},\lambda'}^{\dagger}|0\rangle = |\boldsymbol{k},\lambda\rangle \tag{13.54}$$

となり、これは運動量 $\boldsymbol{k}$、 偏極 λ をもつフォトンの状態が生成された事を意味している。

13.5.1 偏極ベクトル $\epsilon^{\mu}(k,\lambda)$

ここで偏極ベクトル $\epsilon^{\mu}(k,\lambda)$ についてコメントしておきたい。これまで、この偏極ベクトル $\epsilon^{\mu}(k,\lambda)$ に対して重大な見誤りがあった。それは、運動方程式

を解く事なしに議論を進めてしまった事によっている。まずはゲージ固定する前に運動方程式の構造を理解しておく必要があるという事は当然である。電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{13.55}$$

と求められている。自由フォトンの解の形が

$$A^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu(k,\lambda) \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right]$$

で与えられるので、この式を (13.55) 式に代入する。その結果、

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{13.56}$$

が求められる。これを行列で書き直すと

$$\sum_{\nu=0}^{3} \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0 \tag{13.57}$$

となる。この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k,\lambda)$ が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロである。すなわち、

$$\det\{\mathrm{k}^2 \mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{13.58}$$

である。この方程式の解を探してみると　$k^2 = 0$　　が解である事が簡単に証明できる。それは　$\det\{-\mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0$　であるからである。この $k^2 = 0$ の式を (13.56) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{13.59}$$

の式が得られる。これはよく知られている Lorentz ゲージ固定に対応した式である。重要な事はこの式が運動方程式から得られた事であり、ゲージ固定とは無関係である事である。これは Lorentz ゲージがゲージ固定の条件としては不適当なものである事を示している。従って、それ以外のゲージ固定が必要となる。例えば、Coulomb ゲージ固定を選ぶと、$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ となるので、これから明らかに $\epsilon_0 = 0$ となっている。さらには、フォトンの自由度は確かに 2 個である事がわかる。この事から、確かに偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k,\lambda)$ が (13.51) 式で書けている事がわかるのである。

この計算手法は自由粒子に対する Dirac 方程式を解く時に行ったものと全く同じである。Dirac 方程式の場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$) が求まり、

それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まるのである。しかしどう云うわけか、これまでこの電磁場 A^μ における偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k,\lambda)$ に対する方程式は解かれる事がなかったのである。恐らくはゲージ不変性に振り回されていたからであろうと思われる。Dirac 方程式の場合、４個の自由度のうち、正負の状態の形状は決まるが、スピンの自由度 (スピンアップとダウン) は決まらないままであった。電磁場の場合、自由度は４個であったが、分散関係式を代入して１個の条件 (Lorentz 条件) が決まったのである。残り３個のうち、ゲージ固定により、１個自由度が減り、結局、フォトンはスピンが１であるにもかかわらず、自由度は２個になったのである。そしてこれは実験事実とも合っている。また、フォトンの偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ には

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda') = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

という直交関係式が存在している。従って、フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直行する平面でそれぞれが直交するような２個のベクトルで成り立っている事が分かる。但し、この描像には少し無理があることも理解する必要がある。それは、フォトンには静止系が存在していないので、上述した平面は仮想的であり、フォトンの静止系があったとした時の想像のピクチャーである。つまりは、フォトンの偏極ベクトルに対してはそれ程簡単には物理的な絵を書く事が出来ないという事である。但し、フォトンが電子と相互作用して電子に吸収される場合を考えると、この場合はある程度偏極ベクトルの描像を作る事が出来る。この時は、電子の静止系が定義されているので、吸収された瞬間のフォトンの偏極ベクトルはフォトンの進行方向と直交する方向になっている。そしてその事は必ず電子のスピンの磁気量子数に反映されているのである。

13.5.2　フォトンと電場・磁場

多くの電磁気学の教科書において、フォトンが電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ と関係している様な記述が見受けられる。しかし、これはこれまでの議論を理解すれば明らかな様に、全くの間違いである。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ をゲージ固定した後、それを量子化したものがフォトンであり、これはもはや電場や磁場と関係をつける事が出来ないし、それ以上に関係をつける必要はさらにない。電場と磁場は常に実数として理解されるが、フォトンの状態は複素数である。これは電磁波の状態が

$$\langle \boldsymbol{k},\lambda|\boldsymbol{A}|0\rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}}e^{-ikx} \tag{13.60}$$

と表されている事からも明らかである。従って、フォトンの状態は上式で表されており、それで全てである。後は、偏極ベクトルについてしっかり理解する事である。偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ は

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{k}=0, \qquad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda')=\delta_{\lambda,\lambda'}$$

を満たす事が条件である。今、フォトンの進む方向を $z-$ 軸とした場合、最も単純な偏極ベクトルとしては

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},1)=\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},2)=\boldsymbol{e}_y \tag{13.61}$$

と取る事であろう。この場合、例えば電子のスピンの量子化軸として静磁場を $x-$ 軸方向に掛けた時、偏極ベクトルの $x-$ 軸への射影は 1 と 0 となっている。勿論、$x-$ 軸を逆にとれば、その射影は -1 と 0 となる。これを偏極ベクトルの磁気量子数と呼んで良いかどうかは議論の余地があろう。それは上述したように、フォトンには静止系が定義できないからである。

13.5.3　フォトンの偏光

フォトンはスピンが１であり、その成分は２個ある事を見てきたが、この２つの状態は偏極ベクトルとして記述される。生成されたフォトンは基本的にはこの２つの状態が混ざっている。しかし、注意すべき事は、１個のフォトンをとれば、これは勿論そのどちらかの状態になっている。１００個のフォトンが生成されたら、５０個のフォトンが一つの偏極状態を持ち、あとの５０個のフォトンがもう一つの偏極状態を持っている。

(1) 偏光板

偏光板にフォトンを通す事により、この偏極状態を分離する事ができる。その意味では偏光はフォトンにとって極めて重要な物理現象であると言える。この場合、生成されたフォトンがどのような偏極状態を持つかは、偏光板の結晶構造やその電子状態に依存している。式 (13.61) で与えられる場合もあれば、

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y) \tag{13.62}$$

となる場合もあるが、それらは偏光板の構造に依っている。しかし、フォトンが偏光板でどのような散乱を起こすのかは、理論的にはかなり難しい問題である。散乱は Compton 散乱であり、この多重散乱をしっかり計算すればよく、その意味では勿論、計算可能ではある。しかし、これまでにどの程度、信頼できる現実的な計算が行われてきたかは良くわからない。

(2) 原子状態の遷移

もう一つ、フォトンの偏光が決まる場合がある。それは例えば、原子状態の遷移によってフォトンが生成される場合、その原子中の電子のスピン状態が偏極している場合である。この場合は常に特別に偏光したフォトンが観測される事になる。原子系のスピンを偏極させる事はそれ程難しくはなく、従って、特殊に偏光したフォトンを作る事もそれ程難しい事ではない。

13.5.4 偏極ベクトルの群論的解説

フォトンのスピンが１である事に関しては、群論的な言葉で言えば、偏極ベクトルがランク１のテンサーである事から明らかである。しかし、この偏極ベクトルは角運動量とは異なっている。特に、偏極ベクトルは座標には依っていない。この点では、偏極ベクトルがむしろ電子のスピンの方により近いと言う事もできる。しかし、スピンとも異なっている。電子のスピンは角運動量と同じ代数関係を満たしているのに対して、偏極ベクトルはそのような代数関係は存在していない。さらに言えば、ベクトルポテンシャルを量子化した時にオペレータの中に現れてはいるが、しかし偏極ベクトルはオペレータの性質は持っていなく、状態ベクトルと考えた方が良い。これらの事より、フォトンのスピンはそのスピンの大きさが１である事は確かであるが、電子の角運動量ともスピンとも微妙に異なっている。この事がフォトンのスピン（偏極ベクトル）をきちんと理解する事がある意味で簡単ではない事の理由でもあろう。

13.6　相対性理論

物理における全ての基本法則はどの慣性系においても常に同じように成り立っている。これが最も大切である事は明らかであろう。地球上で発展させた理論が他の慣性系では通用しなかったら、これは努力する意味が著しく薄れてしまうものである。従ってどの慣性系でも物理が同じである事はほとんど絶対条件であると言える。

13.6.1　Lorentz 変換

静止系 $S(t,x,y,z)-$ 系からもう一つの慣性系 $S'(t',x',y',z')-$ 系への変換は Lorentz 変換で与えられる。式としては

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z+vt), \quad t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}z\right) \tag{13.51}$$

で与えられている。ここで v は $S'-$ 系が $z-$ 軸に沿って動いている速度である。また、c は光速を表し、γ は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{13.52}$$

で与えられている。ここで重要な事はそれぞれの系に時間を定義してあると言う事である。これは我々の日常での経験による直感からするとなかなか理解は難しい。しかし、それぞれの系で実験した時に必ず観測者を定義する必要がある。これが相対性理論で最も重要な事である。従って、それぞれの観測者が自分の時間を持っていたとしても至極合理的な事ではある。

エネルギーと運動量に対しても同じ変換式が成り立つ。すなわち

$$p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma\left(p_z + \frac{v}{c^2}E\right), \quad E' = \gamma\left(E + vp_z\right) \tag{13.53}$$

となっている。この時、

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = E'^2 - \boldsymbol{p}'^2c^2 \tag{13.54}$$

である事が簡単に示される。アインシュタインはこの不変量を質量として

$$E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + (mc^2)^2} \tag{13.55}$$

の関係式を発見したのである。

13.6.2 Maxwell 方程式の Lorentz 変換不変性

Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変である。Maxwell 方程式全体の不変性を調べる事もそれ程難しくはないが、ここでは最も重要な形である

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0 \tag{13.56}$$

の式の不変性を議論しよう。ここで微分の計算を実行すると

$$\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{13.57}$$

である事が直ちに計算できる。これは方程式が Lorentz 変換に対して不変である事を示している。