2-2 一般座標で書いたNewton方程式 ・10

一般座標 ： (q_1, q_2, q_3) とかく

(例) 極座標なら(ば

$q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi$

【重要】 x, y, z は 一般座標 (q_1, q_2, q_3) の関数

↓

$$\begin{cases} x = x(q_1\ q_2\ q_3) \\ y = y(q_1\ q_2\ q_3) \\ z = z(q_1\ q_2\ q_3) \end{cases}$$

(例) 極座標だと

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ となっている

・ (x, y, z) は 質点 の座標

質点の運動 の記述

↳ よって (x, y, z) は 時間の関数

$(q_1\ q_2\ q_3)$ も 〃

[Lagrange 方程式の導出]

Newton 方程式を一般座標で書き直す

↓

Lagrange 方程式

• 時間微分の公式

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 \\
\dot{y} = \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3 \\
\dot{z} = \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3
\end{cases}
$$

[例] 極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$

などとなる

• 偏微分：

$$
\boxed{\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial z}{\partial q_i}}
$$

$(i = 1, 2, 3)$

が成立している。これはあきらか。

[重要] $\begin{cases} 1.\ q_i \text{ と } \dot{q}_i \text{ は独立} \\ 2.\ q_1\ q_2\ q_3 \text{ はそれぞれ独立} \end{cases}$

今 $\boxed{I \equiv -\dfrac{\partial U}{\partial q_i}}$ という量を考える.

- Newton方程式： $m\ddot{x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x},\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y},\ m\ddot{z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$

- $I = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial q_i} = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial q_i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial q_i} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)$

$\therefore\ I = m\left(\ddot{x}\dfrac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y}\dfrac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z}\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)$ となる.

この式を書き直してゆく.

恒等式

$$\begin{cases} \ddot{x}\dfrac{\partial x}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right) - \dot{x}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} \\ \ddot{y}\dfrac{\partial y}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{y}\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right) - \dot{y}\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} \\ \ddot{z}\dfrac{\partial z}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{z}\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right) - \dot{z}\dfrac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \end{cases}$$

が成立している. チェックは簡単.

I をかきかえると

$$I = m\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i}\right) - \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) - \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i}\right\}$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{x}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\dot{x}^2, \quad (y, z, \text{も同様}) \\ \dot{x}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial q_i}\dot{x}^2, \quad (y, z, \text{も同様}) \end{cases}$$

を用いると I は

$$\boxed{I = \frac{1}{2}m\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\right\}}$$

と書くことができる。

運動エネルギーは

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}$$

だから

I を書き直すと

$$\boxed{I = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}$$ となる.

一方, $I = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ なので代入すると

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U)}$$ となる.

- ここで仮定: U は $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ によらない

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

(この仮定は合理的なものである)

- Lagrangian L の定義: $\boxed{L \equiv T - U}$

これより上式は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$ $(i = 1, 2, 3)$

(Lagrange 方程式)

Lagrange 方程式は

$$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}} \qquad (i=1,2,3) \\ \\ m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U \qquad (\text{Newton 方程式})\end{array}\right.$$

↑ これはデカルト座標での式

- Lagrange 方程式は一般座標での式
  但し、$q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ なら同じ
- 仮定： $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0$ としている

  （または $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$ ）

⇓

U は $\mathbf{r}$ のみの関数である

⇕

これは観測と一致している